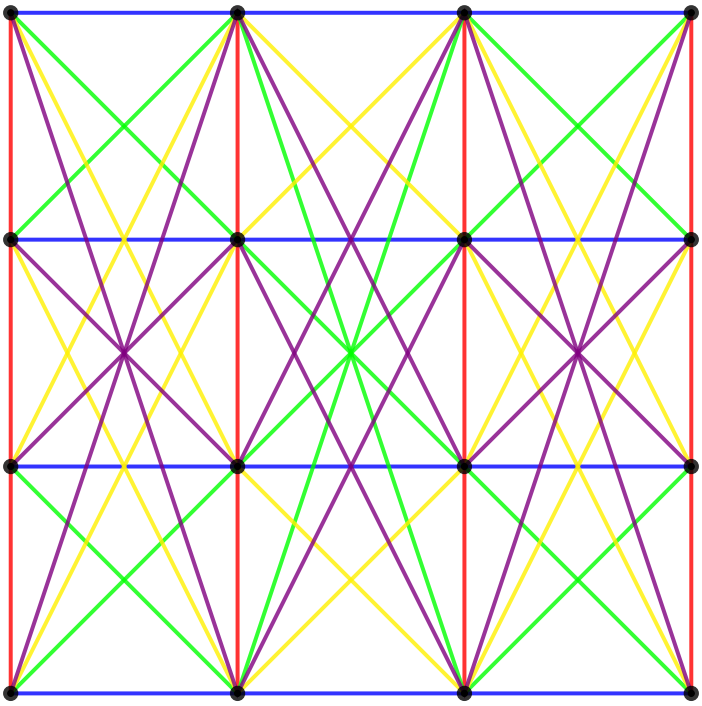
Synthetische Geometrie

Benjamin Sambale

6. April 2026



Inhaltsverzeichnis

Vorwort 2

1 Affine Ebenen 2

2 Isomorphismen 6

3 Translationsebenen 8

4 Desargues-Ebenen 13

5 Pappus-Ebenen 20

6 Projektive Ebenen 27

7 Euklidische Geometrie 32

Stichwortverzeichnis 48

Vorwort

Die meisten Geometrie-Bücher widmen sich hauptsächlich den *projektiven* Ebenen. Dieses Skript ist ein Versuch die Geometrie der *affinen* Ebene axiomatisch aufzubauen. Die Hauptquelle ist [1], wobei hier leider nicht vollständig der Zusammenhang zwischen Translationsebenen und Desargues-Ebenen geklärt wird. Diese Lücke wird in [2] geschlossen. An einigen Stellen benutze ich Kenntnisse der Algebra (Schiefkörper, Galoistheorie, Brauergruppe), die man in meinem Algebra-Skript nachlesen kann. Viele Fehler wurden durch Claude Sonnet 4.6 korrigiert.

Literatur

[1] M. Koecher und A. Krieg, *Ebene Geometrie*, 3. Auflage, Springer, Berlin, 2007

[2] P. Scherk und R. Lingenberg, *Rudiments of plane affine geometry*, University of Toronto Press, 1975

1 Affine Ebenen

Definition 1.1. Sei $\mathcal{P}$ eine Menge und $\mathcal{G}$ eine Menge von Teilmengen von $\mathcal{P}$.

- Die Elemente von $\mathcal{P}$ bzw. $\mathcal{G}$ nennen wir *Punkte* bzw. *Geraden*.
- Wir sagen $x \in \mathcal{P}$ *liegt auf* $G \in \mathcal{G}$ oder G *geht durch* x, falls $x \in G$.
- Punkte auf einer Geraden heißen *kollinear*.
- Liegt x auf G und H, so nennt man x einen *Schnittpunkt* von G und H.
- Sind die Geraden G und H gleich oder disjunkt, so heißen sie parallel. Man sagt auch G ist eine *Parallele* von H und schreibt $G \parallel H$.

- Punkte $x, y, z \in \mathcal{P}$ sind in *allgemeiner Lage*, wenn sie nicht kollinear sind.

Das Paar $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ heißt *affine Ebene*, falls gilt

(A1) Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte.

(A2) Je zwei verschiedene Punkte $x, y \in \mathcal{P}$ liegen auf genau einer Geraden $G \in \mathcal{G}$. Man schreibt $xy := G$.

(A3) (Parallelenaxiom) Zu jedem $x \in \mathcal{P}$ und $G \in \mathcal{G}$ existiert genau eine Parallele von G, die durch x geht.

(A4) Es gibt drei Punkte in allgemeiner Lage.

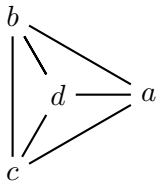
Bemerkung 1.2.

(i) Das Parallelenaxiom geht auf Euklids „Elemente“ zurück. Man hat 2000 Jahre lang versucht es aus den anderen Axiomen zu folgern, bis Gauß gezeigt hat, dass dies unmöglich ist.

(ii) Um voreilige Schlüsse zu vermeiden, sollte man die Begriffe „Punkt“, „Gerade” und „Ebene“ nicht zu anschaulich interpretieren. Hilbert schrieb, man könne sie durch „Tisch“, „Stuhl“ und „Bierseidel“ ersetzen.

Beispiel 1.3.

(i) Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine affine Ebene und $a, b, c \in \mathcal{P}$ in allgemeiner Lage. Nach dem Parallelenaxiom existiert eine Gerade G durch c, die parallel zu ab ist. Nach (A1) besitzt G mindestens einen weiteren Punkt d. Jede affine Ebene besitzt also mindestens vier Punkte. Wählt man für $\mathcal{G}$ alle (sechs) 2-elementigen Teilmengen von $\mathcal{P} = \{a, b, c, d\}$, so ist $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine affine Ebene.



(ii) Sei $\mathcal{P} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ die obere Halbebene und

$$\mathcal{G} := \big\{(x, y) \in \mathcal{P} : y \geq 0\big\} \cup \big\{(x, y) \in \mathcal{P} : (x - \lambda)^2 + y^2 = \rho^2 > 0\big\}$$

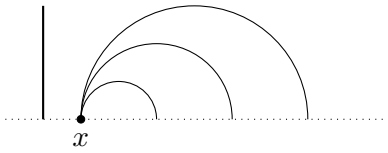
die Menge aller senkrechten Strahlen und aller Halbkreise mit Mittelpunkt auf der x-Achse. Jede Gerade besitzt unendlich viele Punkte und es gibt sicher drei Punkte in allgemeiner Lage. Seien nun (a, b) und (c, d) verschiedene Punkte in $\mathcal{P}$. Im Fall $a = c$ liegen beide Punkte auf genau einer senkrechten Geraden und auf keinem Halbkreis. Im Fall $a \neq c$ führt der Ansatz

$$(a - \lambda)^2 + b^2 = \rho^2 = (c - \lambda)^2 + d^2$$

zu der eindeutigen Lösung

$$\lambda := \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(a - c)}, \qquad \rho := \sqrt{(a - \lambda)^2 + b^2} = \sqrt{(c - \lambda)^2 + d^2}.$$

Wegen $a \neq c$ ist $(a-\lambda)^2 > 0$ oder $(b-\lambda)^2 > 0$. In jedem Fall ist $\rho > 0$. Also ist (A2) erfüllt. Andererseits ist das Parallelenaxiom *nicht* erfüllt, denn es kann sogar unendlich viele Parallelen einer Gerade geben, die sich alle in einem Punkt schneiden:



Bemerkung 1.4. Weite Teile der linearen Algebra lassen sich allgemeiner über *Schiefkörpern* K anstelle von Körpern durchführen (die Multiplikation in K muss nicht kommutativ sein). So gilt zum Beispiel der Basisergänzungssatz sowie Steinitz' Austauschsatz in dieser Allgemeinheit (Algebra 2). Insbesondere lässt sich die Dimension für einen K-Vektorraum definieren. Für je zwei linear unabhängige Vektoren $v, w \in K^2$ und $v', w' \in K^2$ existiert genau ein $A \in \mathrm{GL}(2, K)$ mit $Av = v'$ und $Aw = w'$. Davon werden wir im Folgenden Gebrauch machen.

Satz 1.5. *Sei K ein Schiefkörper und $\mathcal{P} = K^2$. Für $a, v \in \mathcal{P}$ mit $v \neq (0,0)$ sei $G_{a,v} := a + Kv$ die Gerade durch a in* Richtung *Kv. Sei $\mathcal{G} := \{G_{a,v} : a, v \in \mathcal{P} : v \neq 0\}$. Dann ist $\mathcal{E}(K) := (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine affine Ebene.*

Beweis. Seien $G_{a,v}, G_{b,w} \in \mathcal{G}$. Sind v und w linear abhängig, so sind $G_{a,v}$ und $G_{b,w}$ Nebenklassen von $Kv = Kw$ in $(\mathcal{P}, +)$. Folglich sind $G_{a,v}$ und $G_{b,w}$ dann gleich oder disjunkt. Sind v, w linear unabhängig, so bilden sie eine Basis von K^2 und es existieren eindeutige $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda v - \mu w = b - a$. Dann ist $G_{a,v} \cap G_{b,w} = \{a + \lambda v = b + \mu w\}$. Fazit: $G_{a,v} \parallel G_{b,w} \iff Kv = Kw$. Nun zu den Axiomen:

(A1) Offenbar liegen a und $a + v$ auf $G_{a,v}$.

(A2) Verschiedene $x, y \in \mathcal{P}$ liegen auf $G_{x,y-x}$. Gilt auch $x, y \in H \in \mathcal{G}$, so folgt wie oben $H = G_{x,y-x}$.

(A3) Sei $x \in \mathcal{P}$ und $G := G_{a,v} \in \mathcal{G}$. Dann ist $x \in H := G_{x,v} \parallel G$. Gilt auch $x \in H' := G_{b,w} \parallel G$, so erhält man $Kw = Kv$ und $H \parallel H'$. Wegen $x \in H \cap H'$ folgt $H = H'$.

(A4) Offenbar sind $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ in allgemeiner Lage. □

Bemerkung 1.6. Man nennt $\mathcal{E}(K)$ die *Koordinatenebene* über K. Für $K = \mathbb{F}_2$ erhält man die Ebene mit vier Punkten aus Beispiel 1.3. Das Coverbild zeigt $\mathcal{E}(\mathbb{F}_4)$, wobei Geraden mit gleicher „Steigung" die gleiche Farbe haben. Der Spezialfall $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ heißt *euklidische* Ebene. Im Folgenden sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ stets eine affine Ebene.

Lemma 1.7. *Für $G, H \in \mathcal{G}$ gilt:*

(i) Aus $G \subseteq H$ folgt $G = H$.

(ii) Aus $G \nparallel H$ folgt $G \cap H = \{x\}$. Man schreibt dann $G \wedge H := x$.

Beweis.

(i) Nach (A1) existieren verschiedene $x, y \in G \subseteq H$. Nach (A2) ist $G = xy = H$.

(ii) Da G und H nicht parallel sind, existiert ein Schnittpunkt $x \in G \cap H$. Ist auch $y \neq x$ ein Schnittpunkt, so folgt der Widerspruch $G = xy = H$. □

Lemma 1.8. *Parallelität ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{G}$.*

Beweis. Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine affine Ebene und $G, H, K \in \mathcal{G}$. Sicher ist $G \parallel G$ und $G \parallel H \Leftrightarrow H \parallel G$. Sei nun $G \parallel H \parallel K$ und o. B. d. A. G, H, K paarweise verschieden. Angenommen G und K haben einen Schnittpunkt x. Dann ist sowohl G als auch K die eindeutig bestimmte Parallele von H durch x. Also ist $G = K$ und $G \parallel K$. □

Definition 1.9. Die Menge der Parallelen von $G \in \mathcal{G}$ nennt man eine *Richtung* und schreibt dafür $[G]$. Die Menge aller Richtungen sei $[\mathcal{G}]$. Die Menge der Geraden durch $x \in \mathcal{P}$ nennt man *Geradenbüschel* und schreibt dafür $[x]$. Die Menge aller Geradenbüschel sei $[\mathcal{P}]$.

Satz 1.10. *Seien $G, H \in \mathcal{G}$ nicht parallel. Dann ist $\varphi\colon [H] \to G$, $K \mapsto K \wedge G$ eine Bijektion. Insbesondere sind je zwei Geraden gleichmächtig.*

Beweis. Nach Lemma 1.7 und dem Parallelenaxiom ist φ wohldefiniert und bijektiv. Ist auch $G' \nparallel H$, kann man G durch G' ersetzen und erhält $|G| = |[H]| = |G'|$. Seien nun $x, y \in H$ verschieden. Dann existiert ein $z \in \mathcal{P} \setminus H$ nach (A4). Nun sind $H = xy$, $G := xz$ und $G' := yz$ paarweise nicht parallel. Es folgt $|H| = |[G]| = |G'| = |G|$. □

Definition 1.11. Die Mächtigkeit einer Gerade nennt man die *Ordnung* $\operatorname{ord}(\mathcal{E})$ von $\mathcal{E}$ (nach Satz 1.10 ist dies wohldefiniert).

Satz 1.12. *Für die Ordnung $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ von $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ gilt*

(i) $|[x]| = |[G]| + 1 = n + 1$ *für alle $x \in \mathcal{P}$ und $G \in \mathcal{G}$.*

(ii) $|\mathcal{P}| = n^2$ *und* $|\mathcal{G}| = n^2 + n$.

Beweis.

(i) Die Gleichung $|[G]| = n$ folgt bereits aus Satz 1.10. Wie üblich existiert $H \in \mathcal{G}$ mit $x \notin H$. Jeder Punkt $y \in H$ bestimmt die Gerade $xy \in [x]$. Zusätzlich gibt es genau eine Parallele von H durch x. Dies zeigt $|[x]| = n + 1$.

(ii) Da jede Richtung genau eine Gerade durch x enthält (Parallelenaxiom), gilt $|\mathcal{G}| = |[x]||[G]| = n^2 + n$ nach (i). Nun ist $|\mathcal{P}|(n+1) = |\mathcal{P}||[x]| = \sum_{G \in \mathcal{G}} |G| = |\mathcal{G}|n = n^2(n+1)$ und $|\mathcal{P}| = n^2$. □

Bemerkung 1.13. Es gibt keine affinen Ebenen mit genau 5 Punkten, da 5 keine Quadratzahl ist. Zu jeder Primzahlpotenz $q \neq 1$ existiert ein Körper mit q Elementen. Die Koordinatenebene hat dann Ordnung q. Bruck und Ryser haben bewiesen, dass die Ordnung n einer affinen Ebene die Summe zweier Quadratzahlen ist, falls n kongruent zu 1 oder 2 modulo 4 ist. Dies schließt $n = 6$ aus. Unter großen Computereinsatz hat man gezeigt, dass es auch keine affinen Ebenen der Ordnung 10 gibt. Man vermutet, dass die Ordnung einer endlichen affinen Ebene stets eine Primzahlpotenz ist, auch wenn nicht jede Ebene eine Koordinatenebene ist.

2 Isomorphismen

Definition 2.1. Seien $\mathcal{E} := (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ und $\mathcal{E}' := (\mathcal{P}', \mathcal{G}')$ affine Ebenen. Eine Bijektion $\varphi\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ heißt *Isomorphismus*, falls $\varphi(G) \in \mathcal{G}'$ für alle $G \in \mathcal{G}$ gilt (Geraden werden auf Geraden abgebildet). Gegebenenfalls nennt man $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ isomorph und schreibt $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}'$. Im Fall $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ nennt man φ einen *Automorphismus* (oder *Kollineation*) von $\mathcal{E}$. Die Automorphismen von $\mathcal{E}$ bilden die *Automorphismengruppe* $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ bzgl. Komposition von Abbildungen.

Bemerkung 2.2. Sei $\varphi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ ein Isomorphismus. Für verschiedene $x, y \in \mathcal{P}$ gilt $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Insbesondere induziert φ auch eine Bijektion $\mathcal{G} \to \mathcal{G}'$. Für $G, H \in \mathcal{G}$ gilt $G \parallel H \Leftrightarrow \varphi(G) \parallel \varphi(H)$. Außerdem ist $\mathrm{Aut}(\mathcal{E}) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{E}')$, $\sigma \mapsto \varphi\sigma\varphi^{-1}$ ein Isomorphismus von Gruppen.

Beispiel 2.3.

(i) Jede affine Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ der Ordnung 2 ist zu $\mathcal{E}(\mathbb{F}_2)$ isomorph, denn $\mathcal{G}$ muss aus allen 2-elementigen Teilmengen von $\mathcal{P}$ bestehen. Jede Permutation $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ist ein Automorphismus, d. h. $\mathrm{Aut}(\mathcal{E}(\mathbb{F}_2)) = \mathrm{Sym}(\mathcal{P}) \cong S_4$.

(ii) Sei K ein Schiefkörper, $A \in \mathrm{GL}(2, K)$, $x \in K^2$ und $\alpha \in \mathrm{Aut}(K)$. Für $v = (v_1, v_2) \in K^2$ sei $\alpha(v) = (\alpha(v_1), \alpha(v_2))$. Die Abbildung

$$\Gamma_{A,x,\alpha}\colon K^2 \to K^2, \qquad v \mapsto \alpha(v)A + x$$

ist offenbar injektiv. Da $\alpha^{-1}((v-x)A^{-1})$ ein Urbild von v ist, ist $\Gamma_{A,x,\alpha}$ bijektiv. Für eine Gerade $G_{a,v}$ gilt

$$\Gamma_{A,x,\alpha}(G_{a,v}) = \alpha(a + Kv)A + x = \alpha(a)A + K\alpha(v)A + x = G_{\alpha(a)A+x,\alpha(v)A}.$$

Dies zeigt $\Gamma_{A,x,\alpha} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E}(K))$. Wir zeigen in Satz 3.9, dass jeder Automorphismus von $\mathcal{E}(K)$ diese Form hat.

Definition 2.4. Eine Permutation $\sigma\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ heißt *Dilatation* von $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$, falls $\sigma(x)\sigma(y) \parallel xy$ für alle $x, y \in \mathcal{P}$ gilt.

Satz 2.5. *Die Dilatationen bilden einen Normalteiler* $\mathrm{Dil}(\mathcal{E})$ *von* $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$.

Beweis. Offenbar ist $\mathrm{Dil}(\mathcal{E})$ eine Gruppe. Für $\sigma \in \mathrm{Dil}(\mathcal{E})$, $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ und $x \neq y$ gilt

$$\begin{aligned}\sigma(\varphi^{-1}(x))\sigma(\varphi^{-1}(y)) &\parallel \varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)\\ (\varphi\sigma\varphi^{-1})(x)(\varphi\sigma\varphi^{-1})(y) = \varphi(\sigma(\varphi^{-1}(x))\sigma(\varphi^{-1}(y))) &\parallel \varphi(\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)) = xy.\end{aligned}$$

Dies zeigt $\varphi\sigma\varphi^{-1} \in \mathrm{Dil}(\mathcal{E})$.

Wir müssen nur noch $\mathrm{Dil}(\mathcal{E}) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ zeigen. Für $\mathrm{ord}(\mathcal{E}) = 2$ ist $\mathrm{Dil}(\mathcal{E}) \subseteq \mathrm{Sym}(\mathcal{P}) = \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ nach Beispiel 2.3. Sei nun $\mathrm{ord}(\mathcal{E}) \geq 3$ und x, y, z paarweise verschiedene Punkte auf $G \in \mathcal{G}$. Für $\sigma \in \mathrm{Dil}(\mathcal{E})$ gilt

$$\sigma(x)\sigma(z) \parallel xz = xy = yz \parallel \sigma(y)\sigma(z).$$

Nach Lemma 1.8 ist $\sigma(x)\sigma(z) \parallel \sigma(y)\sigma(z)$. Da beide Geraden $\sigma(z)$ enthalten, folgt

$$\sigma(x)\sigma(z) = \sigma(y)\sigma(z) = \sigma(x)\sigma(y).$$

Dies zeigt $\sigma(G) \subseteq \sigma(x)\sigma(y)$. Ersetzt man σ durch σ^{-1}, so erhält man $\sigma^{-1}(\sigma(x)\sigma(y)) \subseteq xy = G$. Also ist $\mathrm{Dil}(\mathcal{E}) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$. □

Lemma 2.6. *Jede Dilatation ist durch die Bilder zweier verschiedener Punkte eindeutig bestimmt. Insbesondere ist* id *die einzige Dilatation mit zwei Fixpunkten.*

Beweis. Sei $\sigma \in \mathrm{Dil}(\mathcal{E})$ und $x, y \in \mathcal{P}$ verschieden. Sei zunächst $z \in \mathcal{P} \setminus xy$. Sei G die Parallele von xz durch $\sigma(x)$ und sei H die Parallele von yz durch $\sigma(y)$. Wegen $\sigma(x) \in G \parallel xz \parallel \sigma(x)\sigma(z)$ ist $\sigma(z) \in G$ und analog $\sigma(z) \in H$. Aus $G \parallel xz \nparallel yz \parallel H$ folgt nun $\sigma(z) = G \wedge H$.

Sei nun $z \in xy \setminus \{x, y\}$. Wir wählen $a \in \mathcal{P} \setminus xy$. Nach dem ersten Teil ist $\sigma(a)$ durch $\sigma(x)$ und $\sigma(y)$ eindeutig bestimmt. Wegen $z \notin xa$ ist $\sigma(z)$ durch $\sigma(x)$ und $\sigma(a)$ eindeutig bestimmt. Die Behauptung folgt. □

Beispiel 2.7. Für einen Körper K sind die Abbildungen $\Gamma_{\lambda 1_2, x, \mathrm{id}}$ mit $\lambda \in K^\times$ und $x \in K^2$ Dilatationen von $\mathcal{E}(K)$, denn

$$\Gamma_{\lambda 1_2, x, \mathrm{id}}(G_{a,v}) = G_{\lambda a + x, \lambda v} \parallel G_{a,v}.$$

Sei umgekehrt $\Gamma \in \mathrm{Dil}(\mathcal{E}(K))$. Indem man Γ mit $\Gamma_{1_2, -\Gamma(0), \mathrm{id}}$ multipliziert, kann man $\Gamma(0) = 0$ annehmen. Sei $v := (1, 0)$. Wegen $0\Gamma(v) = \Gamma(0)\Gamma(v) \parallel 0v = G_{0,v} = Kv$ existiert ein $\lambda \in K^\times$ mit $\Gamma(v) = \lambda v$. Nun stimmen Γ und $\Gamma_{\lambda 1_2, 0, \mathrm{id}}$ an den Punkten 0 und v überein. Aus Lemma 2.6 folgt $\Gamma = \Gamma_{\lambda 1_2, 0, \mathrm{id}}$. Insgesamt gilt

$$\mathrm{Dil}(\mathcal{E}(K)) = \{\Gamma_{\lambda 1_2, x, \mathrm{id}} : \lambda \in K^\times, x \in K^2\} \cong K^2 \rtimes K^\times.$$

Definition 2.8. Man nennt $G \in \mathcal{G}$ eine *Fixgerade* von $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$, falls $\varphi(G) = G$ gilt.

Satz 2.9. *Für jede Dilatation $\sigma \neq$ id gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

(i) Die Fixgeraden von σ bilden eine Richtung. Dann hat σ keine Fixpunkte.

(ii) Die Fixgeraden von σ bilden ein Geradebüschel $[x]$, wobei x der einzige Fixpunkt von σ ist.

Beweis. Wegen $\sigma \neq \mathrm{id}$ existiert $a \in \mathcal{P}$ mit $\sigma(a) \neq a$. Aus $\sigma(a)a \parallel \sigma^2(a)\sigma(a)$ folgt $\sigma(\sigma(a)a) = \sigma(a)a$. Also ist $G := \sigma(a)a$ eine Fixgerade von σ. Nehmen wir an, dass σ einen Fixpunkt $x \in \mathcal{P}$ hat. Nach Lemma 2.6 ist x dann der einzige Fixpunkt von σ. Sei $y \in G \setminus \{x\}$. Dann ist $x = \sigma(x) \in \sigma(x)\sigma(y) \parallel xy$ und $\sigma(x)\sigma(y) = xy = y\sigma(y) = G$. Also ist $G \in [x]$. Ist umgekehrt $H \in [x]$, so gilt $x = \sigma(x) \in \sigma(H) \parallel H$ und $\sigma(H) = H$.

Nun nehmen wir an, dass σ keine Fixpunkte besitzt. Jede Fixgerade muss dann zu G parallel sein, da anderenfalls $G \wedge H$ ein Fixpunkt von σ wäre. Sei umgekehrt $H \in [G]$ und $y \in H$. Dann ist $y\sigma(y)$ eine Fixgerade und daher parallel zu G und zu H. Wegen $y \in y\sigma(y) \cap H$ ist $\sigma(y) \in y\sigma(y) = H$. Dies zeigt $\sigma(H) = H$. □

Bemerkung 2.10. Bilden die Fixgeraden einer Dilatation σ eine Richtung $[G]$, so nennt man $[G]$ auch die *Richtung* von σ.

Definition 2.11. Eine Dilatation σ heißt *Translation*, falls σ keine Fixpunkte hat oder falls $\sigma =$ id. Sei $\mathrm{Tra}(\mathcal{E})$ die Menge der Translationen von $\mathcal{E}$.

Lemma 2.12. *Jede Translation ist durch das Bild eines Punktes eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $\sigma \in \mathrm{Tra}(\mathcal{E})$ und $x \in \mathcal{P}$. Im Fall $\sigma(x) = x$ ist $\sigma = \mathrm{id}$. Anderenfalls ist $G := x\sigma(x)$ eine Fixgerade von σ. Nach Lemma 2.6 genügt es zu zeigen, dass das Bild eines weiteren Punktes $y \in \mathcal{P} \setminus G$ eindeutig bestimmt ist. Die Fixgerade $H := y\sigma(y)$ muss nach Satz 2.9 die Parallele von G durch y sein. Außerdem ist $K := \sigma(x)\sigma(y)$ die Parallele von xy durch $\sigma(x)$. Wegen $y \notin G$ gilt $H \parallel G \nparallel xy \parallel K$. Es folgt $\sigma(y) = H \wedge K$. □

Beispiel 2.13. Für jeden Körper K sind die Abbildungen $\Gamma_{1_2,x,\mathrm{id}}$ mit $x \in K^2$ Translationen. Nach Lemma 2.12 kann es keine weiteren Translationen geben.

Satz 2.14. *Für jede Translationsebene gilt* $\mathrm{Tra}(\mathcal{E}) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$.

Beweis. Seien $\sigma, \tau \in \mathrm{Tra}(\mathcal{E})$. Da σ und σ^{-1} die gleichen Fixpunkte haben, gilt $\sigma^{-1} \in \mathrm{Tra}(\mathcal{E})$. Besitzt $\sigma\tau$ einen Fixpunkt x, so ist $\tau(x) = \sigma^{-1}(x)$ und Lemma 2.12 zeigt $\tau = \sigma^{-1}$. Es folgt $\sigma\tau = \mathrm{id} \in \mathrm{Tra}(\mathcal{E})$. Anderenfalls hat $\sigma\tau \in \mathrm{Dil}(\mathcal{E})$ keine Fixpunkte und man erhält $\sigma\tau \in \mathrm{Tra}(\mathcal{E})$. Also ist $\mathrm{Tra}(\mathcal{E}) \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$. Für $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ und $\tau \in \mathrm{Tra}(\mathcal{E})$ gilt $\varphi\tau\varphi^{-1} \in \mathrm{Dil}(\mathcal{E})$ nach Satz 2.5. Hat τ keine Fixpunkte, so auch $\varphi\tau\varphi^{-1}$. Dies zeigt $\varphi\tau\varphi^{-1} \in \mathrm{Tra}(\mathcal{E})$. □

3 Translationsebenen

Definition 3.1. Eine affine Ebene $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ heißt *Translationsebene*, falls für alle $x, y \in \mathcal{P}$ (genau) eine Translation τ mit $\tau(x) = y$ existiert.

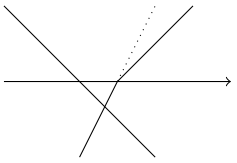
Beispiel 3.2.

(i) Für jeden Körper K ist $\mathcal{E}(K)$ nach Beispiel 2.13 eine Translationsebene.

(ii) Für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ betrachten wir folgende „Geraden“ in $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$:

$$G_{\alpha,\beta,\gamma} := \begin{cases} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha x + \beta y = \gamma\} & \text{falls } \alpha\beta \geq 0 \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha x + \beta y = \gamma, y \leq 0\} & \text{falls } \alpha\beta < 0\,. \\ \quad \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha x + 2\beta y = \gamma, y > 0\} & \end{cases}$$

(Die Geraden mit positiver Steigung sind an der x-Achse geknickt.)

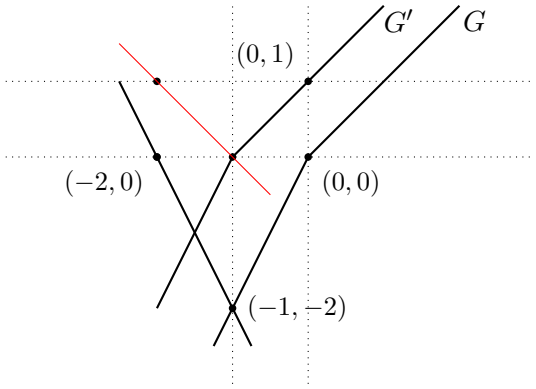


Sei $\mathcal{G}$ die Menge dieser Geraden. Wir behaupten, dass $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine affine Ebene ist. Jede Gerade besitzt unendlich viele Punkte. Seien $(x, y), (x', y') \in \mathcal{P}$ verschieden und o. B. d. A. $y \leq y'$. Dann hat

$$M := \begin{cases} \begin{pmatrix} x & y & -1 \\ x' & y' & -1 \end{pmatrix} & \text{falls } y' \leq 0 \\ \begin{pmatrix} x & y & -1 \\ x' & 2y' & -1 \end{pmatrix} & \text{falls } y \leq 0 < y' \\ \begin{pmatrix} x & 2y & -1 \\ x' & 2y' & -1 \end{pmatrix} & \text{falls } y > 0 \end{cases}$$

Rang 2. Somit besitzt das Gleichungssystem $(\alpha, \beta, \gamma)M^{\mathrm{t}} = 0$ genau eine nicht-triviale Lösung (α, β, γ) bis auf Skalierung. Also liegen (x, y) und (x', y') auf genau einer (geknickten) Geraden. Zwei (geknickte) Geraden mit unterschiedlicher Steigung haben stets einen Schnittpunkt. Daher gilt auch das Parallelenaxiom. Die Punkte $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ liegen in allgemeiner Lage. Also ist $\mathcal{E}$ eine affine Ebene, die man *Moulton-Ebene* nennt.

Angenommen es existiert eine Translation σ von $\mathcal{E}$ mit $\sigma(0, 0) = (0, 1)$. Die Fixgeraden von σ sind die Parallelen der y-Achse, d. h. $\sigma(x, y) = (x, *)$ für alle $(x, y) \in \mathcal{P}$. Außerdem ist $\sigma(x, 0) = (x, 1)$. Die geknickte Gerade G mit Parametern $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -1, 0)$ wird unter σ auf die Parallele G' mit Parametern $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -1, -1)$ abgebildet. Dies zeigt $\sigma(-1, -2) = (-1, 0)$. Nun sind aber die gewöhnlichen Geraden $(-2, 0)(-1, -2)$ und $\sigma(-2, 0)\sigma(-1, -2) = (-2, 1)(-1, 0)$ nicht parallel. Daher ist $\mathcal{E}$ *keine* Translationsebene.



Lemma 3.3. *Für jede Translationsebene $\mathcal{E}$ ist* $\mathrm{Tra}(\mathcal{E})$ *abelsch.*

Beweis. Seien $\sigma, \tau \in \mathrm{Tra}(\mathcal{E}) \setminus \{\mathrm{id}\}$ mit Richtungen $[G]$ und $[H]$. Dann ist sowohl G als auch H eine Fixgerade von $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$. Im Fall $[G] \neq [H]$ folgt $\sigma\tau = \tau\sigma$ aus Satz 2.9. Sei nun $[G] = [H]$, $x \in G$ und $y \in \mathcal{P} \setminus G$. Da $\mathcal{E}$ eine Translationsebene ist, existiert eine Translation ρ mit $\rho(x) = y$. Offenbar ist dann G keine Fixgerade von ρ. Aus dem ersten Teil folgt daher $\sigma\rho = \rho\sigma$ und $\tau\rho = \rho\tau$. Also ist G auch keine Fixgerade von $\tau\rho$. Wieder folgt

$$\sigma\tau = \sigma(\tau\rho)\rho^{-1} = \tau(\rho\sigma)\rho^{-1} = \tau\sigma\rho\rho^{-1} = \tau\sigma. \qquad \square$$

Definition 3.4. Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine Translationsebene und $\mathbf{o} \in \mathcal{P}$ ein beliebiger Punkt. Für $x \in \mathcal{P}$ sei $\tau_x \in \mathrm{Tra}(\mathcal{E})$ mit $\tau_x(\mathbf{o}) = x$. Wir definieren $x + y := (\tau_x\tau_y)(\mathbf{o})$. Nach Lemma 3.3 gilt $x + y = \tau_x(y) = \tau_y(x)$.

Beispiel 3.5. Die Wahl $\mathbf{o} = (0, 0)$ in der Koordinatenebene eines Schiefkörpers K liefert die Addition von Vektoren in K^2.

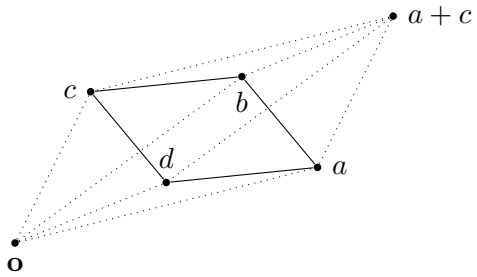
Lemma 3.6. *Für jede Translationsebene $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ ist $(\mathcal{P}, +)$ eine zu* $\mathrm{Tra}(\mathcal{E})$ *isomorphe Gruppe. Für $x \in \mathcal{P} \setminus \{\mathbf{o}\}$ ist $\mathbf{o}x$ eine Untergruppe von $(\mathcal{P}, +)$.*

Beweis. Die Abbildung $\tau\colon \mathcal{P} \to \mathrm{Tra}(\mathcal{E})$ ist nach Lemma 2.12 eine Bijektion. Wegen $\tau_{x+y}(\mathbf{o}) = x + y = (\tau_x\tau_y)(\mathbf{o})$ für $x, y \in \mathcal{P}$ ist $(\mathcal{P}, +)$ eine Gruppe und τ ein Isomorphismus von Gruppen. Für $x \neq \mathbf{o}$ ist $\mathbf{o}x$ eine Fixgerade von τ_x. Dies zeigt $x + y = \tau_x(y) \in \mathbf{o}x$ für $y \in \mathbf{o}x$. Also ist $\mathbf{o}x$ eine Untergruppe von $(\mathcal{P}, +)$. $\square$

Satz 3.7 (Parallelogrammsatz)**.** *Für paarweise verschiedene nicht-kollineare Punkte a, b, c, d einer Translationsebene sind äquivalent:*

(1) $a + c = b + d$.

(2) $ab \parallel cd$, $ad \parallel bc$.



Beweis. (1)⇒(2):

$$ab \parallel \tau_{-a}(a)\tau_{-a}(b) = \mathbf{o}(b-a) = \mathbf{o}(c-d) \parallel dc = cd,$$
$$ad \parallel \mathbf{o}(d-a) = \mathbf{o}(c-b) = bc.$$

(2)⇒(1): Sei $x \in \mathcal{P}$ mit $b - a + x = \tau_x(b-a) = c - d$. Dann gilt auch $\tau_x(d-a) = d - a + x = c - b$. Wegen

$$\mathbf{o}(b-a) \parallel ab \parallel dc \parallel \mathbf{o}(c-d),$$
$$\mathbf{o}(d-a) \parallel ad \parallel bc \parallel \mathbf{o}(c-b),$$

sind $\mathbf{o}(b-a) = \mathbf{o}(c-d)$ und $\mathbf{o}(d-a) = \mathbf{o}(c-b)$ Fixgeraden von τ_x. Im Fall $ab \parallel ad$ wären a, b, c, d kollinear. Also ist $\mathbf{o} = \mathbf{o}(b-a) \wedge \mathbf{o}(d-a)$ ein Fixpunkt von τ_x. Dies zeigt $\tau_x = \mathrm{id}$ und $x = \mathbf{o}$. □

Lemma 3.8. *Jeder Automorphismus φ einer Translationsebene $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ mit $\varphi(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$ ist auch ein Automorphismus von $\mathcal{P}$ bzgl. $+$.*

Beweis. Seien zunächst $\mathbf{o}, x, y \in \mathcal{P}$ in allgemeiner Lage. Wegen $\mathbf{o}x \parallel y(x+y)$ ist $\mathbf{o}\varphi(x) \parallel \varphi(y)\varphi(x+y)$ und analog $\mathbf{o}\varphi(y) \parallel \varphi(x)\varphi(x+y)$. Andererseits ist $\mathbf{o}\varphi(x) \parallel \varphi(y)(\varphi(x)+\varphi(y))$ und $\mathbf{o}\varphi(y) \parallel \varphi(x)(\varphi(x)+\varphi(y))$. Dies zeigt $\varphi(y)\varphi(x+y) = \varphi(y)(\varphi(x)+\varphi(y))$ und $\varphi(x)\varphi(x+y) = \varphi(x)(\varphi(x)+\varphi(y))$. Der eindeutige Schnittpunkt dieser Geraden ist $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

Seien nun $\mathbf{o}, x, y$ kollinear und $z \in \mathcal{P} \setminus xy$. Aus $x(x+y) \parallel \mathbf{o}y = \mathbf{o}x$ folgt $x(x+y) = \mathbf{o}x = \mathbf{o}y = \mathbf{o}(x+y)$. Daher sind $\mathbf{o}, x+y, z$ und $\mathbf{o}, x, y+z$ sowie $\mathbf{o}, y, z$ in allgemeiner Lage. Aus dem ersten Teil folgt

$$\varphi(x+y) + \varphi(z) = \varphi(x+y+z) = \varphi(x) + \varphi(y+z) = \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z)$$

und $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. □

Satz 3.9. *Für jeden Schiefkörper K gilt*

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{E}(K)) = \{\Gamma_{A,x,\alpha} : A \in \mathrm{GL}(2,K), x \in K^2, \alpha \in \mathrm{Aut}(K)\} =: \mathrm{A\Gamma L}(2,K).$$

Beweis. Nach Beispiel 2.3 ist $\mathrm{A\Gamma L}(2,K) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{E}(K))$. Sei umgekehrt $\Gamma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E}(K))$ gegeben. Nach Multiplikation mit $\Gamma_{1_2,-\Gamma(0),\mathrm{id}}$ können wir $\Gamma(0) = 0$ annehmen. Sei $e_1 := (1,0)$ und $e_2 := (0,1)$. Wegen $0e_1 \nparallel 0e_2$ ist $0\Gamma(e_1) \nparallel 0\Gamma(e_2)$. Insbesondere bilden $\Gamma(e_1)$ und $\Gamma(e_2)$ eine Basis von K^2. Sei $A \in \mathrm{GL}(2,K)$ mit $\Gamma(e_i)A = e_i$ für $i = 1,2$. Indem wir Γ durch $\Gamma_{A,0,\mathrm{id}}\Gamma$ ersetzen, können wir $\Gamma(e_i) = e_i$ für $i = 1,2$ annehmen. Dann ist $\Gamma(Ke_i) = Ke_i$. Sei $\alpha_i \colon K \to K$ mit $\Gamma(x,0) = (\alpha_1(x),0)$ und $\Gamma(0,y) = (0,\alpha_2(y))$ für alle $x,y \in K$. Nach Lemma 3.8 ist Γ ein Automorphismus auf $(K^2,+)$. Dies zeigt $\Gamma(1,1) = \Gamma(e_1)+\Gamma(e_2) = (1,1)$ und $\Gamma(K(1,1)) = K(1,1)$. Aus $(\alpha_1(x),\alpha_2(x)) = \Gamma(x,x) \in K(1,1)$ folgt $\alpha_1 = \alpha_2 =: \alpha$. Offenbar ist α ein Automorphismus von $(K,+)$. Für $x,y \in K$ ist

$$(\alpha(xy),\alpha(x)) = \Gamma(xy,x) = \Gamma(x(y,1)) \in K\Gamma(y,1) = K(\alpha(y),1)$$

und man erhält $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$. Somit ist $\alpha \in \mathrm{Aut}(K)$ und $\Gamma_{1_2,0,\alpha} \in \mathrm{A\Gamma L}(2,K)$. □

Bemerkung 3.10.

(i) Für $K \in \{\mathbb{F}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ ist $\mathrm{Aut}(K) = 1$ und $\mathrm{Aut}(\mathcal{E}(K)) = \mathrm{AGL}(2,K) \cong K^2 \rtimes \mathrm{GL}(2,K)$.

(ii) Nicht jeder Automorphismus von $(\mathcal{P},+)$ liegt in $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$. Für $K = \mathbb{F}_4$ ist beispielsweise

$$\begin{aligned}|\mathrm{Aut}(K^2,+)| = |\mathrm{Aut}(C_2^4)| &= |\,\mathrm{GL}(4,2)| = 15\cdot 14\cdot 12\cdot 8\\ &> 16\cdot 15\cdot 12\cdot 2 = |K^2||\,\mathrm{GL}(2,K)||\mathrm{Aut}(K)| = |\,\mathrm{A\Gamma L}(2,K)|.\end{aligned}$$

Definition 3.11. Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P},\mathcal{G})$ eine Translationsebene. Ein Endomorphismus φ von $(\mathcal{P},+)$ heißt *Multiplikator* von $\mathcal{E}$, falls $\varphi(x) \in \mathbf{o}x$ für alle $x \in \mathcal{P} \setminus \{\mathbf{o}\}$. Sei $K(\mathcal{E})$ die Menge der Multiplikatoren von $\mathcal{E}$.

Beispiel 3.12. Den *trivialen* Multiplikator $x \mapsto \mathbf{o}$ $(x \in \mathcal{P})$ bezeichnen wir mit $\mathbf{o}$. Die Identität auf $\mathcal{P}$ ist ebenfalls ein Multiplikator. In der Koordinatenebene $\mathcal{E}$ eines Körpers K ist $K(\mathcal{E}) = \{\Gamma_{\lambda,0,\mathrm{id}} : \lambda \in K\} \cong K$.

Lemma 3.13. *Für jede Translationsebene $\mathcal{E}$ besteht $K(\mathcal{E}) \setminus \{\mathbf{o}\}$ genau aus den Dilatationen φ mit $\varphi(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$.*

Beweis. Sei $\varphi \in \mathrm{Dil}(\mathcal{E})$ mit $\varphi(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$. Nach Lemma 3.8 ist φ ein Endomorphismus mit $\mathbf{o}x \parallel \mathbf{o}\varphi(x)$ für alle $x \in \mathcal{P}\setminus\{\mathbf{o}\}$. Dies zeigt $\varphi \in K(\mathcal{E})$. Sei nun umgekehrt $\varphi \in K(\mathcal{E}) \setminus \{\mathbf{o}\}$ und $x \in \mathcal{P}$ mit $\varphi(x) = \mathbf{o}$. Nehmen wir $x \neq \mathbf{o}$ an. Für $y \in \mathcal{P} \setminus \mathbf{o}x$ gilt $\varphi(y) = \varphi(y-x) \in \mathbf{o}y \cap \mathbf{o}(y-x) = \mathbf{o}$. Für $z \in \mathcal{P} \setminus \mathbf{o}y$ erhält man mit dem gleichen Argument $\varphi(z) = \mathbf{o}$. Dann wäre aber $\varphi = \mathbf{o}$. Dieser Widerspruch zeigt $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\mathbf{o}\}$, d. h. φ ist injektiv. Für $x,y \in \mathcal{P}$ gilt

$$\varphi(x)\varphi(y) \parallel \mathbf{o}(\varphi(y)-\varphi(x)) = \mathbf{o}\varphi(y-x) = \mathbf{o}(y-x) \parallel xy. \tag{3.1}$$

Es bleibt die Surjektivität von φ zu zeigen. Sei $x \in \mathcal{P} \setminus \{\mathbf{o}\}$ und $y \in \mathcal{P} \setminus \mathbf{o}x$. Sei $G := x\varphi(y)$ und sei H die Parallele von G durch y. Im Fall $G \parallel \mathbf{o}x$ wäre $G = \mathbf{o}x$ und $\varphi(y) \in \mathbf{o}x \cap \mathbf{o}y = \mathbf{o}$. Also existiert $z := H \cap \mathbf{o}x$. Wegen $y \notin \mathbf{o}x$ ist $z \neq y$ und $H = yz$. Nach (3.1) ist $G = \varphi(y)\varphi(z)$. Aus $z \in \mathbf{o}x$ folgt schließlich $\varphi(z) = \mathbf{o}x \wedge G = x$. □

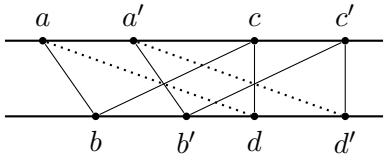
Satz 3.14. *Für jede Translationsebene ist $K(\mathcal{E})$ ein Schiefkörper.*

Beweis. Da $(\mathcal{P},+)$ abelsch ist, ist $\mathrm{End}(\mathcal{P})$ ein Ring. Nach Definition und Lemma 3.13 ist $K(\mathcal{E})$ unter Addition und Multiplikation abgeschlossen. Die von $\mathbf{o}$ verschiedenen Multiplikatoren sind Dilatationen und daher invertierbar. Die Behauptung folgt. □

Bemerkung 3.15. Man beachte, dass die Zeichnungen in den folgenden Sätzen immer nur einen Spezialfall darstellen und nicht als Beweis dienen können.

Satz 3.16 (Kleiner Scherensatz)**.** *Seien G und H verschiedene Parallelen einer Translationsebene $\mathcal{E}$. Für $a, a', c, c' \in G$ und $b, b', d, d' \in H$ gilt*

$$ab \parallel a'b',\ bc \parallel b'c',\ cd \parallel c'd' \Longrightarrow ad \parallel a'd'.$$



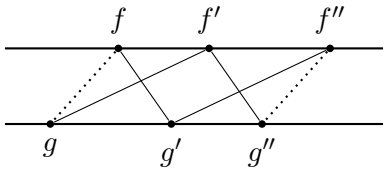
Beweis. Im Fall $a = a'$ ist $b = ab \wedge H = a'b' \wedge H = b'$ und analog $c = c'$, $d = d'$. Wir können also $a \neq a'$, $b \neq b'$ und $c \neq c'$ annehmen. Aus dem Parallelogrammsatz folgt

$$(a + b') + c' + d' = a' + (b + c') + d' = a' + b' + (c + d') = a' + b' + c' + d,$$

also $a + d' = a' + d$ und $ad \parallel a'd'$. □

Satz 3.17 (Kleiner Satz von Pappus)**.** *Seien F und G verschiedene parallele Geraden einer Translationsebene $\mathcal{E}$. Für $f, f', f'' \in F$ und $g, g', g'' \in G$ gilt*

$$fg' \parallel f'g'',\ f'g \parallel f''g' \Longrightarrow fg \parallel f''g''.$$



Beweis. Im Fall $f = f'$ ist $g' = fg' \wedge G = f'g'' \wedge G = g''$ und $fg = f'g \parallel f''g' = f''g''$. Sei also $f \neq f'$ und analog $f' \neq f''$. Aus dem Parallelogrammsatz folgt $f + g'' = f' + g' = g + f''$ und $fg \parallel f''g''$. □

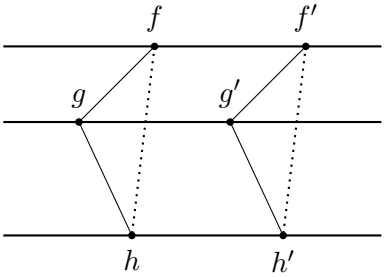
Bemerkung 3.18. Der folgende Satz gibt eine rein geometrische Charakterisierung von Translationsebenen.

Satz 3.19 (Kleiner Satz von Desargues)**.** *Für jede affine Ebene $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ sind äquivalent:*

(1) $\mathcal{E}$ ist eine Translationsebene.

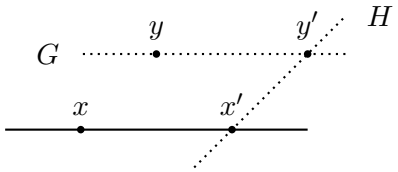
(2) Für paarweise verschiedene parallele Geraden $F, G, H \in \mathcal{G}$, $f, f' \in F$, $g, g' \in G$ und $h, h' \in H$ gilt

$$fg \parallel f'g',\ gh \parallel g'h' \implies fh \parallel f'h'.$$



Beweis. (1)⇒(2): Im Fall $f = f'$ ist $g = fg \wedge G = f'g' \wedge G = g'$ und analog $h = h'$. Wir können also $f \neq f'$ und $g \neq g'$ annehmen. Dann sind f, f', g, g' nicht kollinear. Aus dem Parallelogrammsatz folgt $(f + g') + h' = f' + g + h' = f' + g' + h$, $f + h' = f' + h$ und $fh \parallel f'h'$.

(2)⇒(1): Hat $\mathcal{E}$ Ordnung 2, so ist $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{F}_2)$ nach Beispiel 2.3 und die Behauptung folgt aus Beispiel 3.2. Wir können also $\operatorname{ord}\mathcal{E} \geq 3$ annehmen. Seien $x, x' \in \mathcal{P}$. Wir suchen $\tau \in \operatorname{Tra}(\mathcal{E})$ mit $\tau(x) = x'$. Dafür können wir $x \neq x'$ annehmen. Sei $y \in \mathcal{P} \setminus xx'$ und sei G die Parallele von xx' durch y. Sei H die Parallele von xy durch x'. Wegen $xx' \nparallel xy$ existiert $y' := G \wedge H$. Wegen $G \cap xx' = \varnothing$ ist $y' \notin xx'$. Wir definieren $\sigma_{x,x'} \colon \mathcal{P} \setminus xx' \to \mathcal{P} \setminus xx'$, $y \mapsto y'$. Wegen $H \cap xy = \varnothing$ ist $y' \neq y$ und es folgt $yy' = G \parallel xx'$ sowie $x'y' = H \parallel xy$. Daher existiert auch die Abbildung $\sigma_{y,y'}$ mit $\sigma_{y,y'}(x) = x'$.



Wegen $\operatorname{ord}\mathcal{E} \geq 3$ existiert $z \in \mathcal{P} \setminus (xx' \cup yy')$. Für $z' := \sigma_{x,x'}(z)$ gilt $xx' \parallel zz'$ und $xz \parallel x'z'$. Aus (2) folgt $yz \parallel y'z'$. Also ist auch $\sigma_{y,y'}(z) = z'$, d. h. $\sigma_{x,x'}$ und $\sigma_{y,y'}$ stimmen außerhalb von $xx' \cup yy'$ überein. Aus Symmetriegründen stimmen $\sigma_{y,y'}$ und $\sigma_{z,z'}$ außerhalb von $yy' \cup zz'$ überein. Daher hängt die Abbildung

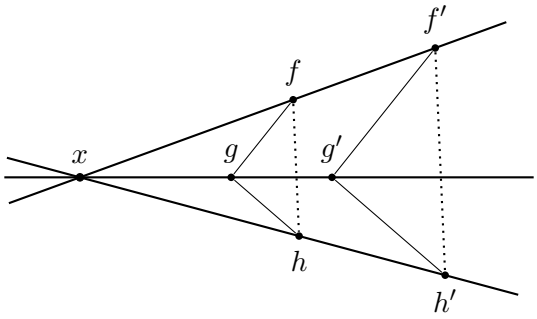
$$\tau \colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}, \qquad u \mapsto \begin{cases} \sigma_{x,x'}(u) & \text{if } u \notin xx', \\ \sigma_{y,y'}(u) & \text{if } u \in xx'. \end{cases}$$

nicht von der Wahl von y ab. Wegen $\tau(x) = x'$ verbleibt zu zeigen, dass τ eine Translation ist. Seien $u, v \in \mathcal{P}$ verschieden. Eine der (disjunkten) Parallelen xx', yy' oder zz' enthält weder u noch v. O. B. d. A. sei $xx' \cap \{u, v\} = \varnothing$. Im Fall $uv \parallel xx'$ ist $u\tau(u) = uu' \parallel xx' \parallel vv' = v\tau(v)$ und $uv = u\tau(u) = v\tau(v) = \tau(u)\tau(v)$. Sei nun $uv \nparallel xx'$. Dann kann man $y = u$ und $z = v$ in der Definition von τ wählen. Es folgt $\tau(u)\tau(v) = y'z' \parallel yz = uv$. Somit ist τ eine Dilatation. Nach Konstruktion besitzt τ keine Fixpunkte, d. h. τ ist eine Translation. □

4 Desargues-Ebenen

Definition 4.1. Eine affine Ebene $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ heißt *Desargues-Ebene*, falls folgende Eigenschaft gilt: Seien $F, G, H \in \mathcal{G}$ mit $x := F \wedge G = F \wedge H = G \wedge H$. Für $f, f' \in F \setminus \{x\}$, $g, g' \in G \setminus \{x\}$ und $h, h' \in H \setminus \{x\}$ gilt

$$fg \parallel f'g',\ gh \parallel g'h' \implies fh \parallel f'h'.$$

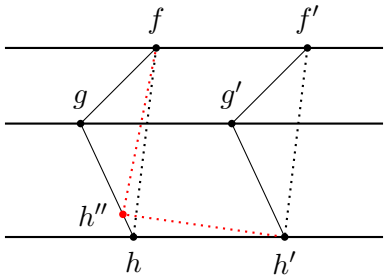


Satz 4.2 (Umkehrung der Desargues-Eigenschaft)**.** *Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine Desargues-Ebene und $f, g, h \in \mathcal{P}$ in allgemeiner Lage. Seien $f', g', h' \in \mathcal{P}$ mit $fg \parallel f'g'$, $gh \parallel g'h'$, $fh \parallel f'h'$. Dann sind die Geraden ff', gg', hh' entweder parallel oder sie schneiden sich in einem Punkt.*

Beweis. Sei o. B. d. A. $x := ff' \wedge gg'$ und $ff' \neq hh' \neq gg'$. Wegen $fh \parallel f'h'$ ist dann $h' \neq x$. Im Fall $fh \parallel xh'$ wäre $xh' = f'h'$ und $f' = f'h' \wedge ff' = x \in gg'$. Sei also $h'' := fh \wedge xh'$. Im Fall $h'' = f$ wäre $f \in xh' \wedge ff' = x$. Wegen $fh = fh''$ können wir die Desargues-Eigenschaft auf f, g, h'' und f', g', h' anwenden. Es folgt $gh'' \parallel g'h' \parallel gh$, also $h'' \in gh \cap fh = h$. Dies zeigt $x \in h'h'' = hh'$. □

Satz 4.3. *Jede Desargues-Ebene ist eine Translationsebene.*

Beweis. Wir benutzen den kleinen Satz von Desargues auf die Desargues-Ebene $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$. Seien $F, G, H \in \mathcal{G}$ paarweise verschiedene parallele Geraden und $f, f' \in F$, $g, g' \in G$, $h, h' \in H$ mit $fg \parallel f'g'$, $gh \parallel g'h'$. Im Fall $f'h' \parallel gh \parallel g'h'$ ist $fg \parallel f'g' = g'h' \parallel gh$ und $fh = gh \parallel g'h' = f'h'$. Sei also $f'h' \nparallel gh$. Die Parallele von $f'h'$ durch f schneidet dann gh in einem Punkt h''. Es gilt $h'' \neq h'$, denn anderenfalls wäre $h' \in F \cap H = \varnothing$. Wegen $f'h' \parallel fh''$ und $gh'' = gh \parallel g'h'$ können wir Satz 4.2 auf die Punkte f, g, h'' und f', g', h' anwenden. Aus $F \parallel G$ folgt $h'h'' \parallel F \parallel H$. Dies zeigt $h'' = H \wedge gh = h$ und $fh = fh'' \parallel f'h'$.

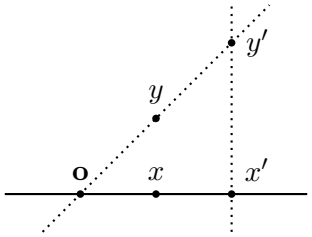


□

Lemma 4.4. *Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine Desargues-Ebene und $x \in \mathcal{P} \setminus \{\mathbf{o}\}$. Für alle $x' \in \mathbf{o}x$ existiert dann ein Multiplikator α mit $\alpha(x) = x'$.*

Beweis. Der Beweis ist ähnlich zum kleinen Satz von Desargues. Hat $\mathcal{E}$ Ordnung 2, so ist $x' = x$ und wir können $\alpha = \mathrm{id}$ wählen. Sei also $\operatorname{ord} \mathcal{E} \geq 3$. Sei $y \in \mathcal{P} \setminus \{\mathbf{o}x\}$ und $G \in \mathcal{G}$ die Parallele von xy durch

x'. Dann existiert $y' := \mathbf{o}y \wedge G$ und wir definieren $\alpha_{x,x'} \colon \mathcal{P} \setminus \mathbf{o}x \to \mathcal{P} \setminus \mathbf{o}x$, $y \mapsto y'$. Für ein festes $y \in \mathcal{P} \setminus \mathbf{o}x$ existiert $\alpha_{y,y'} \colon \mathcal{P} \setminus \mathbf{o}y \to \mathcal{P} \setminus \mathbf{o}y$ mit $\alpha_{y,y'}(x) = x'$.



Wegen $\operatorname{ord}\mathcal{E} \geq 3$ existiert $z \in \mathcal{P} \setminus (\mathbf{o}x \cup \mathbf{o}y)$. Für $z' := \alpha_{x,x'}(z)$ gilt $xz \parallel x'z'$. Die Desargues-Eigenschaft zeigt $yz \parallel y'z'$ und $\alpha_{y,y'}(z) = z'$. Daher stimmen $\alpha_{x,x'}$ und $\alpha_{y,y'}$ außerhalb von $\mathbf{o}x \cup \mathbf{o}y$ überein. Aus Symmetriegründen stimmen $\alpha_{y,y'}$ und $\alpha_{z,z'}$ außerhalb von $\mathbf{o}y \cup \mathbf{o}z$ überein. Daher hängt

$$\alpha \colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}, u \mapsto \begin{cases} \alpha_{x,x'}(u) & \text{falls } u \notin \mathbf{o}x, \\ \alpha_{y,y'}(u) & \text{falls } u \in \mathbf{o}x \setminus \{\mathbf{o}\}, \\ \mathbf{o} & \text{falls } u = \mathbf{o} \end{cases}$$

nicht von der Wahl von y ab. Wegen $\alpha(x) = x'$ und $\alpha(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$ genügt es zu zeigen, dass α eine Dilatation ist. Seien $u, v \in \mathcal{P}$ verschieden. Im Fall $\mathbf{o} \in uv$ gilt $\alpha(uv) = uv$. Anderenfalls sei o. B. d. A. $u, v \notin \mathbf{o}y$. Wie oben gilt $yu \parallel y'u'$, $yv \parallel y'v'$ und es folgt $uv \parallel u'v' = \alpha(uv)$. □

Lemma 4.5. *Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine Desargues-Ebene mit verschiedenen Punkten $x, y \in \mathcal{P}$. Dann gilt $xy = \{x + \alpha(y - x) : \alpha \in K(\mathcal{E})\}$.*

Beweis. Für die Translation τ_x gilt

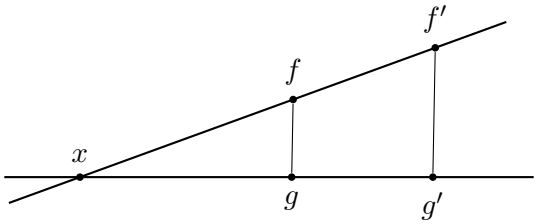
$$xy = \tau(\mathbf{o}(y - x)) \overset{4.4}{=} \tau(\{\alpha(y - x) : \alpha \in K(\mathcal{E})\}) = \{x + \alpha(y - x) : \alpha \in K(\mathcal{E})\}.$$ □

Satz 4.6 (Strahlensatz)**.** *Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine Desargues-Ebene und $F, G \in \mathcal{G}$ mit $x = F \wedge G$. Seien $f, f' \in F \setminus \{x\}$ und $g, g' \in G \setminus \{x\}$ paarweise verschieden. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $fg \parallel f'g'$.

(2) Es existiert $\gamma \in K(\mathcal{E})$ mit $f' - x = \gamma(f - x)$ und $g' - x = \gamma(g - x)$.

(3) Es existiert $\gamma \in K(\mathcal{E})$ mit $\gamma(g - f) = g' - f'$.



Beweis. Nach Translation können wir $x = \mathbf{o}$ annehmen. Nach Lemma 4.4 existieren $\alpha, \beta \in K(\mathcal{E})$ mit $\alpha(f) = f'$ und $\beta(g) = g'$. Gilt $fg \parallel f'g'$, so ist $f'\alpha(g) = \alpha(f)\alpha(g) \parallel fg \parallel f'g' = f'\beta(g)$ und $\alpha(g) = f'\alpha(g) \wedge \mathbf{o}g = f'\beta(g) \wedge \mathbf{o}g = \beta(g)$. Aus Lemma 2.6 folgt $\alpha = \beta =: \gamma$.

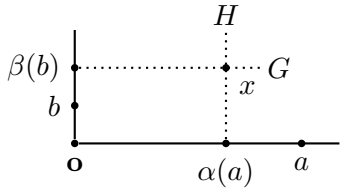
Sei nun $f' = \gamma(f)$ und $g' = \gamma(g)$ für ein $\gamma \in K(\mathcal{E})$. Dann ist $\gamma(g - f) = g' - f'$. Schließlich sei $\gamma(g - f) = g' - f'$. Nach Lemma 4.5 gilt dann

$$f'g' = \{f' + \delta(g' - f') : \alpha \in K(\mathcal{E})\} = \{f' + \delta(g - f) : \delta \in K(\mathcal{E})\} = \tau_{f'-f}(fg) \parallel fg. \qquad \square$$

Lemma 4.7. *Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine Desargues-Ebene. Seien $\mathbf{o}, a, b \in \mathcal{P}$ in allgemeiner Lage. Für jedes $x \in \mathcal{P}$ existieren eindeutig bestimmte Multiplikatoren α, β mit $x = \alpha(a) + \beta(b)$.*

Beweis. Für die Existenz von α und β können wir $x \notin \mathbf{o}a \cup \mathbf{o}b$ annehmen. Sei G bzw. H die Parallele von $\mathbf{o}a$ bzw. $\mathbf{o}b$ durch x. Dann existieren $\alpha, \beta \in K(\mathcal{E})$ mit $\alpha(a) = G \wedge \mathbf{o}b$ und $\beta(b) = H \wedge \mathbf{o}a$. Die Translation $\tau_{\alpha(a)}$ bildet $\mathbf{o}b = \mathbf{o}\beta(b)$ auf die Parallele $\alpha(a)(\alpha(a) + \beta(b)) = G$ ab. Analog bildet $\tau_{\beta(b)}$ die Gerade $\mathbf{o}a = \mathbf{o}\alpha(a)$ auf $\beta(b)(\beta(b) + \alpha(a)) = H$ ab. Daher ist

$$\alpha(a) + \beta(b) = G \wedge H = x.$$



Seien nun auch $\alpha', \beta' \in K(\mathcal{E})$ mit $x = \alpha'(a) + \beta'(b)$. Dann ist $(\alpha - \alpha')(a) + (\beta - \beta')(b) = \mathbf{o}$. Wir können daher $x = \mathbf{o}$ annehmen und müssen $\alpha = \beta = \mathbf{o}$ zeigen. Nach Satz 3.14 genügt es $\alpha(a) = 0$ zu zeigen. Im Fall $\alpha(a) \neq 0$ wäre $\mathbf{o}a = \mathbf{o}\alpha(a) = \mathbf{o}(-\beta(b)) = \mathbf{o}b$ im Widerspruch zur Wahl von a und b. $\square$

Satz 4.8 (Desargues)**.** *Eine Translationsebene $\mathcal{E}$ ist genau dann eine Desargues-Ebene, wenn sie zur Koordinatenebene des Schiefkörpers $K(\mathcal{E})$ isomorph ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine Desargues-Ebene und $K := K(\mathcal{E})$. Seien $\mathbf{o}, a, b \in \mathcal{P}$ in allgemeiner Lage. Nach Lemma 4.7 existiert eine Bijektion

$$\Gamma \colon \mathcal{P} \to K^2, \qquad x \mapsto (\alpha_x, \beta_x)$$

mit $x = \alpha_x(a) + \beta_x(b)$. Offenbar ist Γ ein Homomorphismus bzgl. $+$. Sei xy eine beliebige Gerade in $\mathcal{E}$. Nach Lemma 4.5 gilt

$$\Gamma(xy) = \Gamma(x + K(y - x)) = \Gamma(x) + \Gamma(K(y - x)) = \Gamma(x) + K\Gamma(y - x).$$

Dies zeigt, dass Γ ein Isomorphismus affiner Ebenen ist.

Sei umgekehrt $\mathcal{E} = \mathcal{E}(K)$ mit $K = K(\mathcal{E})$. In der Desargues-Eigenschaft dürfen wir $x = (0, 0)$ nach Translation annehmen. Dann existieren $\alpha, \beta, \gamma \in K$ mit $f' = \alpha(f)$, $g' = \beta(g)$ und $h' = \gamma(h)$. Wegen $fg \parallel f'g'$ sind $f' - g' = \alpha(f) - \beta(g)$ und $f - g$ linear abhängig. Dies liefert $\alpha = \beta$. Analog ist $\beta = \gamma$. Daher sind auch $f' - h'$ und $f - h$ linear abhängig, d. h. $fh \parallel f'h'$. Folglich ist $\mathcal{E}$ eine Desargues-Ebene. $\square$

Folgerung 4.9. *Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine Desargues-Ebene und $f, f', g, g', h, h' \in \mathcal{P}$. Sind f, g, h und f', g', h' jeweils in allgemeiner Lage, so existiert ein $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ mit $\alpha(f) = f'$, $\alpha(g) = g'$ und $\alpha(h) = h'$.*

Beweis. O. B. d. A. sei $\mathcal{E} = \mathcal{E}(K)$ mit $K := K(\mathcal{E})$. Nach Translation gilt $f = f' = (0,0)$. Da g, h sowie g', h' linear unabhängig sind, existiert ein $A \in \mathrm{GL}(2,K)$ mit $Ag = g'$ und $Ah = h'$. Die Behauptung folgt nun aus Satz 3.9. □

Satz 4.10. *Desargues-Ebenen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ sind genau dann isomorph, falls die Schiefkörper $K := K(\mathcal{E})$ und $K' := K(\mathcal{E}')$ isomorph sind.*

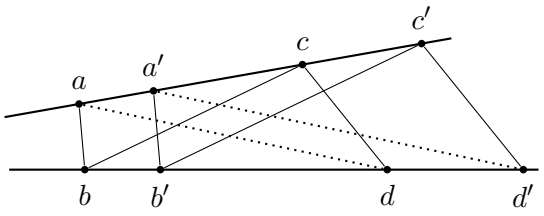
Beweis. Nach dem Satz von Desargues können wir $\mathcal{E} = \mathcal{E}(K)$ und $\mathcal{E}' = \mathcal{E}(K')$ annehmen. Ist $\varphi\colon K \to K'$ ein Isomorphismus, so ist $K^2 \to (K')^2$, $(x,y) \mapsto (\varphi(x), \varphi(y))$ ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$, denn

$$\varphi(a + Kv) = \varphi(a) + \varphi(K)\varphi(v) = \varphi(a) + K\varphi(v)$$

für $a, v \in K^2$. Sei umgekehrt $\varphi\colon K^2 \to (K')^2$ ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$. Nach Satz 3.9 können wir $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(e_i) = e_i$ für $i = 1, 2$ annehmen. Wie im Beweis von Satz 3.9 existiert ein Ringisomorphismus $\alpha\colon K \to K'$ mit $\varphi(x,y) = (\alpha(x), \alpha(y))$ für alle $x, y \in K$. Insbesondere sind K und K' isomorph. □

Satz 4.11 (Scherensatz)**.** *Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine Desargues-Ebene. Für paarweise verschiedene Punkte $a, a', c, c' \in G \in \mathcal{G}$ und $b, b', d, d' \in H \in \mathcal{G}$ gilt*

$$ab \parallel a'b',\ bc \parallel b'c',\ cd \parallel c'd' \implies ad \parallel a'd'.$$



Beweis. Nach dem kleinen Scherensatz dürfen wir $G \wedge H = \mathbf{o}$ annehmen. Im Fall $a = \mathbf{o}$ wäre $H = ab \parallel a'b'$ und $G = aa' = H$. Daher ist $a \neq \mathbf{o}$ und es existiert ein $\alpha \in K(\mathcal{E})$ mit $a' = \alpha(a)$. Aus dem Strahlensatz folgt $b' = \alpha(b)$, $c' = \alpha(c)$, $d' = \alpha(d)$ und $ad \parallel a'd'$. □

Bemerkung 4.12. Um Translationsebenen zu konstruieren, die keine Desargues-Ebenen sind, schwächen wir den Begriff des Schiefkörpers ab.

Definition 4.13. Eine Menge Q mit binären Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißt *Quasikörper*, falls gilt:

(Q1) $(Q, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0.

(Q2) Für alle $x \in Q$ gilt $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.

(Q3) Es existiert $1 \in Q \setminus \{0\}$ mit $1 \cdot x = x = x \cdot 1$ für alle $x \in Q$.

(Q4) Für $a, b \in Q \setminus \{0\}$ ist $a \cdot b \neq 0$ und es existieren eindeutig bestimmte $x, y \in Q \setminus \{0\}$ mit $a \cdot x = b = y \cdot a$.

(Q5) Für alle $x, y, z \in Q$ gilt $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

(Q6) Für alle $a, b, c \in Q$ mit $a \neq b$ existiert genau ein $x \in Q$ mit $a \cdot x = (b \cdot x) + c$.

Bemerkung 4.14. Wie üblich benutzen wir die Kurzschreibweise $xy-z := (x\cdot y)+(-z)$ für Elemente eines Quasikörpers. Da in (Q5) nur das Linksdistributivgesetz gefordert wird ((Q6) ist ein Ersatz für das Rechtsdistributivgesetz), müsste man genauer von Links-Quasikörper reden. Offenbar ist jeder Schiefkörper ein Quasikörper.

Satz 4.15 (Hall)**.** *Sei Q ein Quasikörper. Für $x, a, b \in Q$ sei $G_x := \{x\} \times Q$ und $G_{a,b} := \{(x, y) \in Q^2 : ax + b = y\}$. Dann ist*

$$\mathcal{E} = \big(Q^2, \{G_x, G_{a,b} : x, a, b \in Q\}\big)$$

eine Translationsebene.

Beweis. Wegen $0, 1 \in Q$ besitzt jede Gerade mindestens zwei Punkte. Seien $(x, y), (x', y') \in Q^2$ verschieden. Im Fall $x = x'$ liegen, die Punkte nur auf der „senkrechten“ Geraden G_x, denn anderenfalls wäre $y = ax+b = ax'+b = y'$. Im Fall $x \neq x'$ existiert genau ein $a \in Q$ mit $ax-ax' = a(x-x') = y-y'$ (für $y = y'$ ist $a = 0$). Für $b := y - ax$ gilt dann $ax + b = y$ und $ax' + b = ax + y' - y + b = y'$. Umgekehrt sind a und b durch diese Gleichungen eindeutig bestimmt. Also liegen die Punkte nur auf $G_{a,b}$. Sei $(x, y) \in Q^2$ und eine Gerade G gegeben. Im Fall $G = G_{x'}$ liegt (x, y) nur auf der Parallelen G_x von G. Sei also $G = G_{a,b}$ und $b' := y-ax \in Q$. Dann gilt $ax+b' = y$, d. h. (x, y) liegt auf $G_{a,b'} \parallel G$. Für $a' \neq a$ und $c \in Q$ gilt $G_{a,b} \cap G_{a',c} \neq \varnothing$ nach (Q6). Daher ist $G_{a,b'}$ die einzige Parallele von G, die (x, y) enthält. Dies zeigt das Parallelenaxiom. Schließlich sind die Punkte $(0, 1)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$ in allgemeiner Lage. Somit ist $\mathcal{E}$ eine affine Ebene.

Sei $(s, t) \in Q^2$ beliebig. Zum Nachweis der Translationsebene genügt es eine Translation φ mit $\varphi(0, 0) = (s, t)$ zu konstruieren. Für $(x, y) \in Q^2$ sei $\varphi(x, y) := (x + s, y + t)$. Da $(Q, +)$ eine abelsche Gruppe ist, ist $\varphi\colon Q^2 \to Q^2$ eine Bijektion mit $\varphi(0, 0) = (s, t)$. Außerdem besitzt φ nur dann Fixpunkte, wenn $\varphi = \mathrm{id}$. Offenbar gilt $\varphi(G_x) = G_{x+s} \parallel G_x$. Für $(x, y) \in G_{a,b}$ und $b' := b - as + t$ gilt $a(x + s) + b' = ax + as + b - as + t = y + t$. Da b' nicht von (x, y) abhängt, folgt $\varphi(G_{a,b}) = G_{a,b'}$. Also ist φ eine Translation und $\mathcal{E}$ eine Translationsebene. □

Bemerkung 4.16. Für eine Galois-Erweiterung $K \subseteq L$ mit $G := \mathrm{Gal}(L|K)$ sei $N\colon L \to L$, $x \mapsto \prod_{g\in G} g(x)$ die Normabbildung. Für $x, y \in L$ und $g \in G$ gilt offenbar $N(xy) = N(x)N(y)$ und $N(g(x)) = N(x)$.

Satz 4.17 (André)**.** *Sei $K \subseteq L$ eine Galois-Erweiterung und $G := \mathrm{Gal}(L|K)$ und $\varphi\colon L \to G$ eine beliebige Abbildung mit $\varphi(0) = \varphi(1) = 1$. Mit der Multiplikation*

$$x * y := x\varphi(N(x))(y) \qquad (x, y \in L)$$

wird $(L, +, *)$ zu einem Quasikörper.

Beweis. Die Axiome (Q1)–(Q3) gelten nach Definition. Für $x, y, z \in Q$ gilt

$$x * (y + z) = x\varphi(N(x))(y + z) = x\varphi(N(x))(y) + x\varphi(N(x))(z) = x * y + x * z,$$

also (Q5).

Seien $a, b, c \in Q$ mit $a \neq b$. Im Fall $\sigma := \varphi(N(a)) = \varphi(N(b))$ ist $a * x = b * x + c$ äquivalent zu $(a - b)\sigma(x) = c$. Dann gilt (Q6). Sei daher $\tau := \varphi(N(b)) \neq \sigma$ und somit $N(a) \neq N(b)$. O. B. d. A. sei $a \neq 0$. Nach Multiplikation mit a^{-1} in L erhalten wir $\sigma(x)-b\tau(x) = c$ mit $N(b) \neq 1$. Schließlich können

wir $\tau = 1$ annehmen. Es genügt zu zeigen, dass die K-lineare Abbildung $f\colon L \to L$, $x \mapsto \sigma(x) - bx$ invertierbar ist. Sei indirekt $x \in L$ ein Eigenvektor von σ zum Eigenwert b. Sei $n := |\langle\sigma\rangle|$. Dann gilt

$$x = \sigma^n(x) = \sigma^{n-1}(bx) = \sigma^{n-2}(\sigma(b)bx) = \ldots = x\prod_{i=1}^{n}\sigma^i(b).$$

Ist $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \in G$ ein Repräsentantensystem für die Nebenklassen von $\langle\sigma\rangle$ in G, so ergibt sich der Widerspruch

$$N(b) = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{n}\gamma_i\sigma^j(b) = \prod_{i=1}^{r}\gamma_i(1) = 1.$$

Also gilt (Q6).

Es verbleibt (Q4) zu zeigen. Für $a, b \in Q \setminus \{0\}$ ist sicher $a * b \neq 0$. Außerdem existiert genau ein $x \in Q$ mit $a * x = a\varphi(N(a))(x) = b$. Wir setzen $y := b\varphi(N(a^{-1}b))(a)^{-1}$, wobei $^{-1}$ das Inverse in $(L, \cdot)$ bezeichnet. Wegen $N(y) = N(a^{-1}b)$ (Bemerkung 4.16) gilt

$$y * a = b\varphi(N(y))(a)^{-1}\varphi(N(y))(a) = b.$$

Sei nun $y * a = b = z * a$. Mit Bemerkung 4.16 folgt

$$N(y)N(a) = N(y\varphi(N(y))(a)) = N(y * a) = N(z)N(a)$$

und $N(y) = N(z)$. Daraus erhält man $y = (y * a)\varphi(N(y))(a)^{-1} = (z * a)\varphi(N(z))(a)^{-1} = z$. Also gilt (Q4). □

Satz 4.18. *Es existiert eine Translationsebene der Ordnung* 9*, die keine Desargues-Ebene ist.*

Beweis. Wir betrachten die Galois-Erweiterung $\mathbb{F}_3 \subseteq \mathbb{F}_9$ mit $G := \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_9|\mathbb{F}_3) = \langle\sigma\rangle \cong C_2$ (es gilt $\sigma(x) = x^3$ für $x \in \mathbb{F}_9$). Für $a \in \mathbb{F}_9$ gilt $N(a) = a\sigma(a) = a^4$ und $N(\mathbb{F}_9) = \mathbb{F}_3$. Wir definieren $\varphi(-1) := \sigma$ in Satz 4.17 und erhalten den Quasikörper Q. Für $\mathbb{F}_9^\times = \langle\zeta\rangle$ gilt

$$\zeta^i * \zeta^j = \begin{cases} \zeta^{i+j} & \text{falls } i \equiv 0 \pmod 2, \\ \zeta^{i+3j} & \text{falls } i \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Aus Satz 4.15 erhält man eine Translationsebene $\mathcal{E}$ mit Punkten Q^2. In Definition 3.4 wählen wir $\mathbf{o} = (0, 0)$, sodass die Addition in $\mathcal{E}$ mit der komponentenweisen Addition in Q^2 übereinstimmt. Sei $\gamma \in K(\mathcal{E}) \subseteq \mathrm{End}(Q^2)$. Wegen $\gamma(1, 0) \in G_{0,0}$ existiert $s \in Q$ mit $\gamma(1, 0) = (s, 0)$. Wegen $\gamma(0, x) \in G_0$ und $(s, 0) + \gamma(0, x) = \gamma(1, x) \in G_{x,0}$ ist $\gamma(1, x) = (s, x * s)$ und $\gamma(0, x) = (0, x * s)$ für alle $x \in Q$. Aus $\gamma(x, 0) + (0, x * s) = \gamma(x, x) \in G_{1,0}$ folgt $\gamma(x, 0) = (x * s, 0)$ für alle $x \in Q$. Also ist γ durch s eindeutig bestimmt. Wegen $\gamma \in \mathrm{End}(Q^2)$ gilt $(x + y) * s = x * s + y * s$ für $x, y \in Q$. Aus $\zeta + \zeta^3 \in \mathbb{F}_3$ folgt $(\zeta + \zeta^3)s = \zeta\sigma(s) + \zeta^3\sigma(s)$ und $\sigma(s) = s \in \mathbb{F}_3$. Dies zeigt $|K(\mathcal{E})| \leq 3$ und $\mathcal{E}$ kann nach Satz 4.8 keine Desargues-Ebene sein. □

Bemerkung 4.19. Die in Satz 4.18 konstruiere Ebene heißt *Hall-Ebene*. Neben $\mathcal{E}(\mathbb{F}_9)$ gibt es bis auf Isomorphie noch zwei weitere affine Ebenen der Ordnung 9, die aber keine Translationsebenen sind (ohne Beweis).

Beispiel 4.20. Sei $\mathbb{H} := \mathbb{C} + \mathbb{C}j$ der Hamiltonsche Schiefkörper mit $j^2 = -1$ und $ij = -ji$. Für $z := x + yj \in \mathbb{H}$ sei $z^* := \overline{x} - yj$. Es gilt

$$zz^* = x\overline{x} + y\overline{y} = z^*z \in \mathbb{R}.$$

Für $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ ist $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$ und

$$\begin{aligned}(z_1z_2)^* &= (x_1x_2 - y_1\overline{y_2} + (x_1y_2 + y_1\overline{x_2})j)^* = \overline{x_1x_2} - \overline{y_1}y_2 - (x_1y_2 + y_1\overline{x_2})j \\ &= (\overline{x_2} - y_2j)(\overline{x_1} - y_1j) = z_2^*z_1^*.\end{aligned}$$

Wir betrachten $\mathbb{O} := \mathbb{H}^2$ mit der Multiplikation

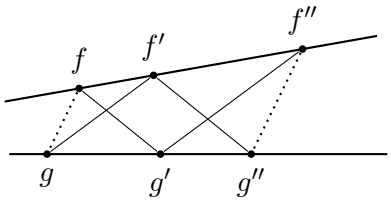
$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - d^*b, da + bc^*) \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{H}).$$

Man kann zeigen, dass $\mathbb{O}$ ein Quasikörper ist. Seine Elemente heißen *Oktonionen*.

5 Pappus-Ebenen

Definition 5.1. Eine affine Ebene heißt *Pappus-Ebene*, falls für $F, G \in \mathcal{G}$ und paarweise verschiedene Punkte $f, f', f'' \in F$ und $g, g', g'' \in G$ gilt

$$fg' \parallel f'g'',\ f'g \parallel f''g' \implies fg \parallel f''g''.$$



Satz 5.2 (Hessenberg)**.** *Jede Pappus-Ebene ist eine Desargues-Ebene und daher eine Translationsebene.*

Beweis. Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine Pappus-Ebene und $F, G, H \in \mathcal{G}$ mit $x = F \wedge G = F \wedge H = G \wedge H$. Seien $f, f' \in F \setminus \{x\}$, $g, g' \in G \setminus \{x\}$, $h, h' \in H \setminus \{x\}$ mit $fg \parallel f'g'$ und $gh \parallel g'h'$. Im Fall $f = f'$ ist $g = g'$ und $h = h'$. Dann gilt $fh = f'h'$. Wir können also annehmen, dass keine zwei Punkte gleich sind. Im Fall $fh \parallel G \parallel f'h'$ sind wir fertig. O. B. d. A. sei daher $G \nparallel f'h'$. Sei G' die Parallele von G durch h. Dann existiert

$$k := G' \wedge f'h'.$$

Wegen $h \notin G$ und $G \nparallel H$ ist $k \notin \{g', h'\}$. Sei vorübergehend $gh \parallel kg'$. Dann ist $k \in g'h'$ wegen $gh \parallel g'h'$. Nach Definition ist auch $k \in f'h'$ und es folgt $g'h' = kh' = f'h'$. Damit ist auch $f'h' = f'g'$ und $fh = fg \parallel f'g' = f'h'$ wie gewünscht. Sei daher $gh \nparallel kg'$ und

$$l := gh \wedge kg'.$$

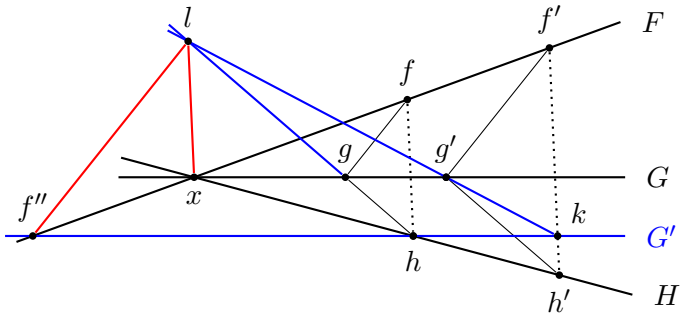
Wir wenden dreimal die Pappus-Eigenschaft an:

(i) Die Punkte x, h, h' und l, g', k sind jeweils kollinear. Im Fall $l = h$ wäre $h = hg' \wedge G' = k \in f'h'$ und $f' \in H$. Also ist $hl \parallel h'g'$ und $xg' \parallel hk$. Es folgt $xl \parallel h'k$.

(ii) Sei $f'' := G' \wedge F$. Die Punkte x, f, f'' und l, g', k sind jeweils kollinear. Im Fall $f'' = l$ wäre $h \in gh \cap G' = l = f'' \in F$. Im Fall $f' = k$ ist $k = G' \wedge F = f''$ und $f''l = f'l = f'g' \parallel fg$. Anderenfalls gilt $xl \parallel h'k = f'k$ und $xg' \parallel f''k$. Es folgt $f''l \parallel f'g' \parallel fg$.

(iii) Die Punkte l, g, h sind kollinear. Aus $f''l \parallel fg$ und $f''h \parallel xg$ folgt $xl \parallel fh$.

Insgesamt ist $fh \parallel xl \parallel h'k \parallel f'h'$.



Die zweite Aussage folgt aus Satz 4.3. □

Bemerkung 5.3. Analog zu Desargues impliziert die Pappus-Eigenschaft die Gültigkeit des kleinen Satzes von Pappus.

Satz 5.4 (Pappus)**.** *Für jede affine Ebene $\mathcal{E}$ sind äquivalent:*

(1) $\mathcal{E}$ ist eine Pappus-Ebene.

(2) $\mathcal{E}$ ist zu einer Koordinatenebene eines Körpers isomorph.

Beweis. (1)⇒(2): Nach Hessenberg ist $\mathcal{E}$ eine Desargues-Ebene und als solche zur Koordinatenebene $\mathcal{E}(K)$ eines Schiefkörpers K isomorph (Satz 4.8). Seien $\alpha, \beta \in K \setminus \{0, 1\}$. Wir betrachten $f = (1, 0)$ und $g = (0, 1)$. Es gilt $f\alpha(g) \parallel \alpha^{-1}(f)g$ sowie $\beta^{-1}(f)g \parallel f\beta(g)$. Die Pappus-Eigenschaft zeigt $\alpha^{-1}(f)\beta(g) \parallel \beta^{-1}(f)\alpha(g)$. Daher existiert $\gamma \in K$ mit

$$\alpha^{-1}(f) - \beta(g) = \gamma(\beta^{-1}(f) - \alpha(g)).$$

Da f und g linear unabhängig sind, erhält man $\alpha^{-1} = \gamma\beta^{-1}$ und $\beta = \gamma\alpha$. Dies zeigt $\alpha\beta = \alpha\gamma\alpha = \beta\alpha$. Also ist K ein Körper.

(2)⇒(1): Nach dem kleinen Satz von Pappus dürfen wir annehmen, dass die Geraden F und G in der Pappus-Eigenschaft nicht parallel sind. Nach Translation schneiden sie sich in $\mathbf{o} = (0, 0) \in K^2$. Es existieren $\alpha, \beta \in K \setminus \{0, 1\}$ mit $f' = \alpha(f)$ und $f'' = \beta(f)$. Aus $fg' \parallel \alpha(f)g''$ und $g\alpha(f) \parallel g'\beta(f)$ folgt $g'' = \alpha(g')$ sowie $\alpha^{-1}\beta(g) = \beta\alpha^{-1}(g) = g'$. Damit erhält man

$$fg = f\beta^{-1}\alpha(g') \parallel \beta(f)\alpha(g') = f''g''.$$ □

Bemerkung 5.5.

(i) Da der Hamiltonsche Schiefkörper $\mathbb{H}$ kein Körper ist, ist $\mathcal{E}(\mathbb{H})$ eine Desargues-Ebene, aber keine Pappus-Ebene. Merke:

$$\text{Pappus-Ebene} \Longrightarrow \text{Desargues-Ebene} \Longrightarrow \text{Translationsebene} \Longrightarrow \text{affine Ebene}.$$

(ii) Wedderburn hat bewiesen, dass jeder endliche Schiefkörper kommutativ ist.[1] Daher ist jede end-

[1] Siehe Algebra-Skript

liche Desargues-Ebene eine Pappus-Ebene.

Lemma 5.6. *Sei K ein Körper, $f, g \in K^2$ linear unabhängig und $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ mit $\alpha\delta \neq \beta\gamma$. Dann gilt*

$$(\alpha f)(\beta g) \wedge (\gamma f)(\delta g) = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}(\alpha\delta(\gamma f + \beta g) - \beta\gamma(\alpha f + \delta g)).$$

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt $\alpha f \neq \beta g$ und $\gamma g \neq \delta g$. Ein gemeinsamer Punkt auf $(\alpha f)(\beta g)$ und $(\gamma f)(\delta g)$ lässt sich in der Form

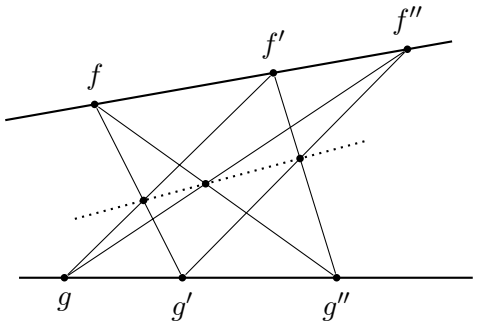
$$x = \lambda\alpha f + (1-\lambda)\beta g = \mu\gamma f + (1-\mu)\delta g$$

mit $\lambda, \mu \in K$ schreiben. Da f und g linear unabhängig sind, gilt $\lambda\alpha = \mu\gamma$ und $(1-\lambda)\beta = (1-\mu)\delta$. Es folgt

$$\lambda = \frac{\gamma(\delta-\beta)}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \qquad \mu = \frac{\alpha(\delta-\beta)}{\alpha\delta - \beta\gamma}.$$

Insbesondere ist x eindeutig bestimmt. □

Satz 5.7 (Pascal)**.** *Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine Pappus-Ebene und $F, G \in \mathcal{G}$. Seien $f, f', f'' \in F \setminus G$ und $g, g', g'' \in G \setminus F$ paarweise verschieden, sodass die Schnittpunkte $x := fg' \wedge f'g$, $y := f'g'' \wedge f''g'$ und $z := fg'' \wedge f''g$ existieren. Dann sind x, y, z kollinear.*



Beweis. Wie üblich sei $\mathcal{E} = \mathcal{E}(K)$ für einen Körper K. Betrachten wir zunächst den Fall, dass sich F und G in einem Punkt, o. B. d. A. 0, schneiden. Nach Voraussetzung existieren $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K \setminus \{0, 1\}$ mit $f' = \alpha f$, $f'' = \beta f$, $g' = \gamma g$ und $g'' = \delta g$. Mit $u := f + g$, $v := \alpha f + \gamma g$ und $w := \beta f + \delta g$ erhält man

$$x = \frac{1}{\alpha\gamma - 1}(\alpha\gamma u - v), \qquad y = \frac{1}{\beta\delta - \alpha\gamma}(\beta\delta v - \alpha\gamma w), \qquad z = \frac{1}{1-\beta\delta}(w - \beta\delta u)$$

aus Lemma 5.6. Wegen

$$\beta\delta(\alpha\gamma - 1)x + (\beta\delta - \alpha\gamma)y + \alpha\gamma(1-\beta\delta)z = 0,$$
$$\beta\delta(\alpha\gamma - 1) + (\beta\delta - \alpha\gamma) + \alpha\gamma(1-\beta\delta) = 0$$

gilt $y = \lambda x + (1-\lambda)z$ für ein $\lambda \in K$. Also sind x, y, z kollinear.

Sei nun $F \parallel G$. Nach Translation sei $z = (0, 0)$. Wir beschreiben alle Punkte bzgl. der Basis f, f''. Nach dem Strahlensatz existieren $\alpha, \gamma, \delta \in K$ mit $g'' = \alpha f$, $g = \alpha f''$, $x = \gamma f + (1-\gamma)g' = \gamma f' + (1-\gamma)g$,

$y = \delta f' + (1-\delta)g'' = \delta f'' + (1-\delta)g'$. Außerdem existieren $\lambda, \mu \in K$ mit $f' = \lambda f + (1-\lambda)f''$ sowie $g' = \mu g + (1-\mu)g'' = \mu\alpha f'' + (1-\mu)\alpha f$. Es folgt

$$\begin{aligned} x &= (\gamma + (1-\gamma)(1-\mu)\alpha)f + (1-\gamma)\mu\alpha f'' = \gamma\lambda f + (\gamma(1-\lambda) + (1-\gamma)\alpha)f'' \\ y &= (\delta\lambda + (1-\delta)\alpha)f + \delta(1-\lambda)f'' = (1-\delta)(1-\mu)\alpha f + (\delta + (1-\delta)\mu\alpha)f'' \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} \gamma + (1-\gamma)(1-\mu)\alpha = \gamma\lambda \qquad &\Longrightarrow \qquad \frac{\gamma}{1-\gamma} = -\frac{(1-\mu)\alpha}{1-\lambda} \\ \delta(1-\lambda) = \delta + (1-\delta)\mu\alpha \qquad &\Longrightarrow \qquad \frac{\delta}{1-\delta} = -\frac{\mu\alpha}{\lambda} \end{aligned}$$

Man sieht nun, dass sich die Koeffizienten von x und y im gleichen Verhältnis teilen:

$$\frac{\gamma\lambda}{(1-\gamma)\mu\alpha} = -\frac{(1-\mu)\lambda}{\mu(1-\lambda)} = \frac{(1-\delta)(1-\mu)\alpha}{\delta(1-\lambda)}$$

Also sind x, y linear abhängig und $x, y, z = (0,0)$ kollinear. □

Bemerkung 5.8. In Satz 5.7 nennt man $xy = xz$ die *Pascal-Gerade*. Im Folgenden sei K stets ein Körper.

Definition 5.9. Für Zeilenvektoren $x, y, z \in K^2$ sei

$$[x, y] := \det \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad [x, y, z] := \det \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \\ 1 & z \end{pmatrix}.$$

Lemma 5.10. *Für $x, x', y, y', z, z' \in K^2$ gilt*

$$\begin{aligned} [x, y, z] = [y, z, x] = [z, x, y] = [x - z, y - z] = [x, y] + [y, z] + [z, x], \\ [x + x', y + y', z + z'] = [x, y, z] + [x, y', z'] + [x', y, z'] + [x', y', z], \\ [x, y]z + [y, z]x + [z, x]y = 0. \end{aligned}$$

Beweis. Die erste Zeile folgt aus den Determinantenregeln und der Gauß-Elimination. Für die zweite Zeile benutzt man die erste:

$$\begin{aligned} [x + x', y + y', z + z'] &= [x, y] + [x, y'] + [x', y] + [x', y'] + [y, z] + [y, z'] \\ &\quad + [y', z] + [y', z'] + [z, x] + [z, x'] + [z', x] + [z', x'] \\ &= [x, y, z] + [x, y', z'] + [x', y, z'] + [x', y', z]. \end{aligned}$$

Sind x, y linear abhängig, etwa $x = \lambda y$ mit $\lambda \in K$, so gilt $[y, z]x + [z, x]y = (\lambda[y, z] + \lambda[z, y])y = 0$. Sind x, y linear unabhängig, so gilt $z = \lambda x + \mu y$ mit $\lambda, \mu \in K$ und es folgt

$$[x, y]z + [y, z]x + [z, x]y = (\lambda[x, y] + \lambda[y, x])x + (\mu[x, y] + \mu[y, x])y = 0.$$ □

Lemma 5.11. *Genau dann sind $x, y, z \in K^2$ kollinear, wenn $[x, y, z] = 0$.*

Beweis. Es gilt:

$$x, y, z \text{ kollinear} \iff x - z, y - z \text{ linear abhängig} \overset{5.10}{\iff} [x, y, z] = [x - z, y - z] = 0. \qquad \square$$

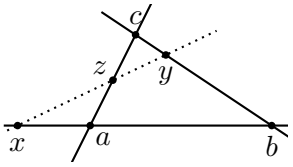
Satz 5.12. *Seien $a, b, c \in K^2$ in allgemeiner Lage und*

$$x := \alpha a + (1 - \alpha)b, \qquad y := \beta b + (1 - \beta)c, \qquad z := \gamma c + (1 - \gamma)a$$

Punkte auf den Geraden ab, bc und ca, wobei $\alpha, \beta, \gamma \in K \setminus \{1\}$.

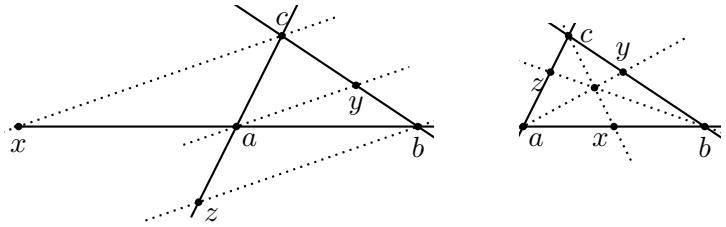
(i) (Menelaos) *Genau dann sind x, y, z kollinear, wenn*

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\gamma}{1-\gamma} = -1.$$



(ii) (Ceva) *Die Geraden ay, bz und cx sind genau dann parallel oder schneiden sich in einem Punkt, wenn*

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\gamma}{1-\gamma} = 1.$$



Beweis. Nach Translation können wir $a = (0, 0)$ annehmen. Dann ist b, c eine Basis von K^2. Wir stellen x, y, z bzgl. dieser Basis dar: $x = (1 - \alpha, 0)$, $y = (\beta, 1 - \beta)$, $z = (0, \gamma)$.

(i) Aus der Sarrus-Regel für Determinanten folgt

$$[x, y, z] = \beta\gamma + (1 - \alpha)(1 - \beta) - \gamma(1 - \alpha).$$

Daher ist

$$[x, y, z] = 0 \iff \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + 1 = \alpha + \beta + \gamma \iff \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\gamma}{1-\gamma} = -1.$$

(ii) Sind ay, bz, cx parallel, so sind $y = (\beta, 1 - \beta)$, $b - z = (1, -\gamma)$ und $c - x = (\alpha - 1, 1)$ paarweise linear abhängig sind. Dies führt zu $1 - \beta = -\beta\gamma$ und $1 = \gamma(1 - \alpha)$. Es folgt

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\gamma}{1-\gamma} = (\gamma - 1)\frac{-1}{\gamma}\frac{\gamma}{1-\gamma} = 1.$$

Schneiden sich die Geraden in einem Punkt, so existieren $\lambda, \mu, \rho \in K$ mit

$$(\lambda\beta, \lambda(1 - \beta)) = \lambda y = \mu x + (1 - \mu)c = (\mu(1 - \alpha), 1 - \mu) = \rho z + (1 - \rho)b = (1 - \rho, \rho\gamma).$$

Es folgt $\lambda\beta = \mu(1-\alpha) = 1-\rho$ und $\lambda(1-\beta) = 1-\mu = \rho\gamma$. Dies ergibt

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\gamma}{1-\gamma} = \frac{\mu\alpha}{\lambda\beta}\frac{\lambda\beta}{\rho\gamma}\frac{\rho\gamma}{\rho(1-\gamma)} = \frac{\mu\alpha}{\rho-1+\mu} = 1.$$

Sei umgekehrt

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\gamma}{1-\gamma} = 1.$$

Im Fall $ay \parallel bz$ ist $1-\beta = -\beta\gamma$ und es folgt $\alpha = (1-\alpha)(\gamma-1)$. Dies ergibt $\gamma(1-\alpha) = 1$ und $ay \parallel bz \parallel cx$. Sei nun $ay \nparallel bz$. Dann existieren $\lambda, \rho \in K$ mit

$$(\lambda\beta, \lambda(1-\beta)) = \lambda y = \rho z + (1-\rho)b = (1-\rho, \rho\gamma).$$

Also gilt $\lambda\beta = 1-\rho$ und $\lambda(1-\beta) = \rho\gamma$. Es folgt $\alpha(1-\rho) = (1-\alpha)\rho(1-\gamma)$ und

$$\alpha(1-\rho\gamma) = \alpha(1-\lambda+\lambda\beta) = \alpha(2-\rho-\gamma) = \rho(1-\gamma).$$

Mit $\mu := 1-\rho\gamma$ gilt nun $\mu(1-\alpha) = 1-\rho\gamma-\rho+\rho\gamma = 1-\rho$. Wie oben haben nun ay, bz und cx einen gemeinsamen Schnittpunkt. □

Bemerkung 5.13.

(i) In der Situation von Satz 5.12 nennt man $xy = xz$ die *Menelaos-Gerade* und $ay \wedge bz = ay \wedge cx$ den *Ceva-Punkt*.

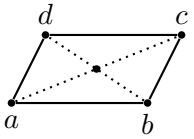
(ii) Hat K Charakteristik $\operatorname{char} K = 2$, so sind die Bedingungen von Menelaos und Ceva identisch, d. h. x, y, z sind genau dann kollinear, wenn $ay \parallel bz \parallel cx$ oder $ay \wedge bz = ay \wedge cx$. Damit hat man eine geometrische Charakterisierung der Körpereigenschaft $\operatorname{char} K = 2$.

Definition 5.14. Sei $\operatorname{char} K \neq 2$. Für verschiedene $a, b \in K^2$ lässt sich dann der *Mittelpunkt* zwischen a und b durch $\frac{1}{2}(a+b)$ definieren.

Satz 5.15 (Diagonalensatz)**.** *Sei* $\operatorname{char} K \neq 2$. *Seien* $a, b, c, d \in K^2$ *paarweise verschieden und nicht kollinear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

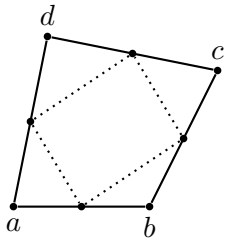
(1) a, b, c, d *bilden ein Parallelogramm, d. h.* $ab \parallel cd$ *und* $ad \parallel bc$.

(2) Die Diagonalen ac *und* bd *schneiden sich im Mittelpunkt* $\frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}(b+d)$.



Beweis. Folgt aus dem Parallelogrammsatz. □

Satz 5.16 (Varignon). *Sei* $\operatorname{char} K \neq 2$. *Seien* $a, b, c, d \in K^2$ *paarweise verschieden und nicht kollinear. Dann bilden die Seitenmittelpunkte* $\frac{1}{2}(a+b)$, $\frac{1}{2}(b+c)$, $\frac{1}{2}(c+d)$, $\frac{1}{2}(d+a)$ *ein Parallelogramm.*



Beweis. Im Fall $a+b=c+d$ ist $\frac{1}{4}(a+d)+\frac{1}{4}(b+c)=\frac{1}{2}(a+b)$ und alle vier Mittelpunkte liegen auf einer Geraden, die wir als Parallelogramm interpretieren. Seien nun die Mittelpunkte paarweise verschieden und nicht kollinear. Dann folgt die Behauptung aus dem Diagonalensatz. □

Satz 5.17. *Sei* $\operatorname{char} K \neq 2$ *und* $a, b, c \in K^2$ *in allgemeiner Lage. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $\operatorname{char} K \neq 3$.

(2) Die Geraden $\frac{1}{2}(a+b)c$, $\frac{1}{2}(b+c)a$, $\frac{1}{2}(a+c)b$ *schneiden sich in einem Punkt.*

Beweis. Sind zwei der Geraden gleich, sagen wir $\frac{1}{2}(a+b)c = \frac{1}{2}(b+c)a$, so existiert $\lambda \in K$ mit $c = a + \lambda(b+c-2a)$. Dann wären a, b, c kollinear nach Lemma 5.11. Also sind die Geraden stets paarweise verschieden.

(1)⇒(2): Man sieht leicht, dass $\frac{1}{3}(a+b+c)$ auf allein drei Geraden liegt.

(2)⇒(1): Sei s der gemeinsame Schnittpunkt. Nach Translation können wir $c = (0,0)$ annehmen. Dann existieren $\lambda, \mu \in K$ mit

$$s = \frac{\lambda}{2}(a+b) = \frac{\mu}{2}b - (1-\mu)a.$$

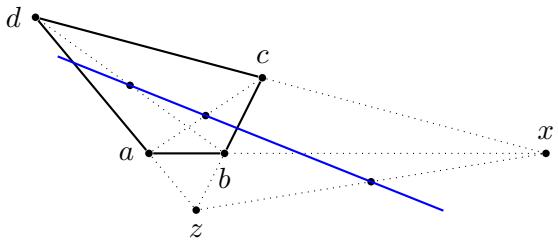
Ein Koeffizientenvergleich ergibt $\lambda = \mu$ und $\lambda/2 = (1-\lambda)$. Dies zeigt $3\lambda = 2 \neq 0$ also $\operatorname{char} K \neq 3$. □

Definition 5.18. Vier Punkte a, b, c, d einer affinen Ebene bilden ein *allgemeines Viereck*, falls keine drei der Punkte kollinear sind und keine zwei der möglichen Verbindungsgeraden parallel sind. Die Schnittpunkte

$$x := ab \wedge cd, \qquad y := ac \wedge bd, \qquad z := ad \wedge bc$$

heißen *Diagonalpunkte* des Vierecks.

Satz 5.19 (Gauss). *Sei* $\operatorname{char} K \neq 2$. *Sei* a, b, c, d *ein allgemeines Viereck in* $\mathcal{E}(K)$ *mit Diagonalpunkten* x, y, z. *Dann liegen die Mittelpunkte von* ac, bd *und* xz *auf einer Geraden, die man* Gauß-Gerade *nennt.*



Beweis. Aus Lemma 5.10 und Lemma 5.11 folgt

$$4[\frac{1}{2}(a+c), \frac{1}{2}(b+d), \frac{1}{2}(x+z)] = [a,b,x] + [a,d,z] + [c,b,z] + [c,d,x] = 0. \qquad \square$$

6 Projektive Ebenen

Definition 6.1. Ein Paar $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ heißt *projektive Ebene*, falls gilt:

(P1) Auf jeder Geraden liegen mindestens drei verschiedene Punkte.

(P2) Zwei verschiedene Punkte liegen auf genau einer Geraden.

(P3) Je zwei Geraden haben einen Schnittpunkt.

(P4) Es gibt drei Punkte in allgemeiner Lage.

Bemerkung 6.2. Im Unterschied zu affinen Ebenen sind parallele Geraden einer projektiven Ebene bereits gleich. Wegen (P2) ist (P3) daher äquivalent zu: Je zwei verschiedenen Geraden haben genau einen Schnittpunkt.

Satz 6.3. *Für jede affine Ebene $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ ist*

$$\overline{\mathcal{E}} := \big(\mathcal{P} \cup [\mathcal{G}], \{G \cup \{[G]\} : G \in \mathcal{G}\} \cup \{[\mathcal{G}]\}\big)$$

ist eine projektive Ebene. Man nennt $\overline{\mathcal{E}}$ den projektiven Abschluss *von $\mathcal{E}$.*

Beweis. Da $G \in \mathcal{G}$ mindestens zwei Punkte enthält, besitzt $G \cup \{[G]\}$ mindestens drei Punkte (man beachte, dass $[G]$ ein Punkt von $\overline{\mathcal{E}}$ ist). Da $\mathcal{E}$ drei Punkte in allgemeiner Lage besitzt, gilt $|[\mathcal{G}]| \geq 3$. Dies zeigt (P1).

Verschiedene $x, y \in \mathcal{P}$ liegen in genau einer Geraden $G \cup \{[G]\}$ von $\overline{\mathcal{E}}$ (man beachte $\{[G]\} \cap \mathcal{P} = \varnothing = [\mathcal{G}] \cap \mathcal{P}$). Verschiedene $[G], [H] \in [\mathcal{G}]$ liegen nur in der Geraden $[\mathcal{G}]$. Sei schließlich $x \in \mathcal{P}$ und $[G] \in [\mathcal{G}]$. Nach dem Parallelenaxiom existiert genau ein $H \in [G]$ mit $x \in H$. Also liegen x, $[G] = [H]$ nur in der Geraden $H \cap \{[H]\}$. Daher gilt (P2).

Seien $G \cup \{[G]\}$ und $H \cup \{[H]\}$ verschiedene Geraden in $\overline{\mathcal{E}}$. Sind G und H parallel, so ist $[G] = [H]$ ein Schnittpunkt. Anderenfalls ist $G \wedge H$ ein Schnittpunkt. Dies zeigt (P3).

Drei Punkte aus $\mathcal{E}$ in allgemeiner Lage sind offensichtlich auch in $\overline{\mathcal{E}}$ in allgemeiner Lage. Also gilt (P4). $\square$

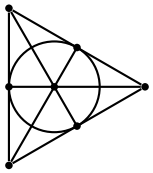
Bemerkung 6.4. Sei $\varphi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ ein Isomorphismus von affinen Ebenen. Wegen $G \parallel H \iff \varphi(G) \parallel \varphi(H)$ (Bemerkung 2.2) setzt sich φ zu einem Isomorphismus $\overline{\mathcal{E}} \to \overline{\mathcal{E}'}$ fort.

Beispiel 6.5. Sei $\mathcal{E} := \mathcal{E}(K)$ die Koordinatenebene eines Schiefkörpers K. Der projektive Abschluss von $\mathcal{E}$ enthält dann neben den Punkten aus K^2 noch die Richtungen Kv für $v \in K^2 \setminus \{0\}$ (also die 1-dimensionalen Unterräume von K^2). Beide Mengen kann man einheitlich durch die 1-dimensionalen Unterräume von K^3 beschreiben. Die Elemente aus K^2 entsprechen den Unterräumen der Form $K(x, y, 1)$ und die Punkte $K(x, y)$ entsprechen $K(x, y, 0)$. Die Geraden von $\overline{\mathcal{E}}$ sind nun genau die 2-dimensionalen

Unterräume von K^3. Der Schnittpunkt zweier verschiedener Geraden G, H in $\overline{\mathcal{E}}$ ist der 1-dimensionale Raum $G \cap H$. Außerdem ist

$$\mathrm{PGL}(3, K) := \mathrm{GL}(3, K)/K^\times 1_3 \leq \mathrm{Aut}(\overline{\mathcal{E}}).$$

Daher ist $\mathrm{Aut}(\overline{\mathcal{E}})$ deutlich größer als $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$, d. h. $\overline{\mathcal{E}}$ ist „symmetrischer“ als $\mathcal{E}$. Man nennt $\overline{\mathcal{E}}$ die *projektive Koordinatenebene* über K. Im kleinsten Fall $K = \mathbb{F}_2$ nennt man $\overline{\mathcal{E}}$ die *Fano-Ebene*.



Satz 6.6. *Für jede projektive Ebene $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ und $F \in \mathcal{G}$ ist*

$$\mathcal{E}_F := \big(\mathcal{P} \setminus F, \{G \setminus F : G \in \mathcal{G} \setminus \{F\}\}\big)$$

eine affine Ebene.

Beweis. Nach (P1) und Bemerkung 6.2 gilt $|G \setminus F| \geq 2$ für $G \in \mathcal{G} \setminus \{F\}$, d. h. (A1) gilt. Zwei verschiedene Punkte $x, y \in \mathcal{P} \setminus F$ liegen nach (P2) auf genau einer Geraden $G \in \mathcal{G}$. Wegen $x, y \notin F$ liegen x, y auch auf $G \setminus F$. Also gilt (A2).

Seien nun $x \in \mathcal{P} \setminus F$ und $G \in \mathcal{G} \setminus \{F\}$ gegeben. Sei $y := F \wedge G$ (nach (P3)) und $H := xy$. Im Fall $G \neq H$ ist $G \wedge H = y \in F$ und $(G \setminus F) \parallel (H \setminus F)$. Für (A3) müssen wir zusätzlich zeigen, dass $H \setminus F$ die einzige Parallele von $G \setminus F$ durch x ist. Sei also $x \in (K \setminus F) \parallel (G \setminus F)$. Im Fall $K \setminus F = G \setminus F$ ist $K = G$ nach (P1) und (P2). Wegen $x \in K = G$ ist dann auch $H = xy = G = K$. Seien also $K \setminus F$ und $G \setminus F$ disjunkt. Dann folgt $G \wedge K \in F$, $y = F \wedge G \in K$ und $H = xy = K$. Somit gilt das Parallelenaxiom (A3).

Seien schließlich $x, y, z \in \mathcal{P}$ in allgemeiner Lage (nach (P4)). Im Fall $x, y, z \in \mathcal{P} \setminus F$ sind x, y, z auch bzgl. $\mathcal{E}_F$ in allgemeiner Lage. O. B. d. A. sei also $z \in F$ und $x \notin F$. Da $xz \neq F$ mindestens drei Punkte besitzt (nach (P1)), können wir z durch einen Punkt aus $xz \setminus F$ ersetzen. Dabei ändert sich xz nicht. Insbesondere gilt nach wie vor $y \notin xz$. Mit dem gleichen Argument kann man $y \notin F$ annehmen. Nun sind $x, y, z \in \mathcal{P} \setminus F$ in allgemeiner Lage bzgl. $\mathcal{E}_F$. Also gilt (A4). □

Bemerkung 6.7.

(i) Mit Satz 6.6 lassen sich Definition 1.11 und Satz 1.12 auf projektive Ebenen übertragen: Für jede projektive Ebene $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ existiert ein $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $|\mathcal{P}| = |\mathcal{G}| = n^2 + n + 1$ und jede Gerade enthält genau $n + 1$ Punkte. Man nennt dann auch $\operatorname{ord} \mathcal{E} := n$ die *Ordnung* von $\mathcal{E}$.

(ii) Startet man mit einer affinen Ebene $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ und wählt die Gerade $F = [\mathcal{G}]$ in $\overline{\mathcal{E}}$, so ist offenbar $\overline{\mathcal{E}}_F \cong \mathcal{E}$.

(iii) Ist $\varphi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ ein Isomorphismus projektiver Ebenen, so gilt $\mathcal{E}_F \cong \mathcal{E}'_{\varphi(F)}$ wie man leicht nachrechnet. Operiert $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ also transitiv auf der Menge der Geraden, so hängt der Isomorphietyp von $\mathcal{E}_F$ nicht von der Wahl von F ab. Dies gilt zum Beispiel für die projektive Koordinatenebene $\overline{\mathcal{E}(K)}$ über einem Schiefkörper K (siehe Beispiel 6.5).

(iv) Im Allgemeinen hängt der Isomorphietyp von $\mathcal{E}_F$ jedoch von der Wahl von F ab. Sei dafür $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ die Translationsebene der Ordnung 9 über dem Quasikörper Q aus Satz 4.18. Sei $\overline{G_0} = G_0 \cup [G_0]$ die Gerade in $\overline{\mathcal{E}}$ und $\mathcal{E}' := \overline{\mathcal{E}}_{\overline{G_0}}$. Wegen $\mathcal{E} \cong \overline{\mathcal{E}}_{[\mathcal{G}]}$ genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{E}'$ keine Translationsebene ist. Die Geraden in $\mathcal{E}'$ bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} G'_x &:= (G_x \cup [G_x]) \setminus \overline{G_0} = G_x = \{x\} \times Q \qquad (x \in \mathbb{F}_9^\times), \\ G'_{a,b} &:= G_{a,b} \setminus \{(0,b)\} \cup [G_{a,b}] \qquad (a, b \in Q), \\ [\mathcal{G}]' &:= [\mathcal{G}] \setminus \{[G_0]\}. \end{aligned}$$

Die Geraden G'_x sind offenbar parallel zu $[\mathcal{G}]'$. Die Geraden $G_{a,b}$ und $G_{a',b'}$ sind genau dann parallel, wenn $b = b'$. Wir wenden den kleinen Satz von Desargues auf $F := G_{1,0}$, $G := G_{-1,0}$ und $H := G_{\zeta,0}$ an, wobei $\zeta \in \mathbb{F}_9$ mit $\zeta^2 = -1$. Sei $f := (1,1)$, $f' := (-1,-1)$, $g := (1,-1)$, $g' := (-1,1)$, $h = (-\zeta, 1)$ und $h' := (1-\zeta, 1+\zeta)$. Offenbar ist $fg = G'_1 \parallel G'_{-1} = f'g'$. Wegen $N(\zeta) = \zeta^4 = 1$ ist $\zeta * x = \zeta x$ für alle $x \in Q$. Insbesondere ist $h, h' \in H$. Andererseits ist $(1+\zeta) * x = (1+\zeta)x^3$, denn

$$N(1+\zeta) = (1+\zeta)(1+\zeta^3) = (1+\zeta)(1-\zeta) = -1.$$

Dies zeigt $gh = G'_{-1-\zeta,\zeta} \parallel G'_{\zeta-1,\zeta} = g'h'$. Schließlich ist $fh = G'_{0,1} \nparallel G'_{-\zeta,-1-\zeta} = f'h'$. Also ist $\mathcal{E}'$ keine Translationsebene.

Satz 6.8. *Für jede projektive Ebene $\mathcal{E}$ und jede Gerade F von $\mathcal{E}$ gilt $\mathcal{E} \cong \overline{\mathcal{E}_F}$.*

Beweis. Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$. Jeder Punkt $x \in \overline{\mathcal{E}_F}$ liegt entweder in $\mathcal{P} \setminus F$ oder hat die Form $[G \setminus F]$ für $G \in \mathcal{G} \setminus \{F\}$. Im ersten Fall definieren wir $\varphi(x) := x$ und anderenfalls $\varphi(x) := G \wedge F$. Im Fall $G \wedge F = H \wedge F$ ist $(G \setminus F) \parallel (H \setminus F)$, d. h. $[G \setminus F] = [H \setminus F]$. Dies zeigt die Injektivität von φ. Ist $x \in F$ gegeben, so wähle $y \in \mathcal{P} \setminus F$ und setze $G := xy \in \mathcal{G}$. Offenbar gilt $\varphi([G \setminus F]) = G \wedge F = x$. Damit bildet φ surjektiv nach $\mathcal{P}$ ab.

Sei $G' := (G \setminus F) \cup \{[G \setminus F]\}$ eine Gerade in $\overline{\mathcal{E}_F}$. Offenbar ist dann $\varphi(G') = G \in \mathcal{G}$. Sei schließlich $G' := \{[G \setminus F] : G \neq F\}$ die ausgezeichnete Gerade in $\overline{\mathcal{E}_F}$. Dann gilt offenbar $\varphi(G') = F$. Folglich ist $\varphi\colon \overline{\mathcal{E}_F} \to \mathcal{E}$ ein Isomorphismus. □

Bemerkung 6.9. Seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ projektive Ebenen mit Geraden F, F', sodass $\mathcal{E}_F \cong \mathcal{E}'_{F'}$. Aus Bemerkung 6.4 und Satz 6.8 folgt dann $\mathcal{E} \cong \overline{\mathcal{E}_F} \cong \overline{\mathcal{E}'_{F'}} \cong \mathcal{E}'$.

Satz 6.10 (Dualität projektiver Ebenen)**.** *Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine projektive Ebene und $\mathcal{P}^* := \{[x] : x \in \mathcal{P}\}$. Dann ist $\mathcal{E}^* := (\mathcal{G}, \mathcal{P}^*)$ eine projektive Ebene. Man nennt $\mathcal{E}^*$ die zu $\mathcal{E}$* duale *Ebene. Es gilt $(\mathcal{E}^*)^* \cong \mathcal{E}$.*

Beweis. Satz 1.12 angewendet auf $\mathcal{E}_F$ zeigt $|[x]| \geq 3$ für $x \in \mathcal{P}$, sodass (P1) für $\mathcal{E}^*$ gilt. Verschiedene Geraden $G, H \in \mathcal{G}$ liegen nur in $[G \wedge H]$, d. h. (P2) gilt für $\mathcal{E}^*$. Für verschiedene $x, y \in \mathcal{P}$ ist $[x] \wedge [y] = xy$. Damit ist (P3) gezeigt. Seien $x, y, z \in \mathcal{P}$ in allgemeiner Lage. Dann sind $xy, xz, yz \in \mathcal{G}$ in allgemeiner Lage bzgl. $\mathcal{E}^*$, denn anderenfalls wäre $x = y = z$ der gemeinsame Schnittpunkt dieser Geraden. Es folgt (P4).

Für die zweite Aussage betrachten wir die Bijektion $\varphi\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}^*$, $x \mapsto [x]$. Für $G \in \mathcal{G}$ ist $\varphi(G) = \{[x] : x \in G\} \in \mathcal{G}^*$. Daher ist $\varphi\colon \mathcal{E} \to (\mathcal{E}^*)^*$ ein Isomorphismus. □

Definition 6.11. Für einen Ring $(R, +, \cdot)$ sei $R^\circ := (R, +, *)$ der *entgegengesetzte* Ring mit $x * y := y \cdot x$.

Satz 6.12. *Sei $\mathcal{E}$ die projektive Koordinatenebene über einem Schiefkörper K. Dann ist $\mathcal{E}^*$ zur projektiven Koordinatenebene über K° isomorph. Insbesondere ist $\mathcal{E}$* selbstdual*, d. h. $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}^*$, falls K ein Körper ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ und $\mathcal{E}^* = (\mathcal{G}, \mathcal{P}^*)$. Für einen Unterraum $W \in \mathcal{G}$ sei

$$W^\perp := \{v \in K^3 : \forall w \in W : wv^{\mathrm{t}} = 0\}.$$

Wegen $wv^T T = v * w^{\mathrm{t}}$ ist $W^\perp$ ein 1-dimensionaler K°-Vektorraum, also ein Punkt der projektiven Koordinatenebene $\mathcal{E}^\circ = (\mathcal{P}^\circ, \mathcal{G}^\circ)$ über K°. Wegen $W = \{w \in K^3 : \forall v \in W^\perp : wv^{\mathrm{t}} = 0\}$ ist die Abbildung $\varphi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{E}^\circ$, $W \mapsto W^\perp$ eine Bijektion. Für $V \in \mathcal{P}$ und $W \in [V] \in \mathcal{P}^*$ gilt $W^\perp \subseteq V^\perp$. Es folgt

$$\varphi([V]) = \{U \in \mathcal{P}^\circ : U \subseteq V^\perp\} \in \mathcal{G}^\circ.$$

Daher ist $\varphi\colon \mathcal{E}^* \to \mathcal{E}^\circ$ ein Isomorphismus. Ist K ein Körper, so gilt $K = K^\circ$ und $\mathcal{E}^* \cong \mathcal{E}^\circ$. □

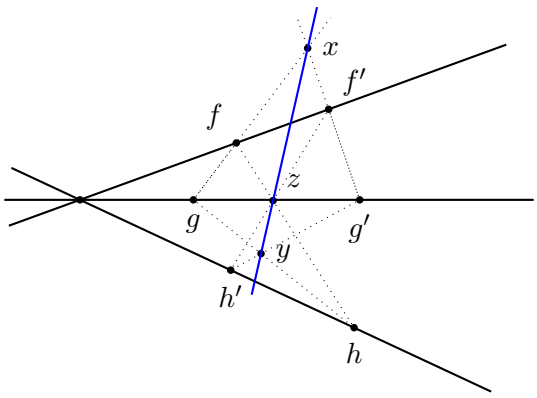
Beispiel 6.13.

(i) Sei K ein Körper, dessen Brauergruppe[2] ein Element $[A]$ der Ordnung > 2 besitzt (zum Beispiel $K = \mathbb{Q}$). Dabei können wir annehmen, dass A eine Divisionsalgebra ist. Die Algebra A° gehört dann zu $[A]^{-1} \neq [A]$. Insbesondere ist $A \ncong A^\circ$. Angenommen es existiert ein Isomorphismus φ zwischen den projektiven Koordinatenebenen $\mathcal{E}$ über A bzw. $\mathcal{E}^\circ$ über A°. Dann wäre $\mathcal{E}_F \cong \mathcal{E}^\circ_{\varphi(F)}$ im Widerspruch zu Satz 4.10. Somit ist $\mathcal{E}$ nicht selbstdual.

(ii) Der projektive Abschluss der in Satz 4.18 konstruierten Ebene ist nicht selbstdual, da der zugrunde liegende Quasikörper nur das Linksdistributivgesetz, aber nicht das Rechtsdistributivgesetz erfüllt (ohne Beweis).

Bemerkung 6.14. Durch Übergang zum projektiven Abschluss lassen sich Aussagen über affine Ebenen auf projektive Ebenen übertragen und dort zusätzlich dualisieren. Kollineare Punkte in $\mathcal{E}^*$ entsprechen Geraden in $\mathcal{E}$ mit gemeinsamem Schnittpunkt.

Satz 6.15 (Projektiver Desargues)**.** *Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ die projektive Koordinatenebene über einem Schiefkörper K. Seien $F, G, H \in \mathcal{G}$ paarweise verschieden und $f, f' \in F$, $g, g' \in G$, $h, h' \in H$ paarweise verschieden. Genau dann haben F, G, H einen gemeinsamen Schnittpunkt, wenn $x := fg \wedge f'g'$, $y := gh \wedge g'h'$, $z := fh \wedge f'h'$ kollinear sind.*



[2] Siehe Algebra-Skript

Beweis. Da F, G, H paarweise verschieden sind, sind x, y, z wohldefiniert. Nehmen wir zuerst an, dass sich F, G, H in einem Punkt $s \in \mathcal{P}$ schneiden. Im Fall $x = y$ sind x, y, z kollinear. Sei also $x \neq y$ und $L := xy \in \mathcal{G}$. Im Fall $f \in L$ ist $L = fx = fg = gy = gh = fh \ni z$ und $x, y, z \in L$ sind kollinear (wegen $f \neq f'$ ist $x \neq f$ und analog $y \neq g$). Wir können also annehmen, dass keiner der Punkte f, f', g, g', h, h' auf L liegt.

Nach Bemerkung 6.7 ist $\mathcal{E}_L$ zur (affinen) Koordinatenebene über K isomorph. Die Geraden $F \setminus L$, $G \setminus L$, $H \setminus L$ in $\mathcal{E}_L$ sind entweder parallel (falls $s \in L$) oder sie haben den gemeinsamen Schnittpunkt s. Andererseits ist $(fg \setminus L) \parallel (f'g' \setminus L)$ sowie $(gh \setminus L) \parallel (g'h' \setminus L)$. Aus dem (kleinen) Satz von Desargues folgt $(fh \setminus L) \parallel (f'h' \setminus L)$. Dies zeigt $z \in L$. Also sind $x, y, z \in L$ kollinear.

Seien nun umgekehrt $x, y, z \in L \in \mathcal{G}$ kollinear. In $\mathcal{E}^*$ schneiden sich dann $[x]$, $[y]$, $[z]$ in einem Punkt (nämlich L). Nach Definition ist $[x] = (fg)(f'g')$, $[y] = (gh)(g'h')$ und $[z] = (fh)(f'h')$. Nach Satz 6.12 können wir den ersten Teil des Beweises auf die Punkte fg, $f'g'$, gh, $g'h'$, fh, $f'h'$ von $\mathcal{E}^*$ anwenden. Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
&(fg)(gh) \wedge (f'g')(g'h') = [g] \wedge [g'] = gg', \\
&(gh)(fh) \wedge (g'h')(f'h') = hh', \\
&(fg)(fh) \wedge (f'g')(f'h') = ff'
\end{aligned}$$

kollinear sind, also einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. □

Satz 6.16 (Projektiver Pappus)**.** *Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ die projektive Koordinatenebene über einem Körper K. Seien $F, G \in \mathcal{G}$ verschieden und $f, f', f'' \in F$, $g, g', g'' \in G$ paarweise verschieden. Dann sind die Schnittpunkte $x := fg' \wedge f'g$, $y := f'g'' \wedge f''g'$, $z := f''g \wedge fg''$ kollinear.*

Beweis. Wegen $F \neq G$ sind x, y, z wohldefiniert. Wir können $x \neq y$ annehmen und definieren $L := xy \in \mathcal{G}$. Im Fall $f \in L$ wäre

$$L = fx = fg' = yg' = f''g' = ff'' = F = xf' = f'g = gg' = G.$$

Daher enthält L keinen der Punkte f, f', f'', g, g', g''. In der Pappus-Ebene $\mathcal{E}_L$ gilt $(fg' \setminus L) \parallel (f'g \setminus L)$ und $(f'g'' \setminus L) \parallel (f''g' \setminus L)$. Es folgt $(fg'' \setminus L) \parallel (f''g \setminus L)$ und $z \in L$. □

Bemerkung 6.17. Satz 6.16 ist genau die Aussage von Pascals Satz 5.7 für projektive Ebene. Der Vorteil der projektiven Variante ist, dass die Fallunterscheidung im Beweis von Satz 5.7 überflüssig wird. Die Aussage von Pappus hingegen ergibt für projektive Ebenen wenig Sinn, da parallele Geraden gleich sind.

Satz 6.18 (Brianchon)**.** *Sei $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ die projektive Koordinatenebene über einem Körper K. Seien $f, g \in \mathcal{P}$ verschieden und $F, F', F'' \in [f]$, $G, G', G'' \in [g]$ paarweise verschieden. Dann haben die Geraden $(F \wedge G')(F' \wedge G)$, $(F' \wedge G'')(F'' \wedge G')$ und $(F \wedge G'')(F'' \wedge G)$ einen gemeinsamen Schnittpunkt.*

Beweis. Die Aussage ist äquivalent zu Satz 6.16 für $\mathcal{E}^* \cong \mathcal{E}$ und daher korrekt. □

Bemerkung 6.19. Der Satz von Brianchon gilt auch für affine Ebenen, sofern die benutzten Schnittpunkte $F \wedge G'$ usw. existieren.

7 Euklidische Geometrie

Bemerkung 7.1. Wir betrachten in diesem Abschnitt ausschließlich die euklidische Ebene $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{R}) = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$.

Definition 7.2.

(i) Für $a, b \in \mathbb{R}^2$ sei wie üblich $\langle a, b\rangle := ab^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}$ das *Skalarprodukt* und $|a| := \sqrt{\langle a, a\rangle}$ die *Norm*. Im Fall $\langle a, b\rangle = 0$ nennt man a und b *orthogonal* und schreibt $a \perp b$. Für $a = (x, y)$ setzt man $a^\perp := (-y, x)$.

(ii) Geraden $G, H \in \mathcal{G}$ heißen *orthogonal* oder *senkrecht*, falls verschiedene $g, g' \in G$ und $h, h' \in H$ mit $g - g' \perp h - h'$ existieren. Dies hängt offenbar nur von der Richtung von G und H ab. Ggf. schreibt man $G \perp H$.

(iii) Punkte $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ in allgemeiner Lage bilden ein *Dreieck* mit Eckpunkten a, b, c und *Seiten* ab, bc und ac. Man nennt $|a - b|$, $|b - c|$, $|a - c|$ die *Längen* der Seiten, $|a - b| + |b - c| + |c - a|$ den *Umfang* und $\frac{1}{2}|[a, b, c]|$ den *Flächeninhalt* des Dreiecks. Sind zwei Seiten gleich lang, so heißt das Dreieck *gleichschenklig*. Sind alle Seiten gleich lang, so spricht man von *gleichseitigen* Dreiecken. Sind hingegen zwei Seiten orthogonal, so heißt das Dreieck *rechtwinklig*.

Bemerkung 7.3.

(i) Man beachte, dass die Begriffe „Länge“ und „Flächeninhalt“ keinerlei Bedeutung haben, solange man sie nicht mit einem Maß (wie dem Jordanmaß) in Verbindung bringt. Wir verzichten zunächst auf dem Begriff des „Winkels“.

(ii) Die *Verbindungsstrecke* zwischen a und b besteht aus allen Punkten der Form $\alpha a + \beta b$ mit $0 \le \alpha, \beta \le 1$ und $\alpha + \beta = 1$. Die Punkte im *Inneren* des Dreiecks a, b, c haben daher die Form $\alpha a + \beta b + \gamma c$ mit $0 \le \alpha, \beta, \gamma \le 1$ und $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Zwei Punkte $a, b \in \mathcal{P}$ liegen auf der *gleichen Seite* einer Geraden G, falls die Verbindungsstrecke zwischen a und b disjunkt zu G ist.

(iii) Die Abbildung $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $a \mapsto a^\perp$ ist offenbar linear (sie entspricht einer Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn). Außerdem gilt

$$(a^\perp)^\perp = -a, \qquad \langle a, a^\perp\rangle = 0, \qquad |a^\perp| = |a|, \qquad \langle a^\perp, b^\perp\rangle = \langle a, b\rangle, \qquad \langle a^\perp, b\rangle = [a, b].$$

Lemma 7.4. *Für $a, b \in \mathbb{R}^2$ gilt*

$$\langle a, b\rangle^2 \le \langle a, b\rangle^2 + [a, b]^2 = |a|^2|b|^2 \qquad (\textit{Cauchy-Schwarz-Ungleichung})$$
$$||a| - |b|| \le |a + b| \le |a| + |b| \qquad (\textit{Dreiecksungleichung}).$$

Gleichheit $|a + b| = |a| + |b|$ gilt genau dann, wenn $a = \lambda b$ für ein $\lambda \ge 0$.

Beweis. Mit $a = (a_x, a_y)$ und $b = (b_x, b_y)$ gilt

$$\langle a, b\rangle^2 + [a, b]^2 = (a_x b_x + a_y b_y)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2 = (a_x^2 + a_y^2)(b_x^2 + b_y^2) = |a|^2|b|^2.$$

Daraus folgt

$$|a + b|^2 = \langle a + b, a + b\rangle = \langle a, a\rangle + 2\langle a, b\rangle + \langle b, b\rangle \le |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\langle a, b\rangle = |a||b|$, also $[a, b] = 0$. Dies zeigt $a = \lambda b$ mit $\lambda \ge 0$.

Für die linke Abschätzung benutzen wir $|a| = |a+b-b| \le |a+b|+|b|$ und $|a|-|b| \le |a+b|$. Vertauschen von a und b liefert $-(|a| - |b|) = |b| - |a| \le |a + b|$, also $||a| - |b|| \le |a + b|$. □

Bemerkung 7.5. Die Gleichung

$$\frac{\langle a,b\rangle^2}{|a|^2|b|^2}+\frac{[a,b]^2}{|a|^2|b|^2}=1$$

ist eine Version des *trigonometrischen Pythagoras*.

Lemma 7.6. *Für $G\in\mathcal{G}$ existiert bis auf Parallelität genau eine Gerade $H\in\mathcal{G}$ mit $G\perp H$. Man schreibt $[G]^\perp:=[H]$. Für $a\in\mathcal{P}$ existiert genau ein $H\in\mathcal{G}$ mit $a\in H$ und $H\perp G$. Man nennt $d(a,G):=|a-G\wedge H|$ den* Abstand *von a zu G. Für verschiedene $g,g'\in G$ gilt*

$$G\wedge H=g+\frac{\langle a-g,g-g'\rangle}{|g-g'|^2}(g-g'),\qquad d(a,G)=\frac{|[a-g,g-g']|}{|g-g'|}.$$

Beweis. Sei $v=(x,y)\in\mathcal{P}\setminus\{0\}$ die Richtung von G. Die zu G orthogonalen Geraden haben dann die Richtung $(-y,x)$, sie sind also parallel zueinander. Die zweite Behauptung folgt aus dem Parallelenaxiom. Für die letzte Aussage können wir $g-g'=v$ und $|v|=1$ annehmen. Der Punkt $b:=g+\langle a-g,v\rangle v$ liegt offenbar auf G. Wegen

$$\langle a-b,v\rangle=\langle a-g,v\rangle-\langle a-g,v\rangle=0$$

liegt b auch auf H. Sei $a=(a_x,a_y)$ und $g=(g_x,g_y)$. Nach Lemma 7.4 gilt

$$d(a,G)^2=|a-b|^2=|a-b|^2|v|^2=[a-b,v]^2=[a-g+g-b,v]^2=[a-g,v]^2.\qquad\square$$

Definition 7.7.

(i) Sei a,b,c ein Dreieck. Die zu ab orthogonale Gerade durch c (bzw. $\frac{1}{2}(a+b)$) heißt *Höhe* (bzw. *Mittelsenkrechte*) an ab. Die Gerade $\frac{1}{2}(a+b)c$ heißt *Seitenhalbierende* an ab.

(ii) Für $m\in\mathcal{P}$ und $\rho>0$ sei

$$K_\rho(m):=\{a\in\mathcal{P}:|a-m|=\rho\}\subseteq\mathcal{P}$$

der *Kreis* mit *Mittelpunkt* m und *Radius* ρ.

Satz 7.8. *Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks a,b,c schneiden sich im* Schwerpunkt $\frac{1}{3}(a+b+c)$. *Die Höhen schneiden sich im* Höhenschnittpunkt.

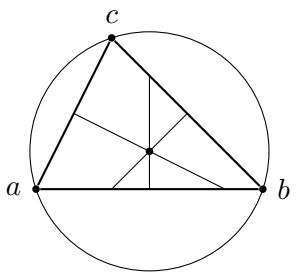
Beweis. Die erste Behauptung folgt aus Satz 5.17. Da ab und bc nicht parallel sind, schneiden sich die Höhen H_{ab} und H_{bc} in einem Punkt h. Dabei gilt

$$\langle h,a\rangle-\langle h,b\rangle-\langle c,a-b\rangle=\langle h-c,a-b\rangle=0=\langle h-a,c-b\rangle=\langle h,c\rangle-\langle h,b\rangle-\langle a,c-b\rangle$$

und es folgt $\langle h-b,a-c\rangle=\langle h,a\rangle-\langle h,c\rangle-\langle b,a-c\rangle=0$. Also liegt h auch auf H_{ac}. $\square$

Satz 7.9. *Die Eckpunkte eines Dreiecks a,b,c liegen auf genau einem Kreis, den man* Umkreis *von a,b,c nennt. Der Umkreismittelpunkt ist der gemeinsame Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. Der Radius des Umkreises ist*

$$\frac{|a-b||b-c||c-a|}{2|[a,b,c]|}.$$



Beweis. Sei M_{ab} die Mittelsenkrechte an ab. Dann gilt

$$\begin{aligned} v \in M_{ab} &\iff 0 = \langle a-b, v - \frac{1}{2}(a+b)\rangle = \langle a, v\rangle - \langle b, v\rangle - \frac{1}{2}(|a|^2 - |b|^2) \\ &\iff |v-a|^2 = |v|^2 - 2\langle v, a\rangle + |a|^2 = |v|^2 - 2\langle v, b\rangle + |b|^2 = |v-b|^2. \end{aligned}$$

Da ab und bc nicht parallel sind, müssen sich M_{ab} und M_{bc} in einem Punkt m schneiden. Wegen $r := |m-a| = |m-b| = |m-c|$ liegt m auch auf M_{ac}. Außerdem liegen a, b, c auf $K_r(m)$. Liegen a, b, c auch auf $K_{r'}(m')$, so ist $m' = M_{ab} \wedge M_{bc} = m$ und $r = |v-m| = |v-m'| = r'$. Für die letzte Aussage können wir nach Translation $c = (0,0)$ annehmen. Wegen $[a,b,c] = [a,b] = \langle a^\perp, b\rangle$ ist dann

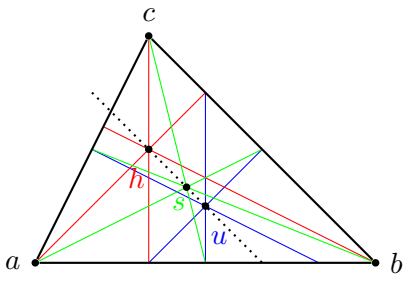
$$m = \frac{1}{2[a,b]}(|b|^2 a^\perp - |a|^2 b^\perp).$$

Das Quadrat des Radius ist

$$|m|^2 = \frac{1}{4[a,b]^2}(|a|^2|b|^4 + |a|^4|b|^2 - 2|a|^2|b|^2\langle a, b\rangle) = \Big(\frac{|a||b||a-b|}{2|[a,b]|}\Big)^2. \qquad \square$$

Folgerung 7.10. *Zwei verschiedene Kreise schneiden sich in höchstens zwei Punkten.*

Satz 7.11 (Euler)**.** *Für den Umkreismittelpunkt u, den Schwerpunkt s und den Höhenschnittpunkt h eines Dreiecks gilt* $\boxed{3s = 2u + h.}$ *Insbesondere liegen alle drei Punkte auf einer Geraden.*



Beweis. Durch Translation um den Vektor v werden die rechte und linke Seite der Gleichung mit $3v$ addiert. Wir können daher $u = 0$ annehmen. Dann gilt $|a| = |b| = |c|$ und

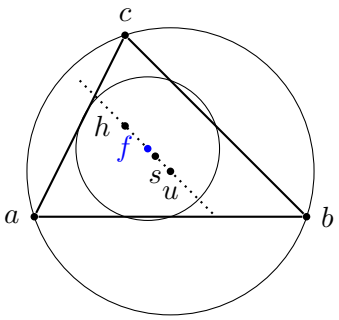
$$\langle 3s - c, a - b\rangle = \langle a + b, a - b\rangle = 0 = \langle 3s - b, a - c\rangle = \langle 3s - a, b - c\rangle.$$

Also ist $3s = h$. Die zweite Behauptung folgt aus Lemma 5.11. $\square$

Bemerkung 7.12. Gilt $u = h$ in Satz 7.11, so liegt c auf der Mittelsenkrechten M_{ab} und der Beweis von Satz 7.9 zeigt $|c-a| = |c-b|$. Folglich ist a, b, c dann gleichseitig. In allen anderen Fällen ist die Gerade in Satz 7.11 eindeutig bestimmt und heißt *Euler-Gerade* von a, b, c.

Definition 7.13. Der Kreis durch die Seitenmitten eines Dreiecks heißt *Feuerbachkreis*. Sein Mittelpunkt f heißt *Feuerbachpunkt*.

Satz 7.14 (Feuerbach)**.** *Für den Umkreismittelpunkt u, den Schwerpunkt s und den Feuerbachpunkt f eines Dreiecks gilt* $\boxed{3s = u + 2f.}$ *Insbesondere liegt f auf der Euler-Gerade (falls nicht gleichseitig) genau in der Mitte von u und dem Höhenschnittpunkt. Der Radius des Feuerbachkreises ist halb so groß wie der Umkreisradius.*



Beweis. Diesmal können wir durch Translation $s = 0$ annehmen. Die Seitenmitten haben dann die Form $-\frac{1}{2}a$, $-\frac{1}{2}b$ und $-\frac{1}{2}c$. Wegen $|2f + a| = |2f + b| = |2f + c|$ erfüllt $-2f$ genau die Gleichungen von u. Damit ist $3s = u + 2f$ bewiesen und der Radius des Feuerbachkreises ist halb so groß wie der Radius des Umkreises. Aus Satz 7.11 erhält man $2u + h = u + 2f$, also $f = \frac{1}{2}(u + h)$. □

Satz 7.15. *Gegeben sei ein Dreieck a, b, c mit Höhenfußpunkt h_c auf ab und Seitenlängen $A = |b - c|$, $B = |a - c|$, $C = |a - b|$, $H = |c - h_c|$, $P = |b - h_c|$, $Q = |a - h_c|$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) a, b, c *ist rechtwinklig mit* $ac \perp bc$.

(2) $A^2 + B^2 = C^2$ (Pythagoras).

(3) Der Umkreismittelpunkt liegt auf ab (Thales).

(4) $H^2 = PQ$ (Höhensatz).

(5) $A^2 = QC$ *und* $B^2 = PC$ (Kathetensatz).

(6) $\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} = \frac{1}{H^2}$ (Inverser Pythagoras).

Beweis. (1)⇔(2):

$$C^2 = \langle a - b, a - b\rangle = \langle a - c + c - b, a - c + c - b\rangle = B^2 + 2\langle a - c, c - b\rangle + A^2.$$

(1)⇒(3): Für den Mittelpunkt $m = \frac{1}{2}(a + b)$ der Seite ab gilt

$$|m - c|^2 = \left|\frac{1}{2}(a - c) + \frac{1}{2}(b - c)\right|^2 = \frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{4}A^2 = \frac{1}{4}C^2 = \left|\frac{1}{2}(a - b)\right|^2 = |m - b|^2.$$

Daher ist m der Umkreismittelpunkt.

(3)⇒(4): Sei $m = \frac{1}{2}(a+b)$. Nach (3) gilt o. B. d. A. $m - a = \lambda(m - h_c)$ für ein $\lambda > 0$ (tausche notfalls a und b). Wir wenden Pythagoras auf die rechtwinkligen Dreiecke m, h_c, c und b, h_c, c an:

$$H^2 = |m-c|^2 - |m-h_c|^2 = |m-a|^2 - |m-h_c|^2 = (|m-a| + |m-h_c|)(|m-b| - |m-h_c|)$$
$$\overset{7.4}{=} QP.$$

(4)⇒(5): Pythagoras auf b, c, h_c und a, c, h_c ergibt

$$PC = P(P+Q) = P^2 + H^2 = A^2,$$
$$QC = Q(P+Q) = H^2 + Q^2 = B^2.$$

(5)⇒(2):

$$A^2 + B^2 = C(P+Q) = C^2.$$

(4)⇔(6): Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} = \frac{1}{H^2} &\iff H^2(A^2+B^2) = A^2B^2 \\ &\iff H^2(H^2+P^2+H^2+Q^2) = (H^2+P^2)(H^2+Q^2) \\ &\iff H^4 = P^2Q^2 \iff H^2 = PQ. \end{aligned}$$

□

Satz 7.16. *Mit den Bezeichnungen aus Satz 7.15 gilt*

$$A^2 + B^2 = C^2 + 2\langle c-a, c-b\rangle \qquad \text{(Kosinussatz)}$$
$$A|a-h_a| = B|b-h_b| = C|c-h_c| \qquad \text{(Sinussatz)}$$

Beweis. Der Kosinussatz folgt aus

$$A^2 + B^2 = \langle b-c, b-c\rangle + \langle a-c, a-c\rangle = \langle a-b, a-b\rangle + 2\langle c-a, c-b\rangle.$$

Für den Sinussatz wählen wir $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $h_a - c = \lambda(b-c)$. Nach Lemma 7.4 gilt

$$A|a-h_a| = |b-c||a-h_a| = |[b-c, a-h_a]| = |[b-c, a-h_a+\lambda(b-c)]| = |[a,b,c]|$$

und die Behauptung folgt aus Symmetriegründen. □

Bemerkung 7.17. Der Beweis von Satz 7.16 liefert die bekannte Formel für den Flächeninhalt $\frac{1}{2}|[a,b,c]| = \frac{1}{2}A|a-h_a|$. Der nächste Satz liefert eine Formel für das Quadrat des Flächeninhalts.

Satz 7.18 (Heron-Formel)**.** *Für ein Dreieck mit Seitenlängen A, B, C sei $S := \frac{1}{2}(A+B+C)$ der halbe Umfang. Dann gilt*

$$\frac{1}{4}[a,b,c]^2 = S(S-A)(S-B)(S-C).$$

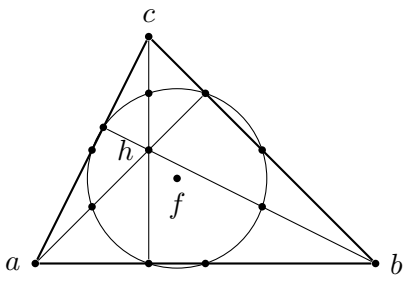
Beweis.

$$\begin{aligned} 16S(S-A)(S-B)(S-C) &= (A+B+C)(B+C-A)(A+C-B)(A+B-C) \\ &= ((A+B)^2 - C^2)(C^2 - (A-B)^2) \\ &= 4A^2B^2 - (A^2+B^2-C^2)^2 \\ &\overset{7.4+7.16}{=} 4\langle a-c, b-c\rangle^2 + 4[a-c, b-c]^2 - 4\langle c-a, c-b\rangle^2 \\ &= 4[a,b,c]^2 \end{aligned}$$

□

Satz 7.19 (9-Punkte-Satz)**.** *Folgende Punkte liegen auf dem Feuerbachkreis eines (nicht gleichseitigen) Dreiecks a, b, c:*

- *Die Seitenmitten $\frac{1}{2}(a+b)$, $\frac{1}{2}(a+c)$, $\frac{1}{2}(b+c)$.*
- *Die Höhenfußpunkte h_a, h_b, h_c.*
- *Die Mittelpunkte $\frac{1}{2}(h+a)$, $\frac{1}{2}(h+b)$, $\frac{1}{2}(h+c)$.*



Beweis. Nach Definition liegen die Seitenmitten auf dem Feuerbachkreis. Aus $3s = 2u + h$ und $6s = 4f + 2u$ folgt $4f = 3s + h = a + b + c + h$. Umstellen liefert $f - \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(h+c) - f$ und $|f - \frac{1}{2}(a+b)| = |f - \frac{1}{2}(h+c)|$. Also liegt $\frac{1}{2}(h+c)$ auf dem Feuerbachkreis und analog auch $\frac{1}{2}(h+a)$ und $\frac{1}{2}(h+b)$.

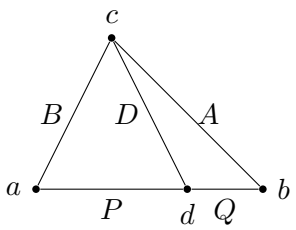
Nach Satz 7.14 liegt f genau zwischen u und h. Seien F und G die Parallelen zur Höhe ah_a durch u bzw. f. Nach dem Strahlensatz liegt dann $g := G \wedge bc$ genau zwischen $\frac{1}{2}(b+c)$ und h_a. Pythagoras zeigt

$$|f - h_a|^2 = |f - g|^2 + |g - h_a|^2 = |f - g|^2 + |g - \frac{1}{2}(b+c)|^2 = |f - \frac{1}{2}(b+c)|.$$

Also liegt h_a auf dem Feuerbachkreis und analog h_b, h_c. □

Satz 7.20 (Stewart)**.** *Sei a, b, c ein Dreieck und d ein Punkt auf der Verbindungsstrecke zwischen a und b. Mit den Bezeichnungen $A := |b - c|$, $B := |a - c|$, $C := |a - b|$, $P := |d - a|$, $Q := |d - b|$ und $D := |c - d|$ gilt*

$$PA^2 + QB^2 = C(D^2 + PQ).$$



Beweis. Mit dem Kosinussatz und $C = P + Q$ gilt

$$\begin{aligned} PA^2 + QB^2 &= P(Q^2 + D^2 + 2\langle d - b, d - c\rangle) + Q(P^2 + D^2 + 2\langle d - c, d - a\rangle) \\ &= C(D^2 + PQ) + 2\langle d - c, P(d - b) + Q(d - a)\rangle. \end{aligned}$$

Da d zwischen a und b liegt, sind $d - a$ und $d - b$ linear abhängig mit entgegengesetzten Richtungen. Aus $|P(d - b)| = PQ = |Q(d - a)|$ folgt $P(d - b) + Q(d - a) = 0$. Dies zeigt die Behauptung. □

Definition 7.21. Für ein Dreieck a, b, c nennt man

$$\begin{aligned} W_a &:= a + \mathbb{R}(|c-a|(b-a) + |a-b|(c-a)), \\ W_b &:= b + \mathbb{R}(|a-b|(c-b) + |b-c|(a-b)), \\ W_c &:= c + \mathbb{R}(|b-c|(a-c) + |c-a|(b-c)) \end{aligned}$$

die (*inneren*) *Winkelhalbierenden* und

$$\begin{aligned} W_a^* &:= a + \mathbb{R}(|c-a|(b-a) - |a-b|(c-a)), \\ W_b^* &:= b + \mathbb{R}(|b-c|(a-b) - |a-b|(c-b)), \\ W_c^* &:= c + \mathbb{R}(|c-a|(b-c) - |b-c|(a-c)) \end{aligned}$$

die *äußeren Winkelhalbierenden*.

Bemerkung 7.22.

(i) Wegen

$$\begin{aligned} &\langle |c-a|(b-a) + |a-b|(c-a), |c-a|(b-a) - |a-b|(c-a)\rangle \\ &= |c-a|^2|b-a|^2 - |a-b|^2|c-a|^2 = 0 \end{aligned}$$

ist $W_a \perp W_a^*$ und analog $W_b \perp W_b^*$, $W_c \perp W_c^*$.

(ii) Sei $a + \lambda v$ ein Schnittpunkt der Gerade $a + \mathbb{R}v$ mit dem Kreis $K_r(m)$. Dann gilt

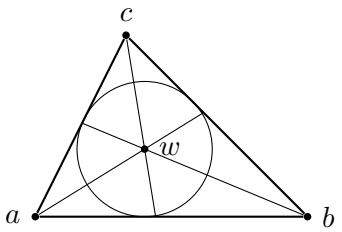
$$|a-m|^2 - 2\lambda\langle a-m, v\rangle + \lambda^2|v|^2 = |a+\lambda v - m|^2 = r^2.$$

Da diese quadratische Gleichung in λ höchstens zwei Lösungen hat, schneiden sich Gerade und Kreis in höchstens zwei Punkten. Gibt es genau einen Schnittpunkt, so *berühren* sich Gerade und Kreis. Die Gerade heißt in diesem Fall *Tangente* am Berührpunkt des Kreises. Wir sagen auch, dass sich zwei Kreise *berühren*, wenn sie genau einen Punkt gemeinsam haben.

Satz 7.23. *Die inneren Winkelhalbierenden eines Dreiecks a, b, c schneiden sich im Punkt*

$$w := \frac{1}{\sigma}(|b-c|a + |c-a|b + |a-b|c),$$

wobei $\sigma := |a-b| + |b-c| + |c-a|$ der Umfang ist. Der Kreis mit Mittelpunkt w und Radius $|[a,b,c]|/\sigma$ berührt die drei Seiten des Dreiecks und heißt daher Inkreis.



Beweis. Wegen

$$\begin{aligned} w &= a + \frac{1}{\sigma}\big(|c-a|(b-a) + |a-b|(c-a)\big) \\ &= b + \frac{1}{\sigma}\big(|a-b|(c-b) + |b-c|(a-b)\big) \\ &= c + \frac{1}{\sigma}\big(|b-c|(a-c) + |c-a|(b-c)\big) \end{aligned}$$

liegt w in $W_a \cap W_b \cap W_c$. Wären zwei der Winkelhalbierenden parallel, so müssen sie bereits gleich sein. Dann wären aber a, b, c kollinear. Also ist $w = W_a \wedge W_b = W_a \wedge W_c$.

Für die zweite Aussage benutzen wir Lemma 7.6. Es gilt

$$d(w, ab) = \frac{|[w-a, a-b]|}{|a-b|} = \frac{|[c-a, a-b]|}{\sigma} = \frac{|[a,b,c]|}{\sigma} = d(w, bc) = d(w, ac).$$

Nach Pythagoras schneidet der Inkreis die Seiten des Dreiecks in genau einem Punkt. □

Satz 7.24. *Die Winkelhalbierenden W_a, W_b^* und W_c^* schneiden sich in*

$$w_a^* := \frac{1}{\sigma_a}(|c-a|b + |a-b|c - |b-c|a) \qquad \sigma_a := |c-a| + |a-b| - |b-c|.$$

Dies ist der Mittelpunkt des Ankreises *mit Radius $\frac{|[a,b,c]|}{\sigma_a}$, der die drei Seiten des Dreiecks berührt.*

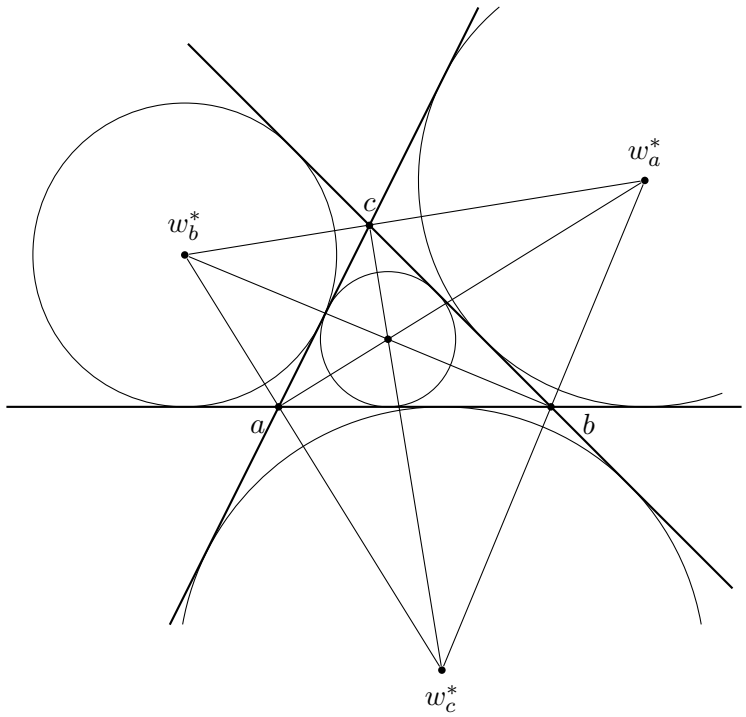
Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} w_a^* &= a + \frac{1}{\sigma_a}(|c-a|(b-a) + |b-a|(c-a)) \\ &= b + \frac{1}{\sigma_a}(|a-b|(c-b) - |c-b|(a-b)) \\ &= c + \frac{1}{\sigma_a}(|a-c|(b-c) - |c-b|(a-c)) \end{aligned}$$

und

$$d(w_a^*, ab) = \frac{|[w_a^* - a, a-b]|}{|a-b|} = \frac{|[c-a, a-b]|}{\sigma_a} = \frac{|[a,b,c]|}{\sigma_a} = d(w_a^*, bc) = d(w_a^*, ac). \qquad \square$$

Bemerkung 7.25. Selbstverständlich gibt es zwei weitere Ankreise an ab und ac.



Satz 7.26 (Winkelhalbierendensatz)**.** *In einem Dreieck a, b, c sei $w_a := W_a \wedge bc$, $w_b := W_b \wedge ac$, $w_c := W_c \wedge ab$. Dann gilt $|a-b||c-w_a| = |b-c||b-w_a|$, d. h. die Winkelhalbierenden teilen die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten. Insbesondere ist*

$$|a-w_b||b-w_c||c-w_a| = |a-w_c||b-w_a||c-w_b|.$$

Beweis. Wie üblich sei $A := |b-c|$, $B := |a-c|$ und $C := |a-b|$. Man sieht leicht:

$$w_c = c + \frac{1}{A+B}(A(a-c) + B(b-c)) = \frac{A}{A+B}a + \frac{B}{A+B}b.$$

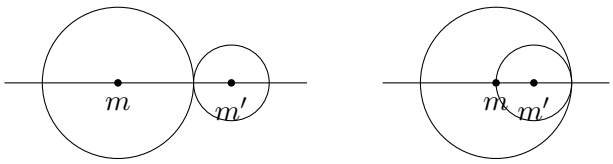
Es folgt

$$A|w_c - a| = \frac{AB}{A+B}|b-a| = A|w_c - b|.$$

Durch zyklische Permutation erhält man

$$|a-w_b||b-w_c||c-w_a| = \frac{B}{A}|a-w_c| \cdot \frac{C}{B}|b-w_a| \cdot \frac{A}{C}|c-w_b| = |a-w_c||b-w_a||c-w_b|. \qquad \square$$

Lemma 7.27. *Verschiedene Kreise $K_\rho(m)$ und $K_{\rho'}(m')$ berühren sich genau dann, wenn $|m-m'| = \rho + \rho'$ oder $|m-m'| = |\rho - \rho'|$. Gegebenenfalls liegt der Berührungspunkt auf mm'.*

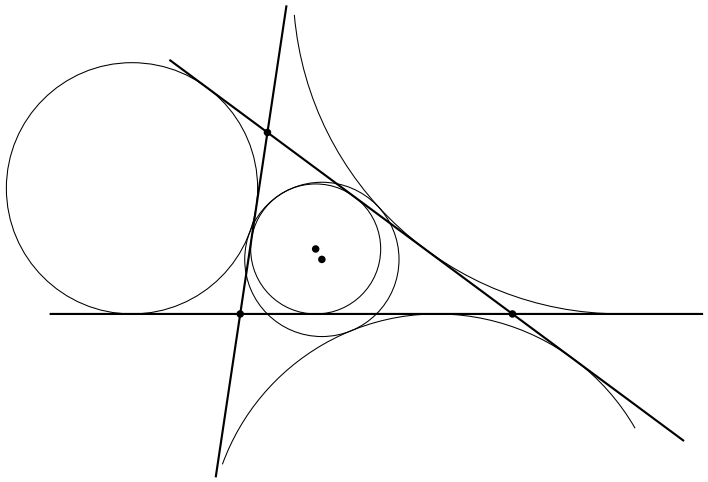


Beweis. O. B. d. A. sei $m' = (0,0) \neq m$. Jedes $x \in \mathcal{P}$ lässt sich eindeutig in der Form $x = \lambda m + \mu m^\perp$ schreiben. Es gilt $x \in K_\rho(m) \cap K_{\rho'}(0)$ genau dann, wenn

$$(\lambda^2 + \mu^2)|m|^2 = |x|^2 = (\rho')^2 \qquad ((\lambda - 1)^2 + \mu^2)|m|^2 = |x - m|^2 = \rho^2.$$

Ggf. gilt $(2\lambda - 1)|m|^2 = (\rho')^2 - \rho^2$. Dadurch ist λ eindeutig bestimmt. Der Schnittpunkt ist genau dann eindeutig, wenn die Gleichungen mit $\mu = 0$ gelten. Ggf. ist $x = \lambda m \in mm'$ und $|m| = |x| + |m - x| = \rho' + \rho$ oder $|m| = ||x| - |m - x|| = |\rho - \rho'|$ nach der Dreiecksungleichung. □

Satz 7.28 (Feuerbach)**.** *Der Feuerbachkreis eines Dreiecks berührt den Inkreis und die drei Ankreise.*



Beweis. Wie üblich sei $A := |b - c|$, $B := |a - c|$ und $C := |a - b|$. O. B. d. A. sei $(0,0)$ der Mittelpunkt des Umkreises und $|a| = |b| = |c| = \frac{ABC}{2|[a,b,c]|}$ sein Radius (Satz 7.9). Nach Satz 7.14 ist $f = \frac{1}{2}(a + b + c)$ der Mittelpunkt und $|a|/2$ der Radius des Feuerbachkreises. Sei w der Mittelpunkt und $|[a,b,c]|/\sigma$ der Radius des Inkreis (Satz 7.23).

Nach der Heron-Formel ist

$$\begin{aligned} 4[a,b,c]^2 &= \sigma(A + B - C)(B + C - A)(C + A - B) = ((A + B)^2 - C^2)(C^2 - (A - B)^2) \\ &= 2A^2B^2 + 2B^2C^2 + 2C^2A^2 - A^4 - B^4 - C^4 \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$4\sigma^2|w - f|^2 = \big|(A - B - C)a + (B - A - C)b + (C - A - B)c\big|^2.$$

Wegen $2\langle a, b\rangle = 2|a|^2 - \langle a - b, a - b\rangle = 2|a|^2 - C^2$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 4\sigma^2|w - f|^2 &= |a|^2\sigma^2 - \big(A^2(B - A - C)(C - A - B) + B^2(A - B - C)(C - A - B) \\ &\quad + C^2(A - B - C)(B - A - C)\big) \\ &= |a|^2\sigma^2 + A^2((C - B)^2 - A^2) + B^2((A - C)^2 - B^2) + C^2((A - B)^2 - C^2) \\ &= \sigma^2|a|^2 - 2\sigma ABC + 2A^2B^2 + 2B^2C^2 + 2C^2A^2 - A^4 - B^4 - C^4 \\ &= (\sigma|a| - 2|[a,b,c]|)^2. \end{aligned}$$

Daher gilt $|w-f|^2 = (\frac{|a|}{2} - \frac{|[a,b,c]|}{\sigma})^2$ und die erste Aussage folgt aus Lemma 7.27.

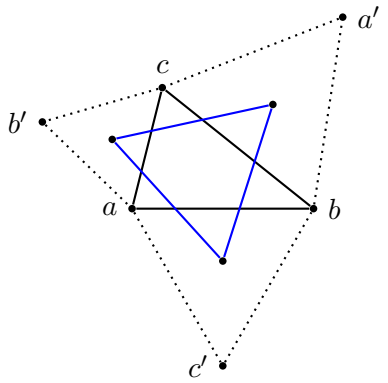
Sei nun w_a^* der Mittelpunkt und $\frac{|[a,b,c]|}{\sigma_a}$ der Radius des Ankreises wie in Satz 7.24. Dann gilt

$$\begin{aligned}4\sigma_a^2|w_a-f|^2 &= |-\sigma a + (A+B-C)b + (A+C-B)c|^2 = (-\sigma_a)^2|a|^2 - A^2(A+B-C)(A+C-B)\\ &\quad + B^2\sigma(A+C-B) + C^2\sigma(A+B-C)\\ &= \sigma_a^2|a|^2 + A^2((B-C)^2-A^2) + B^2((A+C)^2-B^2) + C^2((A+B)^2-C^2)\\ &= \sigma_a^2|a|^2 + 2\sigma_a ABC + 2A^2B^2 + 2B^2C^2 + 2C^2A^2 - A^4 - B^4 - C^4\\ &= (\sigma_a|a| + 2|[a,b,c]|)^2.\end{aligned}$$

Dies zeigt $|w_a - f| = \frac{|a|}{2} + \frac{|[a,b,c]|}{\sigma_a}$ und die zweite Aussage folgt. □

Bemerkung 7.29. Da der Feuerbachkreis alle Seiten des Dreiecks berührt oder schneidet, ist sein Radius mindestens so groß wie der Inkreisradius. Es gilt daher $|w-f| + \frac{|[a,b,c]|}{\sigma} = \frac{ABC}{2|[a,b,c]|}$.

Satz 7.30 (Napoleon)**.** *Sei a,b,c ein Dreieck und $a',b',c' \in \mathcal{P}$, sodass die Dreiecke $\Delta_c := \{a,b,c'\}$, $\Delta_a := \{b,c,a'\}$ und $\Delta_b := \{c,a,b'\}$ gleichseitig und nach „außen“ gerichtet sind, d. h. a und a' liegen auf verschiedenen Seiten von bc (analog für b',c'). Die Schwerpunkte von Δ_a, Δ_b und Δ_c bilden dann ein gleichseitiges Dreieck.*



Beweis. Sei $m_a := \frac{1}{2}(b+c)$ und s_a der Schwerpunkt von Δ_a. Nach Pythagoras gilt

$$|m_a - a'|^2 = |a'-b|^2 - \frac{|b-c|^2}{4} = \frac{3}{4}|b-c|^2.$$

Da s_a auch der Umkreismittelpunkt von Δ_a ist, gilt

$$\begin{aligned}\frac{|b-c|^2}{4} &= |b-s_a|^2 - |m_a - s_a|^2 = (|a'-m_a| - |m_a-s_a|)^2 - |m_a-s_a|^2\\ &= \frac{3}{4}|b-c|^2 - \sqrt{3}|b-c||m_a-s_a|.\end{aligned}$$

Es folgt $|m_a - s_a| = \frac{1}{2\sqrt{3}}|b-c|$. Wegen $|b-c| = |(b-c)^\perp|$ lässt sich nun s_a exakt berechnen:

$$s_a = m_a + \frac{1}{2\sqrt{3}}(b-c)^\perp.$$

Mit Bemerkung 7.3 ergibt sich

$$\begin{aligned}
4|s_a - s_b|^2 &= |b - a + \frac{1}{\sqrt{3}}(a + b - 2c)^\perp|^2 \\
&= |b-a|^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\langle b-a, (b-a+2(a-c))^\perp\rangle + \frac{1}{3}|a+b-2c|^2 \\
&= |b-a|^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}\langle b-a, (a-c)^\perp\rangle + \frac{1}{3}|a+b|^2 - \frac{4}{3}\langle a+b, c\rangle + \frac{4}{3}|c|^2 \\
&= \frac{4}{3}(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 - \langle a,b\rangle - \langle a,c\rangle - \langle b,c\rangle) + \frac{4}{\sqrt{3}}[b-a, c-a] \\
&= \frac{4}{3}(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 - \langle a,b\rangle - \langle a,c\rangle - \langle b,c\rangle) + \frac{4}{\sqrt{3}}[a,b,c]
\end{aligned}$$

Da dieser Ausdruck invariant unter zyklischer Permutation von a, b, c ist, sind die Seiten von s_a, s_b, s_c gleich lang. □

Bemerkung 7.31. Napoleons Satz gilt auch, wenn man die Dreiecke $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ nach „innen“ richtet und voraussetzt, dass a, b, c nicht gleichseitig ist (sonst fallen die Schwerpunkte von $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ zusammen). Im Beweis ändert sich nur das Vorzeichen von $\frac{4}{\sqrt{3}}[a, b, c]$.

Bemerkung 7.32. Nach Satz 3.9 lassen sich je zwei Dreiecke durch einen affinen Isomorphismus $f = (v, A) \in \mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ ineinander überführen. Ist dabei A orthogonal (d. h. $A^{\mathrm{t}}A = 1_2$), so nennt man die Dreiecke *kongruent*. Im Fall $A^{\mathrm{t}}A = \lambda 1_2$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ heißen die Dreiecke *ähnlich*.

Definition 7.33. Für ein Dreieck a, b, c bezeichnen wir die Zahlen

$$\alpha := \frac{\langle a-b, a-c\rangle}{|a-b||a-c|}, \qquad \beta := \frac{\langle b-a, b-c\rangle}{|b-a||b-c|}, \qquad \gamma := \frac{\langle c-a, c-b\rangle}{|c-a||c-b|}$$

als *Winkel*.

Bemerkung 7.34.

(i) Unsere Winkel sind eigentlich die Kosinuswerte der „Winkel“. Da der Kosinus auf $[0, \pi]$ injektiv ist, sind die Sichtweisen äquivalent. Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt $-1 < \alpha, \beta, \gamma < 1$.

(ii) Ein Dreieck ist genau dann rechtwinklig, wenn ein Winkel 0 ist. Es ist genau dann gleichseitig, wenn alle Winkel $\frac{1}{2}$ sind. Sind alle Winkel positiv (bzw. ein Winkel negativ), so heißt das Dreieck *spitzwinklig* (bzw. *stumpfwinklig*).

(iii) Der nächste Satz entspricht der Aussage, dass die Innenwinkelsumme im Dreieck stets π beträgt.

Lemma 7.35 („Innenwinkelsumme“)**.** *Für die Winkel α, β, γ eines Dreiecks gilt*

$$\gamma = \sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)} - \alpha\beta.$$

Beweis. Lemma 7.4 ist

$$\begin{aligned}\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)} - \alpha\beta &= \frac{|[a-b,a-c]|}{BC}\frac{|[b-a,b-c]|}{AC} - \frac{\langle a-b,a-c\rangle\langle b-a,b-c\rangle}{ABC^2} \\ &= \frac{[a-b,a-c]^2 - \langle a-b,a-c\rangle\langle b-a,b-c\rangle}{ABC^2} \\ &= \frac{B^2C^2 - \langle a-b,a-c\rangle^2 - \langle a-b,a-c\rangle\langle b-a,b-c\rangle}{ABC^2} \\ &= \frac{B^2C^2 - \langle a-b,a-c\rangle C^2}{ABC^2} = \frac{\langle a-c,a-c\rangle - \langle a-b,a-c\rangle}{AB} \\ &= \frac{\langle c-a,c-b\rangle}{AB} = \gamma.\end{aligned}$$

□

Satz 7.36 (Kongruenzsätze)**.** *Für Dreiecke Δ und Δ' sind folgende Aussagen äquivalent:*

(K) *Δ und Δ' sind kongruent.*

(SSS) *Die Seitenlängen von Δ und Γ stimmen bis (auf die Reihenfolge) überein.*

(SWS) *Zwei Seitenlängen und der eingeschlossene Winkel stimmen überein.*

(SSW) *Zwei Seitenlängen und der gegenüber der größeren Seite liegende Winkel stimmen überein.*

(SWW) *Eine Seitenlänge und zwei Winkel stimmen überein.*

Beweis. Seien a, b, c die Ecken, A, B, C die Seitenlängen und α, β, γ die Winkel von Δ. Die entsprechenden Größen für Δ' seien a', b', c' usw.

(K)⇒(SSS): Sei $f = (v, S) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ mit $S^{\mathrm{t}}S = 1_2$ und $f(\Delta) = \Delta'$. Dann gilt $C' = |a' - b'| = |Sa + v - Sb - v| = |a - b| = C$ usw.

(SSS)⇒(SWS): Nach dem Kosinussatz gilt

$$\alpha' := \frac{\langle a'-b', a'-c'\rangle}{B'C'} = \frac{(C')^2 + (B')^2 - (A')^2}{2BC} = \frac{C^2 + B^2 - A^2}{2BC} = \alpha.$$

(SWS)⇒(SSW): O. B. d. A. sei $C' = C \geq B' = B$ und $\alpha' = \alpha$. Aus dem Kosinussatz erhält man $A' = A$ und anschließend $\gamma' = \gamma$.

(SSW)⇒(SWW): O. B. d. A. sei $C' = C \geq B' = B$ und $\gamma' = \gamma$. Der Kosinussatz liefert diesmal eine quadratische Gleichung $A^2 + B^2 = C^2 + 2\gamma AB$ in A. Wegen $C \geq B$ ist nur die Lösung

$$A = \gamma B + \underbrace{\sqrt{(\gamma^2-1)B^2 + C^2}}_{\geq |\gamma| B} = B' + \sqrt{((\gamma')^2 - 1)(B')^2 - (C')^2} = A'$$

möglich. Mit dem Kosinussatz erhält man nun wahlweise $\alpha' = \alpha$ oder $\beta' = \beta$.

(SWW)⇒(K): Sei $\alpha' = \alpha$ und $\beta' = \beta$. Nach Lemma 7.35 ist $\gamma' = \gamma$. Sei also o. B. d. A. $C' = C$. Nach einer Translation können wir $a' = a = (0, 0)$ annehmen. Nach einer Drehung gilt $b' = b = C(1, 0)$. Sei $c = B(x, y)$. Dann gilt $\alpha = \langle (x, y), (1, 0)\rangle = x$ und $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Daher liegt c entweder auf der Geraden $G := \mathbb{R}(\alpha, \sqrt{1-\alpha^2})$ oder auf der Gerade $\mathbb{R}(\alpha, -\sqrt{1-\alpha^2})$. Indem wir notfalls an der x-Achse spiegeln, dürfen wir den ersten Fall annehmen. Sei nun $b - c = A(x, y)$. Dann ist $\beta = \langle (1, 0), (x, y)\rangle = x$ und $y = \pm\sqrt{1 - \beta^2}$. Da c eine positive y-Koordinate hat, muss $y = -\sqrt{1-\beta^2}$ gelten. Also liegt c auf der Geraden $H := b + \mathbb{R}(\beta, -\sqrt{1-\beta^2})$. Insgesamt ist $c = G \wedge H = c'$, d. h. Δ und Δ' sind kongruent. □

Satz 7.37 (Ähnlichkeitssätze)**.** *Für Dreiecke Δ und Δ' sind folgende Aussagen äquivalent:*

(Ä) Δ *und* Δ' *sind ähnlich.*

(WW) Zwei Winkel von Δ *und* Δ' *stimmen überein.*

(SSS) Die Verhältnisse der Seitenlängen von Δ *und* Δ' *stimmen überein.*

(SWS) Ein Winkel und das Verhältnis der anliegenden Seiten stimmen überein.

(SSW) Ein Seitenverhältnis und der, der größeren Seite gegenüberliegende Winkel stimmen überein.

Beweis. Wir benutzen die Bezeichnungen wie in Satz 7.36.

(Ä)⇒(WW): Sei $f = (v, S) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ mit $S^{\mathrm{t}}S = \lambda 1_2$ und $f(\Delta) = \Delta'$. Dann gilt $\langle a' - c', b' - c'\rangle = \langle S(a - c), S(b - c)\rangle = \lambda\langle a - c, b - c\rangle$. Daraus folgt die Behauptung.

(WW)⇒(SSS): Aus Lemma 7.4 folgt

$$\frac{1-\alpha^2}{1-\beta^2} = \frac{[a-b,a-c]^2}{B^2C^2}\frac{A^2C^2}{[b-a,b-c]^2} = \frac{A^2}{B^2}.$$

Dies zeigt $A'/A = B'/B = C'/C$.

(SSS)⇒(SWS): Da durch Skalierung die Winkel erhalten bleiben, können wir $A' = A$, $B' = B$ und $C' = C$ annehmen. Nach dem (SSS)-Kongruenzsatz sind Δ und Δ' kongruent und haben daher auch identische Winkel.

(SWS)⇒(SSW): Sei $A'/A = B'/B$ und $\gamma' = \gamma$. Nach Skalierung können wir wieder $A' = A$ und $B' = B$. Nun sind Δ und Δ' nach dem (SWS)-Kongruenzsatz kongruent.

(SSW)⇒(Ä): Diesmal folgt die Behauptung aus dem (SSW)-Kongruenzsatz. □

Lemma 7.38. *Ein Punkt $x \in \mathcal{P}$ liegt genau dann auf dem Umkreis eines Dreiecks a, b, c falls*

$$[a,b,c]|x|^2 = [x,b,c]|a|^2 + [a,x,c]|b|^2 + [a,b,x]|c|^2$$

gilt.

Beweis. Da die Gleichung für $x = a, b, c$ erfüllt ist, genügt es zu zeigen, dass die Gleichung einen Kreis beschreibt. Da a, b, c in allgemeiner Lage sind, gilt $[a, b, c] \neq 0$. Wir können also durch $[a, b, c]$ teilen. Verwendet man $[x, b, c] = \langle x, b^\perp\rangle + [b, c] + \langle c^\perp, x\rangle$ usw., so erhält man die äquivalente Gleichung $|x|^2 = 2\langle x, m\rangle - |m|^2 + \rho^2$ für geeignete $m \in \mathcal{P}$ und $\rho \in \mathbb{R}$. Dies beschreibt genau $K_\rho(m)$. □

Lemma 7.39. *Für $a, b, c, d, x \in \mathcal{P}$ hängt*

$$\kappa_{abcd} := [a,b,c]|x-d|^2 - [b,c,d]|x-a|^2 + [c,d,a]|x-b|^2 - [d,a,b]|x-c|^2$$

nicht von x ab.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}[a,b,c] - [b,c,d] + [c,d,a] - [d,a,b] = {} & [a,b] + [b,c] + [c,a] - [b,c] - [c,d] - [d,b] + [c,d] \\ & + [d,a] + [a,c] - [d,a] - [a,b] - [b,d] = 0.\end{aligned}$$

Wegen $|x - d|^2 = |x| - 2\langle x, d\rangle$ heben sich die $|x|^2$-Terme auf. Wegen $[a, b]d + [b, d]a + [d, a]b = 0$ (Lemma 5.10) heben sich auch die linearen Terme in x auf. □

Definition 7.40. Ein *Viereck* besteht aus vier Punkten $a, b, c, d \in \mathcal{P}$, von denen keine drei kollinear sind.

Satz 7.41 (Ptolemäus)**.** *Sei $a, b, c, d \in \mathcal{P}$ ein Viereck, sodass a, b (bzw. b, c) auf gleichen Seite von cd (bzw. ad). Dann sind äquivalent:*

(1) a, b, c, d liegen auf einem Kreis.

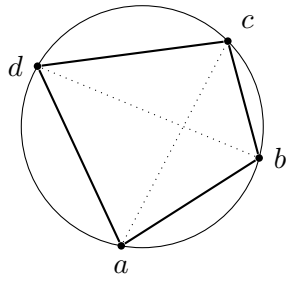
(2) Die Winkel an a und b sind gleich (bzgl. c, d).

(3) Die Winkel an a und c addieren sich zu 0.

(4) $\kappa_{abcd} = 0$.

(5) $|a-b||c-d| + |a-d||b-c| = |a-c||b-d|$.

Gegebenenfalls nennt man a, b, c, d ein Sehnenviereck.



Beweis. (1)⇒(2): Da die Dreiecke a, c, d und b, c, d den gleichen Umkreis(radius) haben, gilt

$$\frac{\langle a-c, a-d\rangle^2}{|a-c|^2|a-d|^2} = 1 - \frac{[a,c,d]^2}{|a-c|^2|a-d|^2} = 1 - \frac{[b,c,d]^2}{|b-c|^2|b-d|^2} = \frac{\langle b-c, b-d\rangle^2}{|b-c|^2|b-d|^2}.$$

Da die Abbildung $x \mapsto \frac{\langle x-c, x-d\rangle^2}{|x-c|^2|x-d|^2}$ auf dem Kreisbogen zwischen a und b stetig ist, muss sie sogar konstant sein. Dies zeigt die Behauptung.

(2)⇒(1): Die obige Rechnung zeigt, dass a, c, d und b, c, d den gleichen Umkreisradius haben. Durch die Punkte c, d ist der Umkreismittelpunkt bereits eindeutig festgelegt. Daher liegen a, b, c, d auf dem gemeinsamen Umkreis.

(1)⇒(3): Wie in (1)⇒(2) zeigt man, dass die Winkel an a und c betragsmäßig gleich sind. Nach (2) dürfen wir c auf dem Kreis verschieben, sodass ac durch den Mittelpunkt des Kreises geht. Nach Thales sind die Winkel an b und d gleich 0. Es gibt nun $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda(a-d)^\perp = c-d$, $\mu(a-b)^\perp = c-b$, $\lambda > 0$ und $\mu < 0$ (Drehung gegen den Uhrzeigersinn). Dies zeigt

$$\langle c-b, c-d\rangle = \lambda\mu\langle a-c, a-d\rangle.$$

Daher haben die Winkel an a und c verschiedene Vorzeichen und addieren sich zu 0.

(3)⇒(1): Analog zu (2)⇒(1).

(1)⇒(4): Wählt man für x den Kreismittelpunkt in Lemma 7.39, so folgt $\kappa_{abcd} = 0$.

(4)⇒(5): Wir zeigen (unabhängig von (4))

$$\begin{aligned} 4\kappa_{abcd}^2 = &(|a-b||c-d| + |a-c||b-d| + |a-d||b-c|) \\ &(|a-b||c-d| + |a-c||b-d| - |a-d||b-c|) \\ &(|a-b||c-d| - |a-c||b-d| + |a-d||b-c|) \\ &(-|a-b||c-d| + |a-c||b-d| + |a-d||b-c|). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Nach Translation dürfen wir $d = 0$ annehmen. Eine Rechnung zeigt

$$|a-b||c| = |a||b||c|\Big|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}\Big|.$$

Das erste Produkt in 7.1 hat daher die Form

$$|a||b||c|\Big(\big|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}\big| + \big|\frac{b}{|b|^2} - \frac{c}{|c|^2}\big| + \big|\frac{c}{|c|^2} - \frac{a}{|a|^2}\big|\Big).$$

Mit der Heron-Formel für das Dreieck $\frac{a}{|a|^2}$, $\frac{b}{|b|^2}$, $\frac{c}{|c|^2}$ ist die rechte Seite von (7.1) gleich

$$4|a|^4|b|^4|c|^4\Big[\frac{a}{|a|^2}, \frac{b}{|b|^2}, \frac{c}{|c|^2}\Big] = 4\big|[a,b]|c|^2 + [b,c]|a|^2 + [c,a]|b|^2\big|^2 = 4\kappa_{abc0}^2.$$

Nach (4) ist nun eines der vier Produkte 0. Nach der Dreiecksungleichung für $\frac{a}{|a|^2}$, $\frac{b}{|b|^2}$, $\frac{c}{|c|^2}$ sind die Punkte kollinear. Da a, c auf verschiedenen Seiten von bd liegen, muss $\big|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}\big| + \big|\frac{b}{|b|^2} - \frac{c}{|c|^2}\big| = \big|\frac{a}{|a|^2} - \frac{c}{|c|^2}\big|$ gelten. Also verschwindet das dritte Produkt in (7.1).

(5)⇒(4): Folgt aus (7.1).

(4)⇒(1): Mit $x = 0$ in κ_{abcd} folgt die Behauptung aus Lemma 7.38. □

Stichwortverzeichnis

Symbole

$\langle a, b\rangle$, 32
$\mathrm{AGL}(2, K)$, 11
AΓL, 10
$|a|$, 32
$a \perp b$, 32
$a^{\perp}$, 32
$\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$, 6
$d(a, G)$, 33
$\mathrm{Dil}(\mathcal{E})$, 6
$\overline{\mathcal{E}}$, 27
$\mathcal{E}^*$, 29
$\mathcal{E}_F$, 28
$\mathcal{E} \cong \mathcal{E}'$, 6
$\mathcal{E}(K)$, 4
$\mathcal{E}(R)$, 4
$[G]$, 5
$[\mathcal{G}]$, 5
$\Gamma_{A,x,\alpha}$, 6
$G_{a,v}$, 4
$G \parallel H$, 2
$G \wedge H$, 4
$K_\rho(m)$, 33
o, 9
$\mathrm{ord}(\mathcal{E})$, 5
$\mathrm{PGL}(3, K)$, 28
$[\mathcal{P}]$, 5
R°, 29
$\mathrm{Tra}(\mathcal{E})$, 7
W_a, 38
W_a^*, 38
$[x]$, 5
$[x, y]$, 23
xy, 3
$[x, y, z]$, 23
κ_{abcd}, 45

A

(A1)–(A4), 3
Abstand, 33
Ähnlichkeitssätze, 45
André, 18
Ankreis, 39
Automorphismengruppe, 6
Automorphismus, 6

B

Berührung, 38
Brianchon, 31
Bruck-Ryser, 5

C

Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 32
Ceva, 24
Ceva-Punkt, 25

D

Desargues, 16
  kleiner Satz, 12
  projektiver, 30
Desargues-Ebene, 13
Diagonalensatz, 25
Diagonalpunkt, 26
Dilatation, 6
Dreieck, 32
  gleichschenkliges, 32
  gleichseitiges, 32
  kongruentes, 43
  rechtwinkliges, 32
  spitzwinkliges, 43
  stumpfwinkliges, 43
  ähnliches, 43
Dreiecksungleichung, 32

E

Ebene
  affine, 3
  duale, 29
  euklidische, 4
  projektive, 27
  selbstduale, 30
Euklids Elemente, 3
Euler, 34
Euler-Gerade, 34

F

Fano-Ebene, 28
Feuerbach, 35, 41
Feuerbachkreis, 35
Feuerbachpunkt, 35
Fixgerade, 7
Flächeninhalt, 32

G

Gauß, 3, 26
Gauß-Gerade, 26
Gerade, 2
  geht durch Punkt, 2
  kollineare, 2
  orthogonale, 32
  senkrechte, 32
Geradenbüschel, 5

H

Hall, 18
Hall-Ebene, 19
Heron-Formel, 36

Hessenberg, 20
Hilbert, 3
Höhe, 33
Höhensatz, 35
Höhenschnittpunkt, 33

I
Inkreis, 38
Innenwinkelsumme, 43
Inneres, 32
Inverser Pythagoras, 35
Isomorphismus, 6

K
Kathetensatz, 35
Kollineation, 6
Kongruenzsätze, 44
Koordinatenebene, 4
    projektive, 28
Kosinussatz, 36
Kreis, 33

L
Länge, 32

M
Menelaos, 24
Menelaos-Gerade, 25
Mittelpunkt, 25, 33
Mittelsenkrechte, 33
Moulton-Ebene, 9
Multiplikator, 11
    trivialer, 11

N
Napoleon, 42
Norm, 32

O
Oktonionen, 20
Ordnung, 5, 28

P
(P1)–(P4), 27
Pappus, 21
    kleiner Satz, 12
    projektiver, 31
Pappus-Ebene, 20
Parallele, 2
Parallelogrammsatz, 10
Pascal, 22
Pascal-Gerade, 23
projektiven Abschluss, 27
Ptolemäus, 46
Punkt, 2
    allgemeiner Lage, 3
    liegt auf Gerade, 2

9-Punkte-Satz, 37
Pythagoras, 35

Q
(Q1)–(Q6), 17
Quasikörper, 17

R
Radius, 33
Richtung, 5, 7

S
Scherensatz, 17
    kleiner, 12
Schiefkörper, 4
Schnittpunkt, 2
Schwerpunkt, 33
Sehnenviereck, 46
Seite, 32
Seitenhalbierende, 33
Sinussatz, 36
Skalarprodukt, 32
SSS, 44, 45
SSW, 44, 45
Stewart, 37
Strahlensatz, 15
SWS, 44, 45
SWW, 44

T
Tangente, 38
Thales, 35
Translation, 7
Translationsebene, 8
trigonometrischer Pythagoras, 33

U
Umfang, 32
Umkreis, 33

V
Varignon, 26
Verbindungsstrecke, 32
Viereck, 46
    allgemeines, 26

W
Winkel, 43
Winkelhalbierende
    äußere, 38
    innere, 38
Winkelhalbierendensatz, 40
WW, 45