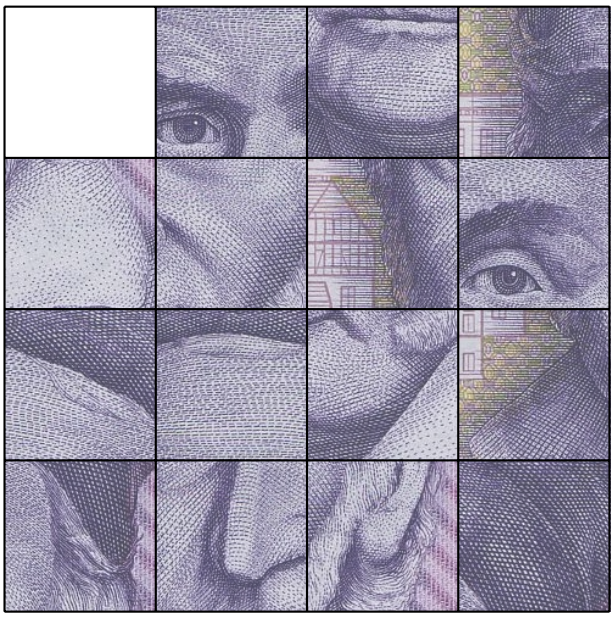
Lineare Algebra

Benjamin Sambale
Leibniz Universität Hannover

Version: 14. November 2026



Inhaltsverzeichnis

Einleitung **5**
Vorwort . . . 5
Notation . . . 6
Konventionen . . . 9

Lineare Algebra I **10**

1 Aussagenlogik und Mengenlehre **11**
1.1 Aussagen . . . 11
1.2 Mengen . . . 13
1.3 Vollständige Induktion . . . 16

2 Kartesische Produkte und Funktionen **17**
2.1 Paare und Tupel . . . 17
2.2 Injektive und surjektive Funktionen . . . 19

3 Körper und Vektorräume **23**
3.1 Gruppen und Körper . . . 23
3.2 Vektorräume und Unterräume . . . 25

4 Basen und Dimension **29**
4.1 Lineare Unabhängigkeit und Erzeugendensysteme . . . 29
4.2 Charakterisierung und Existenz von Basen . . . 31
4.3 Dimension . . . 33

5 Matrizen **35**
5.1 Der Matrizen-Vektorraum . . . 35
5.2 Matrizenmultiplikation . . . 37
5.3 Der Rang einer Matrix . . . 39

6 Der Gauß-Algorithmus **41**
6.1 Gleichungssysteme . . . 41
6.2 Elementare Zeilenoperationen . . . 43
6.3 Anwendungen . . . 45

7 Lineare Abbildungen **50**
7.1 Homomorphismen und Isomorphismen . . . 50
7.2 Darstellungsmatrizen . . . 54
7.3 Dualräume . . . 59

8 Eigenwerte und Eigenvektoren **64**
8.1 Definitionen und Beispiele . . . 64

8.2 Diagonalisierbarkeit . . . 65

9 Determinanten **68**
9.1 Rekursive Definition . . . 68
9.2 Eigenschaften . . . 71
9.3 Laplace-Entwicklung . . . 73
9.4 Die Leibniz-Formel . . . 76

Aufgaben **81**

Lineare Algebra II **86**

10 Polynome **87**
10.1 Der Vektorraum der Polynome . . . 87
10.2 Nullstellen . . . 90
10.3 Charakteristische Polynome . . . 93
10.4 Minimalpolynome . . . 96

11 Euklidische Geometrie **100**
11.1 Skalarprodukte . . . 100
11.2 Orthonormalbasen . . . 103
11.3 Symmetrische und orthogonale Abbildungen . . . 105
11.4 Komplexe Zahlen . . . 108
11.5 Der Hauptachsensatz . . . 111

12 Bilinearformen **115**
12.1 Gram-Matrizen . . . 115
12.2 Sylvesters Trägheitssatz . . . 118
12.3 Positiv definite Matrizen . . . 122

13 Unitäre Räume **127**
13.1 Sesquilinearformen . . . 127
13.2 Adjungierte Abbildungen . . . 129
13.3 Der Spektralsatz . . . 131

14 Die Jordan-Normalform **136**
14.1 Haupträume . . . 136
14.2 Jordanblöcke . . . 140
14.3 Anwendungen . . . 144

15 Die Frobenius-Normalform **147**
15.1 Irreduzible Polynome . . . 147
15.2 Begleitmatrizen . . . 150
15.3 Zentralisatoren . . . 155
15.4 Zerfällungskörper . . . 157

16 Die Jordan-Chevalley-Zerlegung **159**
16.1 Der chinesische Restsatz . . . 159
16.2 Separable und halbeinfache Abbildungen . . . 162
16.3 Verallgemeinerte Jordanblöcke . . . 163

17 Kronecker-Produkte **167**
17.1 Definition und Eigenschaften 167
17.2 Lineare Matrixgleichungen 171
17.3 Das Hadamard-Produkt 173

Aufgaben **176**

Lineare Algebra III **183**

18 Numerische Verfahren **184**
18.1 Effiziente Arithmetik 184
18.2 Die Konditionszahl 188
18.3 Stabile Varianten des Gauß-Algorithmus 192
18.4 Iterative Verfahren 197
18.5 Matrixnormen 201
18.6 Eigenwertberechnung 204
18.7 Orthonormalisierung 210

19 Analytische Aspekte **213**
19.1 Eigenwertabschätzungen 213
19.2 Der Spektralradius 214
19.3 Die Exponentialfunktion einer Matrix 216
19.4 Nicht-negative Matrizen 219
19.5 Der Page-Rang 224

20 Lineare Optimierung **226**
20.1 Lineare Programme 226
20.2 Konvexe Mengen 228
20.3 Der Simplex-Algorithmus 231

21 Gitter und quadratische Formen **236**
21.1 Gitter 236
21.2 Die Minimal-Norm 238
21.3 Ganzzahlige Matrizen 241
21.4 Sätze von Hermite und Minkowski 245
21.5 Der LLL-Algorithmus 247
21.6 Quadratische Formen 251
21.7 Sukzessive Minima 256

Aufgaben **259**

Anhang **264**

Konvexe Optimierung **265**

Stichwortverzeichnis **271**

Einleitung

Vorwort

Dieses Buch bespricht die aus meiner Sicht wichtigsten Inhalte der linearen Algebra in möglichst prägnanter Form. Im Gegensatz zu vielen Büchern für Studienanfänger wird auf ausschweifende Erläuterungen und fachfremde Motivationsbeispiele verzichtet. Im Folgenden gehe ich auf Inhalt und Alleinstellungsmerkmale ein.

Der erste Teil beginnt mit einer Einführung in die elementare Aussagenlogik und endet auf dem üblichen Weg mit der Leibniz-Formel für Determinanten. Das Signum einer Permutation wird dabei über die Determinante der Permutationsmatrix definiert. Der wenig bekannte Satz 7.36 von Fillmore zeigt, dass innerhalb der Ähnlichkeitsklasse einer nicht-skalaren Matrix jede zur Spur passende Diagonale realisiert wird. Außerdem werden die Cauchy-Binet-Formel und die Eindeutigkeit der reduzierten Zeilenstufenform bewiesen (nützlich zur Korrektur von Klausuren). Der Zassenhaus-Algorithmus ermöglicht die simultane Berechnung von Durchschnitt und Summe von Unterräumen.

Im zweiten Teil werden zunächst Polynome als Werkzeug eingeführt. Hier stellen wir den Satz 10.36 von Mirsky vor, der die Existenz von Matrizen mit vorgegebenen Eigenwerten und Hauptdiagonaleinträgen garantiert. Darauf folgend beschäftigen wir uns mit euklidischer Geometrie und unitären Räumen. Neben dem wichtigen Spektralsatz für normale Matrizen ergibt sich auch der Satz 13.29 von Schur-Horn, der ähnlich wie Mirskys Satz ein inverses Problem löst. Der in diesem Kontext selten behandelte Satz 11.19 von Mazur-Ulam besagt, dass abstandserhaltende Abbildungen affin sind. Danach wird die Jordansche Normalform konstruiert und für diverse Anwendungen genutzt. Abweichend von anderen Büchern behandele ich zusätzlich die Normalformen von Frobenius und Weierstraß in voller Allgemeinheit. Der Beweis verzichtet auf die Theorie der Moduln und benutzt stattdessen, einer Arbeit von Jacob folgend, den Dualraum. Die Begleitmatrizen aus der Frobenius-Normalform geben Anlass, Zerfällungskörper als Zentralisatoren von Matrizen einzuführen. Als Höhepunkt ergibt sich eine Dimensionsformel von Frobenius für den Zentralisator einer Matrix (Satz 15.32). Zerfällungskörper spielen ebenso in der Jordan-Chevalley-Zerlegung für separable Matrizen eine Rolle. Der zweite Teil schließt mit einem Exkurs zu Kronecker-Produkten. Hier werden die Sätze von Roth über die Lösbarkeit der Matrixgleichung $AX - YB = C$ behandelt.

Der dritte und letzte Teil widmet sich praktischen Aspekten der linearen Algebra. Am Anfang stehen numerische Verfahren wie die schnelle Fourier-Transformation und der Strassen-Algorithmus. Anschließend geht es um stabile Matrix-Algorithmen wie die Singulärwert-, LR-, QR- und Cholesky-Zerlegung. Bei den iterativen Verfahren sind der Francis-Algorithmus und das Cholesky-Verfahren zur Eigenwertberechnung hervorzuheben. Beide Beweise sind in dieser Kürze nur schwer in der Literatur zu finden. Als Nächstes untersuchen wir analytische Themen wie Abschätzungen des Spektralradius, nicht-negative Matrizen und die Exponentialfunktion. Hier wird auf eine Version des Hauptzweigs des Matrixlogarithmus eingegangen (Satz 19.19). Ein weiteres Kapitel beschreibt den Simplex-Algorithmus aus der linearen Optimierung. Im letzten Kapitel des Buchs wird die Theorie der Gitter und quadratischen Formen ausführlich dargelegt. Erwähnenswert sind die Smith-Normalform für ganzzahlige Matrizen, Minkowskis

Linearformensatz und der LLL-Algorithmus. Bei den quadratischen Formen steht die Reduktionstheorie von Minkowski im Zentrum.

Alle drei Teile enden mit theorieorientierten Übungsaufgaben, die im Selbststudium durch praktische Aufgaben ergänzt werden sollten. Im Anhang befindet sich die etwas technische Lösung des Kepler-Problems für Gitter im $\mathbb{R}^3$ nach Gauß und Barnes. Abgesehen von Gittern wird die allgemeine Theorie der Moduln über beliebigen Ringen in diesem Buch nicht aufgegriffen. Im Kontext interessante, aber im Rahmen dieses Buchs nicht beweisbare Theoreme werden als solche in Bemerkungen ausgesprochen.

Die erste Version des Skripts entstand 2020/21 im Rahmen der Vorlesungen Lineare Algebra A & B an der Leibniz Universität Hannover. Eine KI-generierte englische Übersetzung findet man auf meiner Homepage. Ich danke Annika Bartelt, Alexander Ivanov, Gereon Koßmann, Paulina Ligocka, Christoph Pegel, Dawid Sokolihs, Marcos Soriano Sola und Claude Opus für Fehlerhinweise (weitere Hinweise sind willkommen).

Hannover, 14. November 2026 Benjamin Sambale

Notation

bzgl.	bezüglich
d. h.	das heißt
ggf.	gegebenenfalls
o. B. d. A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
u. ä.	und ähnliche
vgl.	vergleiche
$\mathbf{w}, \mathbf{f}$	wahr, falsch
$\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \exists, \forall$	logische Ausdrücke
$:=$, $:\Leftrightarrow$	linke Seite wird durch rechte Seite definiert
$\square$	Beweisende
$\varnothing$	leere Menge
$\mathcal{P}(M)$	Potenzmenge von M
$\cup$, $\dot\cup$, $\cap$, $\setminus$	Vereinigung (disjunkt), Durchschnitt, Differenz von Mengen
$\lvert A\rvert$	Mächtigkeit von A (Anzahl der Elemente)
(a,b), $(x_1,\dots,x_n)$	Paar, n-Tupel
$A_1 \times \ldots \times A_n$	kartesisches Produkt von Mengen $A_1,\dots,A_n$
$[a]$	Äquivalenzklasse von $a \in A$
$A \to B$, $a \mapsto b$	Abbildung von A nach B
$\operatorname{Abb}(A,B)$	Menge aller Abbildungen $A \to B$
$\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}$	natürliche Zahlen (ohne und mit 0), ganze Zahlen
$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{C}$	rationale, reelle (positive, nicht-negative) und komplexe Zahlen
$\overline{\mathbb{Q}}$	algebraische Zahlen
$\mathbb{F}_2$	Körper mit zwei Elementen
$K^\times$	$= K \setminus \{0\}$ (multiplikative Gruppe)
$f_{\lvert A}$, f^{-1}, $f \circ g$	Einschränkung, Umkehrfunktion und Komposition von Funktionen
f^*	duale oder zu f adjungierte Abbildung
$f(A), f^{-1}(B), \operatorname{Ker} f$	Bild, Urbild, Kern von f
id, id_V	Identität (auf V)

0_K, 0_V, 1_G	Nullelement, Nullvektor, neutrales Element in G
δ_{ij}	Kronecker-Delta
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$	Linearkombination
$U \leq V$, $U < V$, V/U	Unterraum (echter), Faktorraum
$H \leq G$, $H < G$	Untergruppe (echte) von G
$U \cong V$	isomorphe Vektorräume
V^*, V^{**}	Dualraum, Bidualraum
U^0, U_0	duale Komplemente
$V \oplus W$, $V \times W$	direkte Summe/Produkt von V und W
$V \otimes W$	Tensorprodukt von V und W
$e_1, \ldots, e_n$	Standardbasis von K^n
$b_1^*, \ldots, b_n^*$	duale Basis
$\langle S \rangle$, $\langle s_1, \ldots, s_n \rangle$	Spann von S
$\dim_K V = \dim V$	Dimension von V über K
${}_B[v]$	Koordinatendarstellung von v bzgl. der Basis B
$\mathrm{Hom}(V, W)$	Vektorraum aller linearen Abbildungen $V \to W$
$\mathrm{End}(V)$	$= \mathrm{Hom}(V, V)$
$K^{n \times m}$	Vektorraum der $n \times m$-Matrizen über K
$\mathrm{GL}(V)$, $\mathrm{GL}(n, K)$	allgemeine lineare Gruppe
$\mathrm{SL}(n, K)$	spezielle lineare Gruppe
$\mathrm{O}(V)$, $\mathrm{O}(n, K)$	orthogonale Gruppe
$\mathrm{SO}(n, K)$	spezielle orthogonale Gruppe
$\mathrm{U}(V)$, $\mathrm{U}(n, \mathbb{C})$	unitäre Gruppe
$\mathrm{SU}(n, \mathbb{C})$	spezielle unitäre Gruppe
$\mathrm{Aff}(V)$	affine Gruppe
$0_{n \times m}$, 0_n, 1_n	Nullmatrix, Einheitsmatrix
E_{st}	Standardmatrix mit 1 an Position (s, t)
$A \sim B$	A zeilen-äquivalent zu B
$A \approx B$	A ähnlich zu B
$(A\|b)$	erweiterte Koeffizientenmatrix
A_{st}	$= (a_{ij} : i \neq s, j \neq t)$ (Streichen von Zeile/Spalte)
A^{-1}, A^+	Inverse und Pseudoinverse von A
A^{t}, $A^{-\mathrm{t}}$	Transponierte und Transponiert-Inverse von A
$\widehat{A}$, $\widetilde{A}$	Zeilenstufenform, komplementäre Matrix von A
$\overline{A}$, A^*	komplex-konjugierte, adjungierte Matrix von A
$\mathrm{rk}\, A$, $\mathrm{tr}\, A$, $\det A$	Rang, Spur, Determinante von A
$\mathrm{vol}\, A$	Volumen (Jordan-Maß) von $A \subseteq \mathbb{R}^n$
${}_C[f]_B$, $[f]$, ${}_C\Delta_B$	Darstellungsmatrix, Basiswechselmatrix
$E_\lambda(f)$, $H_\lambda(f)$	Eigenraum, Hauptraum zum Eigenwert λ von f
S_n	symmetrische Gruppe vom Grad n
A_n	alternierende Gruppe vom Grad n
$\mathrm{sgn}\, \sigma$, P_σ	Signum, Permutationsmatrix von $\sigma \in S_n$
$K[X]$	Vektorraum der Polynome mit Koeffizienten in K
$K(X)$	Körper der rationalen Funktionen
α'	Ableitung von $\alpha \in K[X]$
$\deg \alpha$	Grad von $\alpha \in K[X]$
$\alpha \mid \beta$	α teilt β
$\alpha \equiv \beta \pmod{\delta}$	$\delta \mid \alpha - \beta$
χ_A, χ_f, μ_A, μ_f	charakteristisches Polynom, Minimalpolynom von A, f

μ_v	Minimalpolynom bzgl. des zyklischen Unterraums
$[v,w]$, $\lvert v\rvert$	Skalarprodukt, euklidische Norm von v
$v \perp w$	v und w sind orthogonal, d. h. $[v,w]=0$
π	Länge des Halbkreisbogens mit Radius 1
$\cos\varphi$, $\sin\varphi$	Kosinus, Sinus von φ
$S^\perp$	orthogonales Komplement von $S \subseteq V$
$v_1 \times \ldots \times v_k$	Vektorprodukt/Kreuzprodukt
$D(\varphi)$, $S(\varphi)$	Drehung, Spiegelung in $\mathbb{R}^2$
$D_{st}(\phi)$	Givens-Rotation
S_v	Spiegelung an der Hyperebene $v^\perp$
$\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $\overline{z}$	Realteil, Imaginärteil, komplexe Konjugation von z
i	imaginäre Einheit
$\mathrm{Bil}(V)$	Vektorraum der Bilinearformen auf V
${}_B[\beta]_B$	Gram-Matrix einer Bilinearform β
$\mathrm{ind}\beta$, $\mathrm{ind}A$	Index von $\beta \in \mathrm{Bil}(V)$, $A \in K^{n\times n}$
$J_n(\lambda)$	Jordanblock für $\lambda \in K$ der Größe $n \times n$
$J_k(\gamma)$	verallgemeinerter Jordanblock für $\gamma \in K[X]$
$B(\alpha)$	Begleitmatrix von $\alpha \in K[X]$
$\mathrm{C}(f)$, $\mathrm{C}(A)$	Zentralisator von $f \in \mathrm{End}(V)$, $A \in K^{n\times n}$
$A \otimes B$	Kronecker-Produkt von A, B
$A \oplus B$	Kronecker-Summe von A, B
$A \odot B$	Hadamard-Produkt von A, B
$\mathrm{vec}(A)$	Vektorisierung von A
W_n	n-te Fourier-Matrix
H_n	n-te Hilbert-Matrix
$\mathcal{F}_n$	diskrete Fourier-Transformation
$\kappa(A)$	Konditionszahl von A
$\lvert A\rvert$	Frobenius-Norm von A
$\lVert v\rVert_p$, $\lVert A\rVert_p$	p-(Matrix-)Norm
$\lVert v\rVert_\infty$, $\lVert A\rVert_\infty$	Maximum-Norm, Zeilensummen-Norm
$\lambda_k(A)$	k. größter Eigenwert von $A = A^*$
$\rho(A)$	Spektralradius von A
$\exp A$	Exponentialfunktion von A
A_+	nicht-negative Matrix $(\lvert a_{ij}\rvert)_{ij}$
L^*	zu L duales lineares Programm
$\mathrm{con}\Delta$	konvexe Hülle von $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$
$\mathrm{supp}x$	Träger von $x \in \mathbb{R}^n$
$\lfloor x\rfloor$, $\lfloor x\rceil$	abgerundeter und gerundeter Wert von $x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{disc}\,\Delta$	Diskriminante des Gitters Δ
Δ^*	zu Δ duales Gitter
E_8	ganzes Gitter in $\mathbb{R}^8$ mit Diskriminante 1
$\Delta \perp \Lambda$	orthogonale Zerlegung von Gittern
γ_n	n-te Hermite-Konstante
gT, ggT	(größter) gemeinsame(r) Teiler
$\det q$	Determinante der quadratischen Form q
$\mu_i(q)$	sukzessives Minimum von q

Konventionen

- Eigennamen sind bei erster Verwendung in KAPITÄLCHEN geschrieben.
- K ist stets ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, Unterräume heißen meist U, W, V_1 etc.
- Mengen und Matrizen werden mit lateinischen Großbuchstaben bezeichnet ($A, B, \ldots, M, \ldots$).
- Elemente von Mengen werden mit Kleinbuchstaben bezeichnet, Vektoren mit u, v, w, natürliche Zahlen mit n, m, k, l, Abbildungen mit f, g, h etc.
- Für Mengen von Mengen benutzt man oft „geschwungene“ Buchstaben ($\mathcal{M}$, $\mathcal{P}$).
- Für Polynome, Skalare (Körperelemente im Kontext von Vektorräumen) und Bilinearformen verwenden wir griechische Buchstaben. Die gebräuchlichsten sind:

α	β	γ, Γ	δ, Δ	ϵ, ε	ζ	η	$\theta, \vartheta, \Theta$	κ	λ, Λ	μ
alpha	beta	gamma	delta	epsilon	zeta	eta	theta	kappa	lambda	my
ν	ξ	π, Π	ρ, ϱ	σ, Σ	τ	φ, ϕ, Φ	χ	ψ, Ψ	ω, Ω	
ny	xi	pi	rho	sigma	tau	phi	chi	psi	omega	

Lineare Algebra I

1 Aussagenlogik und Mengenlehre

1.1 Aussagen

Bemerkung 1.1. Die Sprache der Mathematik basiert auf logischen Prinzipien, die man letztlich als gegeben hinnehmen muss. Alle „höheren“ mathematischen Objekte lassen sich auf mengentheoretische Konstrukte zurückführen. Wir behandeln diese Themen hier nur so weit, wie sie zum Verständnis der linearen Algebra benötigt werden. Mehr Informationen findet man in meinem Skript zur Logik und Mengenlehre.

Definition 1.2.

- Eine *Aussage* A ist ein deutscher Satz, der entweder den *Wahrheitswert wahr* (**w**) oder *falsch* (**f**) annimmt. Man sagt dann: A *gilt* bzw. A *gilt nicht*.
- Für Aussagen A und B sind auch $\neg A$ (*nicht* A), $A \wedge B$ (A *und* B), $A \vee B$ (A *oder* B), $A \Rightarrow B$ (A *impliziert* B) und $A \Leftrightarrow B$ (A *genau dann, wenn* B) Aussagen mit folgenden Wahrheitswerten:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	**w**	**f**	**w**	**w**	**w**	**w**
w	**f**	**f**	**f**	**w**	**f**	**f**
f	**w**	**w**	**f**	**w**	**w**	**f**
f	**f**	**w**	**f**	**f**	**w**	**w**

- Zwei Aussagen A und B nennt man *äquivalent*, falls $A \Leftrightarrow B$ wahr ist, d. h. wenn A und B den gleichen Wahrheitswert haben.
- Ein *Prädikat* ist eine Eigenschaft $A = A(x)$, die erst durch Einsetzen eines Objekts für die Variable x zu einer Aussage wird. Ggf. sind $\forall x : A(x)$ (*für alle* x gilt $A(x)$) und $\exists x : A(x)$ (*es existiert* ein x, sodass $A(x)$ gilt) Aussagen.

Beispiel 1.3. Folgende Sätze sind Aussagen (selbst wenn wir den Wahrheitswert nicht kennen):

- Alle grünen Katzen können fliegen (**w**).
- $1 + 1 = 3$ (**f**).
- Jede gerade Zahl größer als 2 ist die Summe zweier Primzahlen (?).[1]

Keine Aussagen dagegen sind:

- Sei $\epsilon > 0$ (*Annahme*).
- $a^2 + b^2 = c^2$ (*Prädikat*).

[1] Goldbachs Vermutung

- Dieser Satz ist falsch (*Paradoxon*).

Aus dem Prädikat $x > 42$ kann man die wahre Aussage $\exists x : x > 42$ bilden.

Bemerkung 1.4.

(a) Im Gegensatz zum alltäglichen Sprachgebrauch unterscheidet sich das mathematische *oder* vom *entweder oder*. Das heißt, die Aussage $\mathbf{w} \vee \mathbf{w}$ ist wahr. Wir führen kein eigenständiges Symbol für *entweder oder* ein.[2] Unterscheiden Sie außerdem die Formulierungen „Es gibt ein…“ und „Es gibt genau ein…“.

(b) Die Wahrheit der Aussage $\mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{f}$ irritiert viele Anfänger (siehe Beispiel 1.3). Interpretation: Wenn die Voraussetzung nicht erfüllt ist, ist auch nichts zu zeigen. Man unterscheide außerdem die Aussage $A \Rightarrow B$ von ihrer *Umkehrung* $B \Rightarrow A$.[3]

(c) Für Aussagen $A_1, \ldots, A_n$ definiert man $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ durch $\forall i : A_i$ und $A_1 \vee \ldots \vee A_n$ durch $\exists i : A_i$.

(d) Um den Wahrheitswert einer Aussage A zu bestimmen, führt man *Äquivalenzumformungen* durch, d. h. man ersetzt A durch eine äquivalente Aussage. Dafür sind folgende Schlussregeln nützlich.[4]

Lemma 1.5. *Seien A, B und C Aussagen. Dann gilt:*

(a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent zu A:

$$\neg\neg A, \qquad A \wedge \mathbf{w}, \qquad A \vee \mathbf{f}, \qquad A \wedge A, \qquad A \vee A, \qquad \mathbf{w} \Rightarrow A$$

(b) $A \wedge B$ und $B \wedge A$ sind äquivalent sowie $A \vee B$ und $B \vee A$ (Kommutativgesetz).

(c) Es gilt $A \vee \neg A$ (Satz vom ausgeschlossenen Dritten) *und $\neg(A \wedge \neg A)$* (Satz vom Widerspruch).

(d) $A \wedge (B \vee C)$ und $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ sind äquivalent sowie $A \vee (B \wedge C)$ und $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (Distributivgesetz).

(e) $\neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$ sind äquivalent sowie $\neg(A \vee B)$ und $\neg A \wedge \neg B$ (De Morgans Regeln).

(f) $A \Rightarrow B$, $\neg A \vee B$ und $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ sind äquivalent (Kontraposition).

(g) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ impliziert $A \Rightarrow C$ (Transitivität).

(h) Aus $A \wedge (A \Rightarrow B)$ folgt B (Modus ponens).

(i) $A \Leftrightarrow B$ ist äquivalent zu $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Beweis. Alle Behauptungen lassen sich leicht durch Wahrheitstabellen verifizieren. Bei drei Variablen muss man dafür $2^3 = 8$ Fälle unterscheiden.[5] Alternativ kann man einige der Behauptungen aus bereits bewiesenen ableiten. So folgt die zweite de-morgansche Regel aus der ersten:

$$\neg(A \vee B) \overset{\text{(a)}}{\Longleftrightarrow} \neg((\neg\neg A) \vee (\neg\neg B)) \Longleftrightarrow \neg(\neg(\neg A \wedge \neg B)) \overset{\text{(a)}}{\Longleftrightarrow} (\neg A \wedge \neg B). \qquad \square[6]$$

[2] In der Informatik spricht man von `XOR`.
[3] Man könnte auch $A \Leftarrow B$ schreiben.
[4] Ein *Lemma* ist ein Hilfssatz mit wenig eigener Bedeutung.
[5] 2026 wurde mit KI gezeigt, dass man in subexponentieller Zeit prüfen kann, ob eine aussagenlogische Formel immer wahr ist. Das sogenannte SAT-*Problem* ist dennoch NP-vollständig und daher für das *Millenniumsproblem* $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ relevant.
[6] Diese Box markiert das Ende eines Beweises.

Bemerkung 1.6.

(a) De Morgans Regeln lassen sich allgemeiner in der Form $(\neg\forall x : A(x)) \Leftrightarrow (\exists x : (\neg A(x)))$ und $(\neg\exists x : A(x)) \Leftrightarrow (\forall x : (\neg A(x)))$ für Prädikate formulieren.

(b) Lemma 1.5 zeigt, dass man allein mit den Symbolen $\neg$ und $\wedge$ alle weiteren Ausdrücke bilden kann. Zugunsten der Lesbarkeit sollte man jedoch alle Symbole sparsam einsetzen.

1.2 Mengen

Definition 1.7 (Cantor)**.** Eine *Menge* M ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten x unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.[7] Man sagt dann: x ist ein *Element* von M und schreibt $x \in M$ sowie $M = \{x : x \in M\}$ (bzw. $x \notin M$ für $\neg(x \in M)$). Die Anzahl $|M|$ der Elemente von M heißt *Kardinalität* oder *Mächtigkeit* von M. Im Fall $|M| < \infty$ heißt M *endlich* und anderenfalls *unendlich*.

Bemerkung 1.8.

(a) Definition 1.7 ist ungenau, denn sie lässt Mengen zu, die zu logischen Widersprüchen führen. Sei beispielsweise

$$M := \{x : x \notin x\} \qquad \text{(Russells } \textit{Antinomie})^{8}$$

Die Aussage $M \in M$ kann dann weder wahr noch falsch sein. In der modernen Mathematik verhindert man solche Widersprüche durch Einführung eines *Axiomensystems*, d. h. man gibt den Wahrheitswert von möglichst wenigen „elementaren“ Aussagen (Axiomen) vor. Weit verbreitet ist das Zermelo-Fraenkel-System. Eines seiner Axiome besagt:

Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.

Dies impliziert, dass die Elemente einer Menge keine feste Reihenfolge haben. Es gilt also $\{2, 1, 1, 2, 2\} = \{1, 2\}$.

(b) In manchen Situationen benötigt man zusätzlich das sogenannte *Auswahlaxiom* (siehe Beispiel 2.3). Es wird von den meisten Mathematikern anerkannt, obwohl es die Konstruktion kontraintuitiver Mengen zulässt: Das Banach-Tarski-*Paradoxon* besagt beispielsweise, dass man eine Kugel vom Volumen 1 in fünf Teile zerlegen kann, die anders zusammengesetzt zwei Kugeln vom Volumen 1 ergeben.

(c) Nach Gödels zweitem *Unvollständigkeitssatz* ist es unmöglich zu beweisen, dass die Zermelo-Fraenkel-Axiome keine Widersprüche liefern.[9] Ist dies tatsächlich der Fall (wovon die meisten Mathematiker ausgehen), so besagt Gödels erster Unvollständigkeitssatz, dass es Aussagen gibt, deren Wahrheitswert sich nicht bestimmen lässt.[10] Das bekannteste Beispiel hierfür ist die *Kontinuumshypothese* (siehe Bemerkung 2.11(f)).

[7] Cantors Wortlaut
[8] Das Symbol := besagt, dass die linke Seite durch die rechte Seite festgelegt wird.
[9] Siehe Skript zur Logik und Mengenlehre
[10] Die Beweisidee besteht darin, die Aussage „Dieser Satz ist nicht beweisbar.“ zu formalisieren.

Definition 1.9.

(a) Für Mengen A und B sei

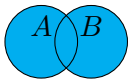
$$\begin{aligned} \varnothing &:= \{\} && (\textit{leere Menge}),\\ A \cup B &:= \{x : x \in A \vee x \in B\} && (\textit{Vereinigung}),\\ A \cap B &:= \{x : x \in A \wedge x \in B\} && (\textit{Durchschnitt}),\text{[11]}\\ A \setminus B &:= \{x : x \in A \wedge x \notin B\} && (\textit{Differenz}).\text{[12]} \end{aligned}$$

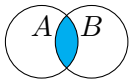
(b) Im Fall $A \cup B = B$ ist A eine *Teilmenge* von B. Man schreibt dann $A \subseteq B$ oder $A \subsetneq B$, falls zusätzlich $A \neq B$ (man spricht dann von einer *echten* Teilmenge[13]). Ist A keine Teilmenge von B, so schreibt man $A \nsubseteq B$.

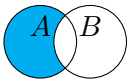
(c) Man nennt A und B *disjunkt*, falls $A \cap B = \varnothing$. Ggf. nennt man $A \dot\cup B := A \cup B$ eine *disjunkte Vereinigung*.

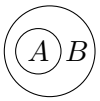
Bemerkung 1.10.

(a) Beziehungen zwischen Mengen lassen sich durch Venn-Diagramme veranschaulichen:

$A \cup B$: 

$A \cap B$: 

$A \setminus B$: 

$A \subseteq B$: 

Achtung: Sind mehr als drei Mengen im Spiel, so kann die allgemeine Situation nicht mehr durch Kreise dargestellt werden.[14]

(b) Vereinigung und Durchschnitt von beliebig vielen Mengen A_i (wobei i aus einer Indexmenge I stammt) lassen sich wie folgt definieren:

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{x : \exists i \in I : x \in A_i\}, \qquad \bigcap_{i\in I} A_i := \{x : \forall i \in I : x \in A_i\}.$$

Ist A die disjunkte Vereinigung von (nicht-leeren) Mengen A_i, so spricht man von einer *Partition* von A.

(c) Um die Gleichheit von Mengen $A = B$ zu beweisen, ist es oft einfacher, die äquivalente Aussage $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$ zu zeigen.

Beispiel 1.11.

(a) Die Menge der *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$. Wir setzen $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.[15] Achtung: Bei manchen Autoren ist $0 \in \mathbb{N}$.

(b) Die Menge der *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Es gilt $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n > 0\}$. Die ganzen Zahlen der Form $2n$ (bzw. $2n + 1$) mit $n \in \mathbb{Z}$ heißen *gerade* (bzw. *ungerade*).

(c) Die Menge der *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\, b \neq 0\}$.

[11] Man beachte die Ähnlichkeit der Symbole $\cup$ und $\vee$ sowie $\cap$ und $\wedge$.
[12] In manchen Büchern schreibt man $A - B$ anstatt $A \setminus B$.
[13] Das Symbol $\subset$ wird in der Literatur leider nicht einheitlich benutzt.
[14] siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/Mengendiagramm`
[15] Streng axiomatisch definiert man $0 := \varnothing$, $1 := \{\varnothing\}$ und allgemein $n + 1 := n \cup \{n\}$.

(d) Die Menge der *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ besteht aus allen *Dezimalbrüchen* wie $2 = 2.0$, $\frac{1}{3} = 0.33\ldots$, $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$ oder $\pi = 3.1415\ldots$ (die Dezimalbruchentwicklung kann abbrechend, periodisch oder unperiodisch sein). In der Analysis definiert man reelle Zahlen als Äquivalenzklassen von rationalen CAUCHY-Folgen. Im Folgenden setzen wir die üblichen Regeln für die Grundrechenarten voraus. Auch diese lassen sich streng axiomatisch einführen.

(e) Es gilt $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$. Die Behauptung $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ zeigen wir indirekt. Annahme: $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Dann ist $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ und es existieren $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ und $b \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (kurz: o. B. d. A.) können wir annehmen, dass a und b teilerfremd sind (anderenfalls kann man $\frac{a}{b}$ kürzen). Umstellen ergibt $2b^2 = a^2$. Insbesondere ist a^2 gerade. Da das Quadrat einer ungeraden Zahl ungerade ist ($(2n+1)^2 = 2(2n^2+2n)+1$), ist a gerade, sagen wir $a = 2c$. Es folgt $b^2 = 2c^2$. Mit dem gleichen Argument ist nun auch b gerade. Also ist 2 ein gemeinsamer Teiler von a und b. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch war. Also ist $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$.

(f) Die Elemente einer Menge können durchaus selbst Mengen sein. In solchen Fällen benutzt man oft geschwungene Buchstaben. Zum Beispiel besteht $\mathcal{M} := \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ aus allen 2-elementigen Teilmengen von $\{1,2,3\}$.

Lemma 1.12. *Für Mengen A, B und C gilt:*

(a) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *und* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributivgesetz).

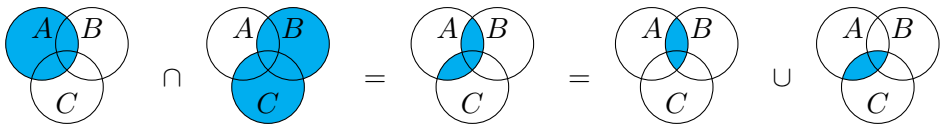
(c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ *und* $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ (De Morgans Regeln).

(d) $\boxed{|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|}$ *und* $|A \dot\cup B| = |A| + |B|$.

Beweis.

(a) Folgt direkt aus der Definition.

(b) Wir beweisen nur die erste Gleichheit (beweisen Sie die zweite selbst):



(c) Diesmal benutzen wir Lemma 1.5 (für die erste Gleichung):

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cup C) &\iff (x \in A \wedge (x \notin B \cup C)) \iff (x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)) \\ &\iff ((x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C)) \iff x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C). \end{aligned}$$

(d) Ist A oder B unendlich, so auch $A \cup B$ und die Behauptung gilt, wenn man $\infty + n = \infty$ für $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ interpretiert. Seien nun A und B endlich, sagen wir $A \cap B = \{x_1, \ldots, x_s\}$, $A = \{x_1, \ldots, x_s, a_1, \ldots, a_t\}$ und $B = \{x_1, \ldots, x_s, b_1, \ldots, b_u\}$. Dann gilt

$$|A \cup B| + |A \cap B| = s + t + u + s = |A| + |B|.$$

Sind A und B disjunkt, so gilt $|A \cap B| = |\varnothing| = 0$ und die zweite Behauptung folgt. □

Definition 1.13. Die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M, d. h.

$$\mathcal{P}(M) := \{N : N \subseteq M\}.$$

1.3 Vollständige Induktion

Satz 1.14 (Prinzip der vollständigen Induktion)**.** *Sei $A(n)$ ein Prädikat für $n \in \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften:*

- *Induktionsanfang: $A(1)$ gilt.*
- *Induktionsschritt: $\forall n \in \mathbb{N} : (A(n) \Longrightarrow A(n+1))$.*

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Beweis durch Widerspruch: Gilt $A(n)$ nicht für alle $n \in \mathbb{N}$, so gibt es ein kleinstes n mit $\neg A(n)$. Nach dem Induktionsanfang ist $n \neq 1$. Nach Wahl von n gilt $A(n-1)$. Nach dem Induktionsschritt gilt $A(n-1) \Rightarrow A(n)$. Also gilt $A(n)$ nach Modus ponens. Widerspruch. □

Bemerkung 1.15. Man verwendet oft Varianten der vollständigen Induktion. Zum Beispiel:

- Induktionsanfang: $A(1) \wedge A(2)$ gilt.
- Induktionsschritt: $\forall n \in \mathbb{N} : \big((A(n) \wedge A(n+1)) \Rightarrow A(n+2)\big)$.

Beispiel 1.16. Wir beweisen $(1 + 2 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $1^2 = 1 = 1^3$.

Induktionsvoraussetzung: Es gelte bereits $(1 + 2 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ $(*)$.

Induktionsschritt: Wir müssen die Behauptung für $n + 1$ beweisen. Zunächst eine Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} 2(1 + 2 + \ldots + n) &= (1 + 2 + \ldots + n) + (n + (n-1) + \ldots + 1) \\ &= (1 + n) + (2 + n - 1) + \ldots + (n + 1) = n(n + 1) \end{aligned}$$

(das hat Gauss als 9-Jähriger erkannt[16]). Nach der binomischen Formel gilt nun

$$\begin{aligned} ((1 + 2 + \ldots + n) + (n + 1))^2 &= (1 + 2 + \ldots + n)^2 + 2(1 + 2 + \ldots + n)(n + 1) + (n + 1)^2 \\ &\overset{(*)}{=} 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + n(n + 1)(n + 1) + (n + 1)^2 \\ &= 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n + 1)^3. \end{aligned}$$

□

[16] siehe Wikipedia

2 Kartesische Produkte und Funktionen

2.1 Paare und Tupel

Bemerkung 2.1. Nach Bemerkung 1.8 sind die Elemente einer Menge ungeordnet. Wir führen eine geordnete Variante ein.

Definition 2.2.

- Seien A und B Mengen. Das *kartesische Produkt* von A und B ist die Menge $A \times B$ bestehend aus allen (*geordneten*) *Paaren*[1] (a, b) mit $a \in A$, $b \in B$, sodass gilt

$$(a, b) = (a', b') \iff (a = a' \wedge b = b').$$

  Es gilt $\boxed{|A \times B| = |A||B|,}$ sofern man die Regeln $\infty \cdot 0 = 0$ und $\infty \cdot n = \infty$ für $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ benutzt.

- Analog definiert man *Tripel* (a, b, c) und *n-Tupel* $(a_1, \ldots, a_n)$ für $n \geq 2$. Für Mengen $A_1, \ldots, A_n$ setzt man

$$A_1 \times \ldots \times A_n := \big\{(a_1, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\big\}.$$

  Gilt $A := A_1 = \ldots = A_n$, so benutzt man die Abkürzung $A^n := A_1 \times \ldots \times A_n$.

- Kartesische Produkte lassen sich auch für beliebige Familien von Mengen definieren. Sei I eine Indexmenge und $(A_i : i \in I)$ eine Familie von Mengen. Man definiert $\bigtimes_{i \in I} A_i := \{(a_i)_{i \in I} : \forall i \in I : a_i \in A_i\}$.

Beispiel 2.3.

(a) Das kartesische Produkt $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ besteht aus allen Punkten der 2-dimensionalen[2] Ebene.

(b) Es gilt

$$\{1, 2\} \times \{2, 3, 4\} = \big\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\big\}.$$

(c) Das kartesische Produkt $\bigtimes_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ ist die Menge aller reellen Folgen aus der Analysis.

(d) Sei $(A_i : i \in I)$ eine beliebige Familie von nicht-leeren Mengen. Das bereits erwähnte *Auswahlaxiom* besagt $\bigtimes_{i \in I} A_i \neq \varnothing$, d. h. man kann aus jeder Menge A_i *gleichzeitig* ein Element auswählen.

Definition 2.4. Eine *Relation* auf einer Menge A ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times A$. Üblicherweise wählt man ein Symbol, zum Beispiel $\sim$, und schreibt $a \sim b$, falls $(a, b) \in R$. Man nennt R

- *reflexiv*, falls $\forall a \in A : a \sim a$.
- *symmetrisch*, falls $\forall a, b \in A : (a \sim b \Rightarrow b \sim a)$.

[1] Die formale Definition von Paaren kann man auf Mengen zurückführen: $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.
[2] Die *Dimension* wird in Definition 4.18 definiert.

- *antisymmetrisch*, falls $\forall a, b \in A : ((a \sim b \wedge b \sim a) \Rightarrow a = b)$.[3]
- *transitiv*, falls $\forall a, b, c \in A : ((a \sim b \wedge b \sim c) \Rightarrow a \sim c)$.
- *Äquivalenzrelation*, falls R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- (*partielle*) *Ordnungsrelation*, falls R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Ist R eine Äquivalenzrelation auf der Menge A und $a \in A$, so nennt man $[a] := \{b \in A : a \sim b\} \subseteq A$ die *Äquivalenzklasse* von a.

Beispiel 2.5.

(a) Die *triviale* Relation $R = A \times A$ ist eine (uninteressante) Äquivalenzrelation.

(b) Die Gleichheitsrelation $\{(a, a) : a \in A\}$ mit dem Symbol $=$ ist die „kleinste“ reflexive Relation auf A. Trivialerweise handelt es sich um eine Äquivalenzrelation.[4] Man kann viele weitere Äquivalenzrelationen auf die Gleichheit zurückführen. Sei beispielsweise A die Menge aller Menschen und $a \sim b$, falls $a, b \in A$ im selben Land leben. Die Äquivalenzklassen entsprechen dann den Ländern.

(c) Man kann durch einfache Beispiele zeigen, dass die Eigenschaften reflexiv, symmetrisch und transitiv unabhängig voneinander sind. Zum Beispiel ist die Relation

$$\{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2)\}$$

auf $A = \{1, 2, 3\}$ reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv.

(d) Auf $\mathbb{R}$ ist die Kleinergleichrelation $\leq$ eine Ordnungsrelation. Sie hat zusätzlich die Eigenschaft, dass je zwei Zahlen a und b in Relation stehen, d. h. es gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$ (man spricht von einer *totalen* Ordnungsrelation).

(e) Auf der Potenzmenge jeder Menge A ist die Inklusionsrelation $\subseteq$ eine Ordnungsrelation. Im Fall $A = \mathbb{N}$ stehen $\{1\}$ und $\{2\}$ nicht in Relation ($\{1\} \not\subseteq \{2\} \not\subseteq \{1\}$). Im Gegensatz zu $\leq$ ist $\subseteq$ also nicht total.

Lemma 2.6. *Sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A. Dann existiert eine Teilmenge $T \subseteq A$, sodass die Äquivalenzklassen $[t]$ mit $t \in T$ eine Partition von A bilden, d. h. $A = \dot{\bigcup}_{t \in T} [t]$.*

Beweis. Sei $\sim$ das Symbol von R. Seien $a, b \in A$ und $c \in [a] \cap [b]$. Dann gilt $a \sim c$ und $b \sim c$. Da $\sim$ symmetrisch ist, gilt $c \sim b$. Da $\sim$ transitiv ist, gilt $a \sim b$. Für jedes $d \in [b]$ gilt also $a \sim b \sim d$ und $a \sim d$. Dies zeigt $[b] \subseteq [a]$ und analog erhält man $[a] \subseteq [b]$. Es folgt $[a] = [b]$. Somit sind je zwei Äquivalenzklassen entweder gleich oder disjunkt. Außerdem liegt jedes $a \in A$ wegen der Reflexivität in seiner „eigenen“ Äquivalenzklasse $[a]$. Die Existenz von T folgt nun aus dem Auswahlaxiom. □

Bemerkung 2.7.

(a) In der Situation von Lemma 2.6 nennt man T ein *Repräsentantensystem* für die Äquivalenzklassen.

[3] Achtung: Es gibt auch die stärkere Eigenschaft *asymmetrisch*: $\forall a, b \in A : (a \sim b \Rightarrow b \not\sim a)$.

[4] Für symmetrische Relationen sollte man „symmetrische“ Symbole wählen. Die Umkehrung ist leider nicht immer gegeben, z. B. das Symbol | für die antisymmetrische Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{N}$.

(b) Ist $A = \dot{\bigcup}_{i \in I} A_i$ eine Partition von A, so definiert

$$a \sim b \ :\Longleftrightarrow\ \exists i \in I : a, b \in A_i$$

eine Äquivalenzrelation auf A (nachrechnen). Daher entsprechen sich Partitionen und Äquivalenzrelationen.

Beispiel 2.8. Für die Äquivalenzrelation auf der Menge aller Menschen aus Beispiel 2.5 bilden die Präsidenten jedes Landes ein Repräsentantensystem.

2.2 Injektive und surjektive Funktionen

Definition 2.9.

- Seien A und B Mengen. Eine *Funktion* oder *Abbildung* f von A nach B ist eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ genau ein $f(a) \in B$ zuordnet.[5] Man schreibt dann[6]

$$f \colon A \to B, \qquad a \mapsto f(a).$$

  Die Menge aller Abbildungen $A \to B$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Abb}(A, B)$.

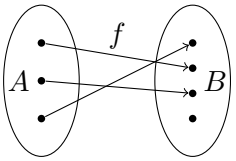
- Man nennt A den *Definitionsbereich* und B den *Wertebereich* von f. Außerdem ist $f(a)$ das *Bild* von a unter f und $f(A) := \{f(a) : a \in A\} \subseteq B$ ist das *Bild* von f. Für $B' \subseteq B$ ist

$$f^{-1}(B') := \{a \in A : f(a) \in B'\} \subseteq A$$

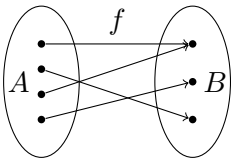
  das *Urbild* von B' unter f.

- Man nennt $f \colon A \to B$

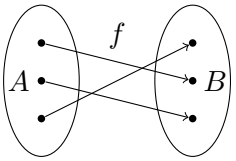
  – *injektiv*, falls $\forall a, a' \in A : (f(a) = f(a') \Longrightarrow a = a')$.



  – *surjektiv*, falls $\forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b$, d. h. $f(A) = B$.



  – *bijektiv* (oder *Bijektion*), falls f injektiv und surjektiv ist. Ggf. nennt man A und B *gleichmächtig*.



[5] Formal: Eine Funktion ist eine Teilmenge $f \subseteq A \times B$, sodass für jedes $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in f$ existiert.
[6] Man beachte die unterschiedlichen Pfeile $\to$ und $\mapsto$.

- Die *Einschränkung* von $f\colon A \to B$ auf eine Teilmenge $A' \subseteq A$ ist die Funktion

$$f_{|A'}\colon A' \to B, \qquad a \mapsto f(a).$$

Für eine weitere Funktion $g\colon B \to C$ nennt man die Abbildung

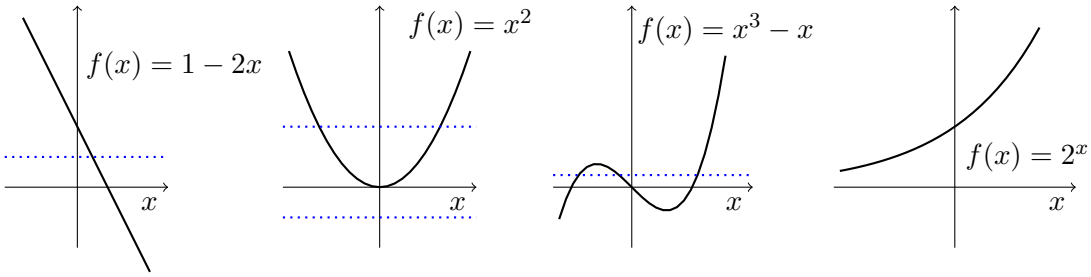
$$g \circ f\colon A \to C, \qquad a \mapsto g(f(a))$$

die *Komposition* (oder *Hintereinanderausführung*, *Verkettung*) von f und g.

Beispiel 2.10.

(a) Für jede Menge A und $B \subseteq A$ ist $f\colon B \to A$, $b \mapsto b$ eine injektive Funktion, die man *Inklusionsabbildung* nennt. Im Fall $B = A$ ist f sogar bijektiv und man nennt $f = \mathrm{id}_A$ die *Identität* auf A.

(b) Abbildungen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lassen sich grafisch darstellen:



Injektiv (bzw. surjektiv) bedeutet, dass der Graph von f jede horizontale Gerade höchstens (bzw. mindestens) einmal schneidet. Wir lesen ab:

Funktion	injektiv	surjektiv	bijektiv
$f(x) = 1 - 2x$	✓	✓	✓
$f(x) = x^2$	✗	✗	✗
$f(x) = x^3 - x$	✗	✓	✗
$f(x) = 2^x$	✓	✗	✗

Bemerkung 2.11.

(a) Sind A und B endliche Mengen, so gilt $|\mathrm{Abb}(A, B)| = |B|^{|A|}$, denn für $f\colon A \to B$ und jedes $a \in A$ hat man $|B|$ Möglichkeiten, $f(a) \in B$ zu wählen.

(b) Achtung: Injektiv ist nicht das Gegenteil von surjektiv (ein häufiger Anfängerfehler)!

(c) Man kann jede Funktion $f\colon A \to B$ surjektiv machen, indem man den Wertebereich auf das Bild einschränkt: $f\colon A \to f(A)$.

(d) Für $f\colon A \to B$ gilt

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv} &\implies |A| = |f(A)| \leq |B| \\ f \text{ surjektiv} &\implies |B| = |f(A)| \leq |A| \\ f \text{ bijektiv} &\implies |A| = |B| \end{aligned}$$

(wobei $\infty \leq \infty$).

(e) Zwei endliche Mengen A und B sind genau dann gleichmächtig, wenn $|A| = |B|$. In diesem Fall sind die Eigenschaften injektiv, surjektiv und bijektiv nach (d) äquivalent. Für unendliche Mengen ist dies im Allgemeinen falsch (Beispiel 2.10).

(f) Obwohl $\mathbb{N}$ nur „halb so viele“ Zahlen wie $\mathbb{Z}$ enthält, sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ durch die Bijektion

$$\mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \qquad n \mapsto \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ -\frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

gleichmächtig. Eine Menge, die gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist, nennt man *abzählbar*[7]. Nach Cantors *Diagonalisierungsargumenten* ist $\mathbb{Q}$ abzählbar, aber $\mathbb{R}$ nicht, d. h. $\mathbb{R}$ ist *überabzählbar*. Die (nicht beweisbare) *Kontinuumshypothese* besagt, dass jede unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ entweder zu $\mathbb{N}$ oder zu $\mathbb{R}$ gleichmächtig ist. Der folgende Satz zeigt, dass es beliebig „große“ Mengen gibt (*Kardinalzahlen*), die man in der Praxis aber selten antrifft.

Satz 2.12 (Cantor)**.** *Jede Menge M ist „kleiner“ als ihre Potenzmenge, d. h. es existiert eine injektive Abbildung $M \to \mathcal{P}(M)$, aber keine Bijektion. Ist M endlich, so gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.*

Beweis. Die Abbildung $M \to \mathcal{P}(M)$, $a \mapsto \{a\}$ ist sicher injektiv. Nehmen wir an, es existiert eine Bijektion $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$. Sei

$$A := \{x \in M : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(M).$$

Dann existiert ein $a \in M$ mit $f(a) = A$. Es folgt der Widerspruch $a \in A = f(a) \iff a \notin f(a)$. Für die zweite Behauptung sei $M = \{x_1, \dots, x_n\}$. Dann ist die Abbildung

$$\mathcal{P}(M) \to \{0,1\}^n, \qquad A \mapsto (a_1, \dots, a_n)$$

mit $a_i = 1 \iff x_i \in A$ eine Bijektion. Also ist $|\mathcal{P}(M)| = |\{0,1\}^n| = 2^n = 2^{|M|}$. □

Lemma 2.13. *Seien $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, $h\colon C \to D$ Funktionen. Dann gilt:*

(a) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (Assoziativgesetz).

(b) Sind f und g injektiv, so auch $g \circ f$.

(c) Sind f und g surjektiv, so auch $g \circ f$.

(d) Ist $g \circ f$ injektiv, so auch f.

(e) Ist $g \circ f$ surjektiv, so auch g.

(f) Genau dann ist f bijektiv, wenn eine Funktion $g\colon B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$ existiert. Ggf. ist g eindeutig bestimmt und man nennt $f^{-1} := g$ die Umkehrfunktion *von f.*

Beweis.

(a) Für $a \in A$ ist $((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))) = h((g \circ f)(a)) = (h \circ (g \circ f))(a)$.

(b) Für $a, a' \in A$ mit $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$ gilt $g(f(a)) = g(f(a'))$, also $f(a) = f(a')$ und $a = a'$.

(c) Es gilt $(g \circ f)(A) = g(f(A)) = g(B) = C$.

[7] In manchen Büchern zählen die endlichen Mengen auch zu den abzählbaren Mengen.

(d) Sei $f(a) = f(a')$ für $a, a' \in A$. Dann ist $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(a')) = (g \circ f)(a')$. Da $g \circ f$ injektiv ist, folgt $a = a'$.

(e) Es gilt $C = (g \circ f)(A) = g(f(A)) \subseteq g(B) \subseteq C$, also $g(B) = C$.

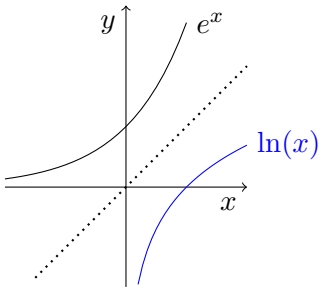
(f) Ist $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$, so ist f injektiv nach (d) und surjektiv nach (e), also auch bijektiv. Sei umgekehrt f bijektiv. Für jedes $b \in B$ existiert dann genau ein $g(b) \in A$ mit $f(g(b)) = b$. Daher ist $g\colon B \to A$ die einzige Abbildung mit $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Aus $f(a) = f(g(f(a)))$ folgt $g(f(a)) = a$ für alle $a \in A$, da f injektiv ist. Dies zeigt $g \circ f = \mathrm{id}_A$. □

Bemerkung 2.14. Verwechseln Sie die Umkehrfunktion nicht mit dem Urbild. Der Zusammenhang beider Konzepte ist $f^{-1}(\{b\}) = \{f^{-1}(b)\}$ für jede Bijektion $f\colon A \to B$ und $b \in B$.

Beispiel 2.15.

(a) Die Abbildung $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto 2x + 1$ ist eine Bijektion mit Umkehrabbildung $f^{-1}\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto \frac{x-1}{2}$ (nachrechnen).

(b) Die Umkehrabbildung der *Exponentialfunktion* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto e^x$ ist der *natürliche Logarithmus* $\ln\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$. Man erhält den Graphen von ln durch Spiegelung an der Geraden $y = x$:



Man beachte, dass die reine Existenz der Umkehrfunktion noch lange keine konkrete Formel für $f^{-1}(x)$ liefert. Diesen Umstand macht man sich in der Kryptographie zunutze (*Einwegfunktion*).

3 Körper und Vektorräume

3.1 Gruppen und Körper

Bemerkung 3.1. In fast allen Anwendungen der linearen Algebra wird nur von den vier Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) Gebrauch gemacht. Damit man nicht jede Aussage für jeden Zahlbereich $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \ldots)$ neu beweisen muss, ersetzt man Zahlbereiche durch abstrakte *Gruppen* (mit einer Operation) und *Körper* (mit zwei Operationen). Zur Beschreibung von Lösungsmengen von Gleichungssystemen führt man *Vektorräume* ein. Beachten Sie, dass dies lediglich Modelle zur Untersuchung linearer Probleme sind, die sich im Laufe der Zeit bewährt haben (so wie metrische Räume in der Analysis oder Bohrs Atommodell in der Chemie).

Definition 3.2. Eine *Verknüpfung* $\cdot$ auf einer Menge G ist eine Abbildung $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$. Man nennt das Paar $(G, \cdot)$ (oder auch nur G) eine *Gruppe*, falls

- $\forall x, y, z \in G : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (*Assoziativgesetz*),
- $\exists e \in G : (\forall x \in G : e \cdot x = x = x \cdot e)$ (*neutrales Element*),
- $\forall x \in G : (\exists y \in G : y \cdot x = e = x \cdot y)$ (*inverses Element*).

Gilt zusätzlich

- $\forall x, y \in G : x \cdot y = y \cdot x$ (*Kommutativgesetz*),

so heißt G *abelsch*.[1]

Bemerkung 3.3. Sei G eine Gruppe mit neutralem Element e.

(a) Aus Bequemlichkeit schreiben wir oft xy anstatt $x \cdot y$.

(b) Ist auch $e' \in G$ ein neutrales Element, so gilt $e' = e' \cdot e = e$. Also ist e eindeutig bestimmt und wir schreiben oft $e = 1_G = 1$ oder $e = 0_G = 0$, falls die Verknüpfung $+$ ist.

(c) Seien $y, y' \in G$ invers zu $x \in G$. Dann ist

$$y' = y'e = y'(xy) = (y'x)y = ey = y.$$

Somit hat x genau ein Inverses und wir schreiben $y = x^{-1}$ oder $y = -x$, falls die Verknüpfung $+$ ist. Im letzten Fall schreiben wir $x - y := x + (-y)$ für beliebige $x, y \in G$.[2]

(d) Für $x, y \in G$ ist $\boxed{(x^{-1})^{-1} = x}$ und $\boxed{(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}}$ (Achtung Reihenfolge!).

[1] Benannt nach N. Abel.

[2] In nicht-abelschen Gruppen ist die Schreibweise $\frac{x}{y}$ problematisch, denn es könnte sowohl xy^{-1} als auch $y^{-1}x$ gemeint sein.

Beispiel 3.4.

(a) Wegen $e \in G$ ist eine Gruppe niemals leer. Andererseits gibt es die *triviale* Gruppe $G = \{e\}$.

(b) Nach den üblichen Rechenregeln sind $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{R}, +)$ abelsche Gruppen mit neutralem Element 0. Andererseits ist $(\mathbb{Z}, -)$ *keine* Gruppe, denn das Assoziativgesetz ist verletzt:

$$(1 - 2) - 3 = -4 \neq 2 = 1 - (2 - 3).$$

Ebenso besitzt $(\mathbb{N}, +)$ kein neutrales Element und in $(\mathbb{N}_0, +)$ hat nicht jedes Element ein Inverses (z. B. $-1 \notin \mathbb{N}_0$).

(c) Offenbar sind $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppen mit neutralem Element 1, aber nicht $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$, denn $2^{-1} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

(d) Für Gruppen $G_1, \ldots, G_n$ ist auch $G_1 \times \ldots \times G_n$ eine Gruppe mit

$$(x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n)$$

für $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in G_1 \times \ldots \times G_n$ (Aufgabe I.8). Das neutrale Element ist $(1_{G_1}, \ldots, 1_{G_n})$. Man spricht dann vom *direkten Produkt* von $G_1, \ldots, G_n$ (anstelle vom kartesischen Produkt).

Definition 3.5. Ein *Körper* ist eine Menge K mit Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, sodass folgende Eigenschaften gelten:

- $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0.
- $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 1. Man setzt $K^\times := K \setminus \{0\}$.
- $\forall x, y, z \in K : x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ und $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (*Distributivgesetz*).

Bemerkung 3.6. Im Folgenden sei K stets ein Körper.

(a) Durch die Vereinbarung „Punktrechnung vor Strichrechnung“ sparen wir Klammern ein. Zum Beispiel sei $xy + z := (x \cdot y) + z$ für $x, y, z \in K$.

(b) Für alle $x \in K$ gilt $\boxed{x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x,}$ denn $x0 = x(0 + 0) = x0 + x0$. Es folgt $(-x)y = -(xy)$ für $x, y \in K$.

(c) Für $x, y, z \in K$ und $z \neq 0$ gilt die *Kürzungsregel* $xz = yz \Longrightarrow x = y$, denn

$$x = x \cdot 1 = x(zz^{-1}) = (xz)z^{-1} = (yz)z^{-1} = \ldots = y.$$

Beispiel 3.7.

(a) Nach den gewohnten Rechenregeln sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ Körper. Es gibt außerdem unendlich viele Körper „zwischen“ $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ (vgl. Aufgabe I.15). Andererseits ist $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kein Körper, da $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ keine Gruppe ist.

(b) Jeder Körper besitzt mindestens die beiden Elemente 0 und 1. Tatsächlich ist $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ bereits ein Körper, wenn man $1 + 1 := 0$ definiert. Die Verknüpfungstabellen sind dadurch vollständig bestimmt:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Auf Computern werden alle Rechnungen in $\mathbb{F}_2$ durchgeführt, indem man 0 und 1 als *Bits* interpretiert. In der Algebra[3] konstruiert man für jede Primzahlpotenz q einen Körper mit genau q Elementen (vgl. Aufgabe I.9 und Beispiel 15.38).

3.2 Vektorräume und Unterräume

Definition 3.8. Ein *Vektorraum* V über einem Körper K (kurz: K-Vektorraum) ist eine abelsche Gruppe bzgl. $+$ zusammen mit einer *Skalarmultiplikation* $K \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$,
- $\forall v, w \in V,\ \lambda \in K : \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$,
- $\forall v \in V,\ \lambda, \mu \in K : (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$,
- $\forall v \in V,\ \lambda, \mu \in K : (\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$.

Die Elemente von V heißen *Vektoren* und die Elemente in K *Skalare* (in diesem Kontext). Das neutrale Element 0_V in V nennt man den *Nullvektor*.

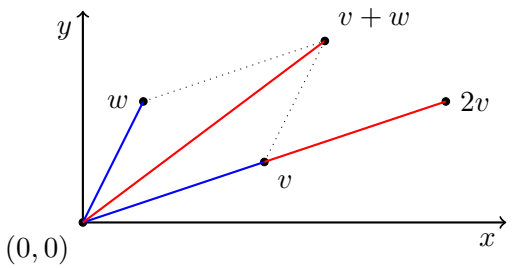
Bemerkung 3.9. Man beachte, dass $+$ sowohl die Addition in K als auch in V bezeichnet. Ebenso steht $\cdot$ für die Multiplikation in K und für die Skalarmultiplikation (das ist ungenau, aber durchaus üblich). Wir werden in beiden Fällen das Symbol $\cdot$ oft einsparen. Falls Missverständnisse ausgeschlossen sind, schreiben wir auch 0 anstatt 0_V. Sie müssen im Zweifel in der Lage sein zu entscheiden, ob das Nullelement in K oder V gemeint ist.

Beispiel 3.10.

(a) In jedem Vektorraum gilt $\lambda \cdot 0_V = 0_V$ für alle $\lambda \in K$, denn $\lambda \cdot 0_V = \lambda \cdot (0_V + 0_V) = \lambda \cdot 0_V + \lambda \cdot 0_V$. Analog gilt $0_K \cdot v = 0_V$ für alle $v \in V$. Insbesondere ist der *Nullraum* $V = \{0_V\}$ ein Vektorraum.

(b) Für K-Vektorräume $V_1, \ldots, V_n$ ist auch das direkte Produkt (bzgl. $+$) $V_1 \times \ldots \times V_n$ ein Vektorraum mit komponentenweiser Skalarmultiplikation: $\lambda(v_1, \ldots, v_n) := (\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n)$ für $v_i \in V_i$ und $\lambda \in K$ (nachrechnen).

(c) Offenbar ist K selbst ein Vektorraum, in dem die Skalarmultiplikation mit der gewöhnlichen Multiplikation übereinstimmt. Nach (b) ist auch K^n für $n \geq 1$ ein Vektorraum. In $\mathbb{R}^2$ lassen sich Vektoraddition und Skalarmultiplikation geometrisch deuten:



[3] siehe Algebra-Skript

(d) Sind $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren aus V und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, so liegt auch die *Linearkombination* $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ in V (Nachweis durch Induktion nach n). Man benutzt dafür das Summenzeichen:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i := \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n.}$$

Ist der Indexbereich im Kontext klar, so schreibt man kürzer $\sum \lambda_i v_i$. Sind $v_1, \ldots, v_n$ paarweise verschieden (d. h. $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$)[4] und mindestens ein $\lambda_i \neq 0$, so nennt man die Linearkombination *nicht-trivial*. Manchmal tritt die *leere Summe* ohne Summanden auf. Diese wird stets als 0_V interpretiert. Zum Beispiel $\sum_{i=1}^{0} v_i = 0$. Sei auch $v_i = \mu_{i1} w_{i1} + \mu_{i2} w_{i2} + \ldots + \mu_{im} w_{im}$ eine Linearkombination für $i = 1, \ldots, n$.[5] Dann erhält man eine *Doppelsumme*:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu_{ij} w_{ij}.$$

Da $(V, +)$ abelsch ist, darf man die Summanden beliebig umordnen und somit die Summenzeichen vertauschen:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu_{ij} w_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij} w_{ij}.}$$

Ein Vorzug der Algebra gegenüber der Analysis ist, dass (fast) alle Summen endlich sind und man keine Konvergenzbetrachtungen anstellen muss.

Satz 3.11. *Sei $A \neq \varnothing$ eine Menge und V ein K-Vektorraum. Dann ist* $\mathrm{Abb}(A, V)$ *mit den folgenden Verknüpfungen ein K-Vektorraum:*

$$\begin{aligned} (f+g)(a) &:= f(a) + g(a) && (f, g \in \mathrm{Abb}(A, V),\ a \in A) \\ (\lambda f)(a) &:= \lambda f(a) && (\lambda \in K) \end{aligned}$$

Beweis. Offenbar liegen $f + g$ und λf in $\mathrm{Abb}(A, V)$. Die triviale Abbildung $f(a) = 0$ für alle $a \in A$ ist das neutrale Element bzgl. $+$. Für $f\colon A \to V$ ist $-f\colon A \to V$, $a \mapsto -f(a)$ invers zu f bzgl. $+$. Für $f, g, h\colon A \to V$ und $a \in A$ ist

$$\begin{aligned} ((f+g)+h)(a) &= (f+g)(a) + h(a) = (f(a) + g(a)) + h(a) = f(a) + (g(a) + h(a)) \\ &= f(a) + (g+h)(a) = (f + (g+h))(a). \end{aligned}$$

Daher ist $+$ assoziativ. Auf die gleiche Weise übertragen sich die verbleibenden Vektorraumaxiome von V nach $\mathrm{Abb}(A, V)$. □

Definition 3.12.

- Eine Teilmenge H einer Gruppe G heißt *Untergruppe*, falls H mit der eingeschränkten Verknüpfung selbst eine Gruppe ist, d. h.
  - $1_G \in H$,
  - $\forall g, h \in H : gh \in H$,

[4] „paarweise verschieden“ ist stärker als die Formulierung „nicht alle sind gleich“

[5] Im Zweifel sollte man doppelte Indizes durch Komma trennen: $\mu_{i,1}$.

– $\forall h \in H : h^{-1} \in H$.

Wir schreiben ggf. $H \leq G$. Im Fall $H \neq G$ nennt man H eine *echte* Untergruppe und schreibt $H < G$.

- Eine Teilmenge U eines Vektorraums V heißt *Unterraum*, falls U mit den eingeschränkten Verknüpfungen selbst ein Vektorraum ist, d. h.
  – $(U, +)$ ist eine Untergruppe von $(V, +)$,
  – $\forall v \in U,\ \lambda \in K : \lambda v \in U$.

  Wir schreiben dann $U \leq V$ wie bei Untergruppen. Im Fall $U \neq V$ nennt man U einen *echten* Unterraum und schreibt $U < V$.

Bemerkung 3.13.

(a) Die Bedingungen garantieren, dass H unter Multiplikation bzw. U unter Addition und Skalarmultiplikation *abgeschlossen* ist. Somit sind die Verknüpfungen auf H bzw. U *wohldefiniert*. Die verbleibenden Gruppenaxiome bzw. Vektorraumaxiome muss man nicht prüfen, da sie bereits in der größeren Menge G bzw. V gelten.

(b) Im Folgenden beschränken wir uns auf die Untersuchung von Unterräumen. Die meisten Aussagen gelten sinngemäß auch für (abelsche) Gruppen.

(c) Für Vektorräume kann man die Bedingungen wie folgt zusammenfassen: Eine *nichtleere* Teilmenge $U \subseteq V$ ist genau dann ein Unterraum, wenn für alle $u, v \in U$ und $\lambda \in K$ gilt: $\lambda u + v \in U$ (Aufgabe I.10).

Beispiel 3.14.

(a) Jeder Vektorraum V besitzt die Unterräume $\{0_V\}$ und V.

(b) Aus $U \leq W \leq V$ folgt $U \leq V$. Aus $U, W \leq V$ und $U \subseteq W$ folgt sicher auch $U \leq W$.

(c) Der Durchschnitt von beliebig vielen Unterräumen ist wieder ein Unterraum (nachrechnen).

(d) Wir beweisen $U := \big\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\big\} \leq \mathbb{R}^2$ mit Hilfe von Bemerkung 3.13: Wegen $(0, 0) \in U$ ist $U \neq \varnothing$. Für $(x_1, 0), (x_2, 0) \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda(x_1, 0) + (x_2, 0) = (\lambda x_1, 0) + (x_2, 0) = (\lambda x_1 + x_2, 0) \in U.$$

Geometrisch entspricht U der x-Achse in der Ebene. Analog ist die xy-Ebene

$$U := \big\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\big\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

(e) Die Teilmenge $U := \big\{(x, x^2) : x \in \mathbb{Q}\big\}$ von $\mathbb{Q}^2$ ist *kein* Unterraum, denn $(1, 1) \in U$, aber $2 \cdot (1, 1) = (2, 2) \notin U$. Wir zeigen in Bemerkung 7.19, dass sich jeder Unterraum durch *lineare* Gleichungen beschreiben lässt.

(f) Offenbar sind $U := \big\{(0, 0), (1, 0)\big\}$ und $W := \big\{(0, 0), (0, 1)\big\}$ Unterräume von $\mathbb{F}_2^2$, aber nicht $U \cup W$ (Warum?).

Lemma 3.15. *Sei V ein K-Vektorraum und $U \leq V$. Für $v \in V$ sei $v + U := \{v + u : u \in U\} \subseteq V$. Dann wird $V/U := \{v + U : v \in V\}$ mit*

$$(v + U) + (w + U) := (v + w) + U \qquad (v, w \in V),$$
$$\lambda(v + U) := \lambda v + U \qquad (\lambda \in K)$$

zu einem K-Vektorraum.

Beweis. Sei $\overline{v} := v + U$ für $v \in V$. Für $\overline{v} = \overline{v'}$ und $\overline{w} = \overline{w'}$ gilt

$$\overline{v + w} = v + w + U = v + w' + U = w' + v + U = w' + v' + U = \overline{v' + w'}.$$

Dies zeigt, dass die Addition auf V/U wohldefiniert ist. Das neutrale Element ist $0 + U = U$. Offenbar ist $\overline{0v} = U = \overline{0v'}$. Für $\lambda \in K^\times$ gilt

$$\overline{\lambda v} = \lambda v + U = \{\lambda(v + \lambda^{-1}u) : u \in U\} = \{\lambda(v' + u') : u' \in U\} = \overline{\lambda v'}.$$

Also ist auch die Skalarmultiplikation wohldefiniert. Die Vektorraumaxiome für V/U folgen unmittelbar aus den Axiomen für V. □

Bemerkung 3.16. Man nennt V/U den *Faktorraum* von V nach U. Die Mengen $v + U$ werden manchmal als *affine Räume* bezeichnet (Aufgabe III.25). Sie sind die Äquivalenzklassen der Relation $v \sim w :\Longleftrightarrow v - w \in U$.

4 Basen und Dimension

4.1 Lineare Unabhängigkeit und Erzeugendensysteme

Bemerkung 4.1. Um unendlich große Vektorräume vergleichen zu können, führen wir die Dimension als feinere Kenngröße ein. Es wird sich zeigen, dass Vektorräume allein durch ihre Dimension weitestgehend bestimmt sind (Satz 7.10).

Definition 4.2. Sei V ein Vektorraum.

(a) Für $S \subseteq V$ sei $\langle S\rangle \subseteq V$ die Menge aller Linearkombinationen von Elementen aus S. Man nennt $\langle S\rangle$ den *Spann* von S.[1] Im Fall $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ schreiben wir auch $\langle s_1, \ldots, s_n\rangle$ anstatt $\langle S\rangle$ (d. h. wir sparen die Mengenklammern ein).

(b) Für Unterräume $U, W \leq V$ sei

$$U + W := \{u + w : u \in U, w \in W\} \subseteq V$$

die (Minkowski-)*Summe* von U und W. Im Fall $U \cap W = \{0\}$ nennt man die Summe *direkt* und schreibt $U \oplus W$ anstatt $U + W$.[2]

Lemma 4.3. *Sei V ein Vektorraum, $S \subseteq V$ und $U, W \leq V$. Dann sind $\langle S\rangle$ und $U + W$ Unterräume von V.*

Beweis. Offenbar ist 0 eine Linearkombination von Elementen aus S, d. h. $0 \in \langle S\rangle$ (im Fall $S = \varnothing$ wähle man die leere Summe). Addition und Skalarmultiplikation von Linearkombinationen sind wieder Linearkombinationen. Dies zeigt $\langle S\rangle \leq V$. Wegen $0 \in U \cap W$ ist $0 = 0 + 0 \in U + W$. Seien $u_1 + w_1, u_2 + w_2 \in U + W$ und $\lambda \in K$. Dann gilt

$$\lambda(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = \underbrace{(\lambda u_1 + u_2)}_{\in U} + \underbrace{(\lambda w_1 + w_2)}_{\in W} \in U + W.$$

Also ist auch $U + W \leq V$. □

Beispiel 4.4.

(a) Es gilt $\langle\varnothing\rangle = \{0\}$, denn die leere Summe ist die einzige Linearkombination aus $\varnothing$.

(b) Für $U \leq W \leq V$ gilt $U + W = W$ und $\langle U\rangle = U = U \oplus \{0\}$.

(c) Für $s_1, \ldots, s_n \in V$ gilt $\langle s_i\rangle = \{\lambda s_i : \lambda \in K\} =: Ks_i$ und $\langle s_1, \ldots, s_n\rangle = Ks_1 + \ldots + Ks_n$. Insbesondere ist $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}(1, 0) \oplus \mathbb{R}(0, 1)$.

[1] In manchen Büchern schreibt man $\mathrm{Span}(S)$ anstatt $\langle S\rangle$.
[2] Dies ersetzt die (disjunkte) Vereinigung, siehe Aufgabe I.13.

Definition 4.5. Eine Teilmenge S eines Vektorraums V heißt

- *Erzeugendensystem*, falls $\langle S\rangle = V$. Im Fall $|S| < \infty$ nennt man V *endlich erzeugt*.
- *linear abhängig*, falls 0_V eine nicht-triviale Linearkombination von Elementen aus S ist.
- *linear unabhängig*, falls nicht linear abhängig, d. h. für paarweise verschiedene Elemente $s_1, \ldots, s_n \in S$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

- *Basis*, falls S ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist.

Bemerkung 4.6. Da Basen Mengen sind, besitzen ihre Elemente keine feste Anordnung. Tatsächlich hängen aber viele Sätze von der Reihenfolge der Basiselemente ab. Wir führen daher folgende Sprechweise ein: Vektoren $s_1, \ldots, s_n$ heißen linear unabhängig (bzw. bilden eine Basis), falls sie paarweise verschieden sind und $\{s_1, \ldots, s_n\}$ linear unabhängig (bzw. eine Basis) ist.

Beispiel 4.7.

(a) Die leere Menge ist stets linear unabhängig und bildet eine Basis des Nullraums.

(b) Wegen $1_K \cdot 0_V = 0_V$ ist der Nullvektor niemals Bestandteil einer linear unabhängigen Menge. Ein einzelner Vektor $v \neq 0$ ist hingegen stets linear unabhängig, denn aus $\lambda v = 0$ mit $\lambda \in K^\times$ folgt der Widerspruch

$$v = 1v = (\lambda^{-1}\lambda)v = \lambda^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1}0 = 0.$$

(c) Vektoren $v, w \in V \setminus \{0\}$ sind genau dann linear abhängig, wenn $Kv = Kw$, d. h. v ist ein skalares Vielfaches von w und umgekehrt.

(d) Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge ist linear unabhängig.

(e) Für $n \geq 1$ seien

$$\begin{aligned} e_1 &:= (1, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &:= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\vdots \\ e_n &:= (0, \ldots, 0, 1) \end{aligned}$$

Vektoren aus K^n. Da sich jeder Vektor $v = (v_1, \ldots, v_n) \in K^n$ in der Form $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ schreiben lässt, ist $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ein Erzeugendensystem von K^n. Aus $v = 0 \Longleftrightarrow v_1 = \ldots = v_n = 0$ folgt die lineare Unabhängigkeit von $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Man nennt $e_1, \ldots, e_n$ die *Standardbasis* von K^n.

4.2 Charakterisierung und Existenz von Basen

Satz 4.8. *Sei $B := \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis eines K-Vektorraums V. Dann lässt sich jedes $v \in V$ eindeutig in der Form $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ schreiben. Insbesondere ist die Abbildung*

$$ {}_B[.] \colon V \to K^n, \qquad v \mapsto {}_B[v] := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) $$

eine Bijektion.

Beweis. Wegen $V = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ ist jedes $v \in V$ eine Linearkombination der angegebenen Form. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n \in K$ mit

$$ v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = \sum_{i=1}^n \mu_i b_i. $$

Dann ist $0 = v - v = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) b_i$. Da $\{b_1, \ldots, b_n\}$ linear unabhängig ist, folgt $\lambda_i = \mu_i$ für $i = 1, \ldots, n$. □

Definition 4.9. In der Situation von Satz 4.8 nennt man ${}_B[v]$ die *Koordinatendarstellung* von v bzgl. B.

Lemma 4.10. *Für einen Vektorraum V und $B \subseteq V$ sind äquivalent:*

(1) B ist eine Basis von V.

(2) B ist ein minimales Erzeugendensystem, d. h. für alle $b \in B$ ist $B \setminus \{b\}$ kein Erzeugendensystem.

(3) B ist maximal linear unabhängig, d. h. für alle $v \in V \setminus B$ ist $B \cup \{v\}$ linear abhängig.

Beweis. Wir führen einen *Ringbeweis*.[3]

(1) ⇒ (2): Sei B eine Basis, also insbesondere ein Erzeugendensystem von V. Nehmen wir an, dass auch $B \setminus \{b\}$ für ein $b \in B$ ein Erzeugendensystem ist. Dann existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ und $b_1, \ldots, b_n \in B \setminus \{b\}$ mit $b = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$. Wegen $-b + \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = 0$ wäre B dann linear abhängig. Widerspruch.

(2) ⇒ (3): Sei B ein minimales Erzeugendensystem. Sei $\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = 0$ für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ und paarweise verschiedene $b_1, \ldots, b_n \in B$. Ist $\lambda_i \neq 0$ für ein i, so gilt

$$ b_i = -\lambda_i^{-1} \sum_{j \neq i} \lambda_j b_j = \sum_{j \neq i} (-\lambda_i^{-1} \lambda_j) b_j \in \langle B \setminus \{b_i\} \rangle. $$

Dann wäre aber auch $B \setminus \{b_i\}$ ein Erzeugendensystem. Also ist $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ und B ist linear unabhängig. Sei nun $v \in V \setminus B$. Wegen $\langle B \rangle = V$ existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ und $b_1, \ldots, b_n \in B$ mit $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$ und $-v + \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = 0$. Insbesondere ist $B \cup \{v\}$ linear abhängig.

(3) ⇒ (1): Sei B maximal linear unabhängig. Wir müssen $\langle B \rangle = V$ zeigen. Sei $v \in V$. Im Fall $v \in B$ ist $v \in \langle B \rangle$. Sei also $v \notin B$. Dann ist $B \cup \{v\}$ linear abhängig. Also existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K^\times$, $\mu \in K$, $b_1, \ldots, b_n \in B$ mit $\mu v + \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = 0$. Da B linear unabhängig ist, muss $\mu \neq 0$ gelten. Dies liefert

$$ v = -\mu^{-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = \sum_{i=1}^n (-\mu^{-1} \lambda_i) b_i \in \langle B \rangle. $$

Insgesamt ist $V = \langle B \rangle$. □

[3] Ein *Zirkelschluss* hingegen ist eine fehlerhafte Argumentation, bei der die Behauptung bereits vorausgesetzt wird.

Satz 4.11 (Basisergänzungssatz)**.** *Sei V ein Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem $E \subseteq V$. Dann lässt sich jede linear unabhängige Menge $U \subseteq V$ durch Hinzunahme von Elementen aus E zu einer Basis von V ergänzen.*

Beweis. Sei $E = \{s_1, \dots, s_n\}$. Im Fall $E \subseteq \langle U \rangle$ ist $V = \langle E \rangle \subseteq \langle U \rangle$, d. h. U ist bereits eine Basis. Sei also $E \nsubseteq \langle U \rangle$ und o. B. d. A. $s_1 \notin \langle U \rangle$. Wie im letzten Beweis ist dann $U_1 := U \cup \{s_1\}$ linear unabhängig. Wir können nun das Argument mit U_1 anstelle von U wiederholen. Im Fall $E \subseteq \langle U_1 \rangle$ ist U_1 eine Basis und anderenfalls können wir $s_2 \notin \langle U_1 \rangle$ annehmen. Dann ist $U_2 := U_1 \cup \{s_2\}$ linear unabhängig usw. Da E endlich ist, erhält man nach endlich vielen Schritten eine Basis von V. □

Beispiel 4.12. Die linear unabhängige Menge $U := \big\{(1, 2, 0), (2, 1, 0)\big\} \subseteq \mathbb{R}^3$ lässt sich mit dem Standardbasisvektor e_3 zu einer Basis ergänzen (aber nicht mit e_1 oder e_2).

Satz 4.13 (Steinitz' Austauschsatz)**.** *Sei V ein Vektorraum mit Erzeugendensystem E. Für jede linear unabhängige Teilmenge $U \subseteq V$ gilt $|U| \leq |E|$.*

Beweis. O. B. d. A. sei E endlich, sagen wir $E = \{s_1, \dots, s_n\}$. Seien $u_1, \dots, u_m \in U$ paarweise verschieden. Wir müssen $m \leq n$ zeigen. Da U linear unabhängig ist, gilt $0 \neq u_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i$, wobei nicht alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ verschwinden. Sei also o. B. d. A. $\lambda_1 \neq 0$ und daher

$$s_1 = \lambda_1^{-1} u_1 + \sum_{i=2}^{n} (-\lambda_1^{-1} \lambda_i) s_i \in \langle u_1, s_2, \dots, s_n \rangle.$$

Folglich ist auch $\{u_1, s_2, \dots, s_n\}$ ein Erzeugendensystem mit n Elementen (wir haben s_1 gegen u_1 *ausgetauscht*). Schreibe nun $u_2 = \mu_1 u_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i s_i$ mit $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$. Wegen $u_2 \notin \langle u_1 \rangle$ muss mindestens ein μ_i mit $i \geq 2$ ungleich 0 sein. Sagen wir $\mu_2 \neq 0$. Wegen

$$s_2 = -\mu_2^{-1} \mu_1 u_1 + \mu_2^{-1} u_2 - \sum_{i=3}^{n} \mu_2^{-1} \mu_i s_i \in \langle u_1, u_2, s_3, \dots, s_n \rangle$$

kann man s_2 auf die gleiche Weise gegen u_2 austauschen. Wiederholt man diesen Prozess, so erhält man schließlich das Erzeugendensystem $\{u_1, \dots, u_m, s_{m+1}, \dots, s_n\}$ von V. Insbesondere ist $m \leq n$. □

Beispiel 4.14. Die Menge $\big\{(1, 2, 3, 4), (-1, 4, 0, 2), (0, 5, 2, 1), (0, 0, -7, 1), (-3, 4, 1, 0)\big\} \subseteq \mathbb{R}^4$ muss linear abhängig sein, da $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$ ist (beachten Sie, dass man nichts rechnen muss).

Satz 4.15. *Jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt eine endliche Basis und je zwei Basen sind gleichmächtig.*

Beweis. Sei V ein Vektorraum mit endlichem Erzeugendensystem E. Nach dem Basisergänzungssatz kann man die linear unabhängige Menge $\varnothing$ mit Elementen aus E zu einer Basis B von V ergänzen. Insbesondere ist $|B| \leq |E| < \infty$. Sei auch C eine Basis von V. Nach dem Austauschsatz gilt $|C| \leq |B| \leq |C|$, also $|C| = |B|$. Da B und C endlich sind, müssen sie nach Bemerkung 2.11(e) gleichmächtig sein. □

Folgerung 4.16. *Jeder Unterraum U eines endlich erzeugten Vektorraums V ist endlich erzeugt und besitzt ein* Komplement *$W \leq V$, d. h. es gilt $V = U \oplus W$.*

Beweis. Sei B eine Basis von V und $S \subseteq U$ linear unabhängig. Nach dem Austauschsatz gilt $|S| \leq |B| < \infty$. Insbesondere besitzt U eine maximal linear unabhängige Teilmenge C. Nach Lemma 4.10 ist C eine (endliche) Basis von U. Also ist U endlich erzeugt. Nach dem Basisergänzungssatz lässt sich C zu einer Basis D von V ergänzen. Die zweite Behauptung folgt dann mit $W := \langle D \setminus C \rangle$. □

Bemerkung 4.17.

(a) In der Situation von Folgerung 4.16 ist W im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Zum Beispiel gilt
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}(1,0) \oplus \mathbb{R}(0,1) = \mathbb{R}(1,0) \oplus \mathbb{R}(1,1).$$

(b) Mit dem Auswahlaxiom (genauer mit Zorns *Lemma*) kann man zeigen, dass jeder Vektorraum eine (möglicherweise unendliche) Basis besitzt und je zwei Basen gleichmächtig sind. Zum Beispiel hat $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum unendliche Basen, von denen man keine explizit angeben kann. Wir überlegen uns in Satz 6.12, wie man Basen von endlich erzeugten Vektorräumen effizient berechnet.

4.3 Dimension

Definition 4.18. Sei B eine Basis eines endlich erzeugten K-Vektorraums V. Dann nennt man
$$d = \dim_K V = \dim V := |B| \in \mathbb{N}_0$$
die *Dimension* von V.[4] Nach Satz 4.15 hängt d nicht von der Wahl von B ab. Anstatt „endlich erzeugt“ kann man nun *endlich-dimensional* oder genauer *d-dimensional* sagen.

Beispiel 4.19.

(a) Für jeden Körper K und $n \geq 1$ hat K^n Dimension n (wähle die Standardbasis). Der Unterraum $U := \{(x,x) \in K^2 : x \in K\} \leq K^2$ ist 1-dimensional mit Basis $\{(1,1)\}$.

(b) Im $\mathbb{R}^3$ beschreibt $\{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$ eine 2-dimensionale Ebene. Allgemeiner nennt man einen $(d-1)$-dimensionalen Unterraum eines d-dimensionalen Raums eine *Hyperebene*.

(c) Sei V ein d-dimensionaler $\mathbb{F}_2$-Vektorraum. Die Koordinatendarstellung bzgl. einer Basis zeigt
$$|V| = |\mathbb{F}_2^d| = |\mathbb{F}_2 \times \ldots \times \mathbb{F}_2| = 2^d.$$

Bemerkung 4.20.

(a) Aus den obigen Sätzen folgen einige nützliche Fakten:

- Für $U \leq V$ gilt $\dim U \leq \dim V$ mit Gleichheit genau dann, wenn $U = V$ (ergänze eine Basis von U zu einer Basis von V).
- Jedes Erzeugendensystem E von V enthält eine Basis von V (reduziere zu einem minimalen Erzeugendensystem). Insbesondere ist $|E| \geq \dim V$.
- $d+1$ Vektoren eines d-dimensionalen Vektorraums sind linear abhängig.

[4] Bei omnipräsenten Operatoren wie dim verzichtet man zur besseren Übersicht gern auf das Klammerpaar um das Argument, wenn Missverständnisse ausgeschlossen sind.

(b) In der linearen Algebra stehen endlich-dimensionale Vektorräume im Vordergrund, während unendlich-dimensionale Vektorräume Gegenstand der *Funktionalanalysis* sind.

(c) Die folgende Formel entspricht der Gleichung $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ für endliche Mengen A und B (Lemma 1.12).

Satz 4.21 (Dimensionsformel)**.** *Für Unterräume U und W eines endlich-dimensionalen Vektorraums V gilt*

$$\boxed{\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).}$$

Ist die Summe direkt, so gilt $\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$.

Beweis. Sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von $U \cap W$. Wir ergänzen zu einer Basis $\{b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_s\}$ von U und einer Basis $\{b_1, \ldots, b_n, d_1, \ldots, d_t\}$ von W. Da $U + W$ aus den Elementen der Form $u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$ besteht, wird $U + W$ von $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_s, d_1, \ldots, d_t$ erzeugt.

Für die lineare Unabhängigkeit seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_s, \rho_1, \ldots, \rho_t \in K$ mit

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i}_{=:v} + \underbrace{\sum_{j=1}^{s} \mu_j c_j}_{=:u} + \underbrace{\sum_{k=1}^{t} \rho_k d_k}_{=:w} = 0.$$

Dann ist $v + u = -w \in U \cap W$. Also lässt sich $v + u$ als Linearkombination von $b_1, \ldots, b_n$ ausdrücken. Andererseits ist die Darstellung von $v + u$ bzgl. der Basis $\{b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_s\}$ eindeutig nach Satz 4.8. Dies zeigt $\mu_1 = \ldots = \mu_s = 0$. Nun ist $v + w = 0$ eine Linearkombination der Basis $\{b_1, \ldots, b_n, d_1, \ldots, d_t\}$. Dies geht nur, falls $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \rho_1 = \ldots = \rho_t = 0$. Daher ist $\{b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_s, d_1, \ldots, d_t\}$ linear unabhängig und folglich eine Basis von $U + W$. Man erhält

$$\dim(U+W) = n + s + t = (n+s) + (n+t) - n = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Ist die Summe direkt, so gilt $U \cap W = \{0\}$ und die zweite Behauptung folgt. □

Beispiel 4.22. Sei

$$U := \langle (1,1,0), (0,2,1) \rangle \leq \mathbb{R}^3,$$
$$W := \langle (1,1,1) \rangle \leq \mathbb{R}^3.$$

Offenbar gilt $\dim U = 2$ und $\dim W = 1$. Für $v \in U \cap W$ existieren $\lambda, \mu, \rho \in \mathbb{R}$ mit

$$v = \lambda(1,1,0) + \mu(0,2,1) = \rho(1,1,1).$$

Es folgt $(\lambda, \lambda + 2\mu, \mu) = (\rho, \rho, \rho)$. Ein Koeffizientenvergleich liefert $\lambda = \rho = \mu$ und $3\rho = \lambda + 2\mu = \rho$. Dies kann nur für $\rho = 0$ gelten. Also ist $v = 0(1,1,1) = 0$ und $U \cap W = \{0\}$. Man erhält $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) = 2 + 1 = 3$. Wegen $U + W \leq \mathbb{R}^3$ ist daher $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

Satz 4.23. *Für Vektorräume $U \leq V$ gilt* $\boxed{\dim V = \dim(U) + \dim(V/U).}$

Beweis. Sei W ein Komplement von U in V. Sei B eine Basis von W. Es genügt zu zeigen, dass $\overline{B} := \{b + U : b \in B\}$ eine Basis von V/U ist. Jedes Element in V hat die Form $v = w + u$ mit $u \in U$ und $w \in W$. Wegen $v + U = w + U$ ist $\overline{B}$ ein Erzeugendensystem von V/U. Seien nun $\lambda_b \in K$ mit $\sum_{b \in B} \lambda_b (b + U) = 0_{V/U}$. Dann ist $\sum_{b \in B} \lambda_b b \in U$. Aus $U \cap W = \{0\}$ folgt $\lambda_b = 0$ für alle $b \in B$. Also ist $\overline{B}$ linear unabhängig. □

5 Matrizen

5.1 Der Matrizen-Vektorraum

Bemerkung 5.1. Sofern nichts Gegenteiliges gesagt wird, setzen wir von nun an stillschweigend voraus, dass alle Vektorräume endlich-dimensional sind. Eine Matrix ist ein Schema zur expliziten Berechnung von Basen von Vektorräumen und Lösungen von linearen Gleichungssystemen. Matrizen treten auch als eigenständige Objekte in zahlreichen anderen Gebieten auf.

Definition 5.2. Sei K ein Körper und $n, m \in \mathbb{N}$. Eine $(n \times m$-$)$*Matrix* über K ist ein rechteckig angeordnetes nm-Tupel

$$A = (a_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

mit $a_{ij} \in K$ für $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$. Die Menge der $n \times m$-Matrizen über K bezeichnet man mit $K^{n \times m}$. Im Fall $n = m$ nennt man A *quadratisch*.

Beispiel 5.3.

(a) Die 1×1-Matrizen entsprechen genau den Elementen aus K. Die Vektoren aus K^n kann man als $1 \times n$-Matrizen auffassen. Man spricht dann von *Zeilenvektoren*. Die $n \times 1$-Matrizen heißen demnach *Spaltenvektoren*. Wenn Missverständnisse ausgeschlossen sind, benutzen wir die Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ sowohl als Zeilen- als auch Spaltenvektoren.

(b) Die $n \times m$-*Nullmatrix* $0_{n \times m} := (0)_{i,j} \in K^{n \times m}$, $0_n := 0_{n \times n}$ (wie üblich lassen wir die Indizes weg, wenn Missverständnisse ausgeschlossen sind).

(c) Die (quadratische) $n \times n$-*Einheitsmatrix*

$$1_n = (\delta_{ij}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist δ_{ij} das KRONECKER-*Delta*:

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Die Zeilen von 1_n bilden die Standardbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von K^n.

(d) Die Einträge $a_{11}, a_{22}, \ldots$ bilden die *Hauptdiagonale* von A. Für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ nennt man

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := (\delta_{ij}\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

eine *Diagonalmatrix*. Im Spezialfall $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$ spricht man von *Skalarmatrizen*.

(e) Die $n \times m$-*Standardmatrix* E_{st} hat eine 1 an Position (s, t) und sonst nur Nullen. Mit dem Kronecker-Delta gilt $E_{st} = (\delta_{is}\delta_{jt})_{i,j}$.

(f) Für $A \in K^{n\times m}$ ist $A^{\mathrm{t}} := (a_{ji})_{i,j} \in K^{m\times n}$ die zu A *transponierte Matrix*. Sie entsteht aus A durch Spiegelung an der Hauptdiagonale:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad A^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich ist $(A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = A$. Durch Transponieren werden Zeilenvektoren zu Spaltenvektoren und umgekehrt.

(g) Quadratische Matrizen A heißen *symmetrisch*, falls $A^{\mathrm{t}} = A$.

Lemma 5.4. *Mit komponentenweisen Verknüpfungen wird $K^{n\times m}$ zu einem K-Vektorraum:*

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{i,j},$$
$$\lambda \cdot A := (\lambda a_{ij})_{i,j}$$

für $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in K^{n\times m}$ und $\lambda \in K$. Die Standardmatrizen E_{st} bilden eine Basis von $K^{n\times m}$. Insbesondere ist $\dim(K^{n\times m}) = nm$.

Beweis. Die definierten Verknüpfungen auf $K^{n\times m}$ entsprechen genau den Verknüpfungen in K^{nm}, indem man die Vektoren aus K^{nm} als $n \times m$-Matrix anordnet. Da K^{nm} ein Vektorraum ist, muss auch $K^{n\times m}$ ein Vektorraum sein. Die Standardbasisvektoren $e_1, \ldots, e_{nm}$ von K^{nm} entsprechen (bis auf Reihenfolge) genau den Standardmatrizen. □

Beispiel 5.5.

(a) Achtung: Nur Matrizen vom gleichen Format können addiert werden. Zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Die Skalarmatrizen sind genau die skalaren Vielfachen der Einheitsmatrix.

(b) Die symmetrischen Matrizen bilden einen Unterraum S von $K^{n\times n}$. Eine Basis erhält man durch die Matrizen $E_{11}, \ldots, E_{nn}$ und $E_{ij} + E_{ji}$ für $i < j$. Insbesondere ist

$$\dim S = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

5.2 Matrizenmultiplikation

Definition 5.6. Für $A = (a_{ij}) \in K^{n\times m}$ und $B = (b_{ij}) \in K^{m\times k}$ sei $A \cdot B := (c_{ij})_{i,j} \in K^{n\times k}$ mit

$$\boxed{c_{ij} := \sum_{l=1}^{m} a_{il}b_{lj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{im}b_{mj}.}$$

Bemerkung 5.7.

(a) Merkregel: c_{ij} entsteht, indem man die i-te Zeile von A mit der j-ten Spalte von B „verrechnet“:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ a & b & c \\ * & * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & a' \\ * & b' \\ * & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ * & aa' + bb' + cc' \\ * & * \end{pmatrix}$$

(die Sterne bezeichnen beliebige Einträge). Oft ist es hilfreich, sich folgendes Schema vorzustellen:

$$\boxed{4 \times 3} \cdot \boxed{3 \times 2} = \boxed{4 \times 2}$$

(b) Die Multiplikation von Diagonalmatrizen ist einfach:

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \operatorname{diag}(\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n).$$

(c) Für Standardmatrizen mit geeignetem Format gilt $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, denn der Eintrag an Position (s, t) ist

$$\sum_{u=1}^{n} \delta_{si}\delta_{uj}\delta_{uk}\delta_{tl} = \delta_{jk}\delta_{si}\delta_{tl}.$$

(d) Als Vektorraum ist $(K^{n\times n}, +)$ eine abelsche Gruppe. Das folgende Lemma zeigt, dass $(K^{n\times n}, +, \cdot)$ einige, aber nicht alle Körperaxiome erfüllt.[1]

Lemma 5.8. *Für alle Matrizen A, B, C mit „passendem“ Format und $\lambda \in K$ gilt*

$$\boxed{\begin{array}{lll} A \cdot 1_m = A = 1_n \cdot A, & (AB)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}, & \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B), \\ A(BC) = (AB)C, & A(B + C) = AB + AC, & (A + B)C = AC + BC. \end{array}}$$

Beweis. Wie üblich sei $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ und $C = (c_{ij})$. Für eine beliebige Matrix M sei M_{ij} der Eintrag an Position (i, j).[2] Dann gilt

$$(A1_m)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}a_{kj} = (1_nA)_{ij},$$

[1] Man nennt diese schwächere Struktur einen *Ring*.

[2] Achtung: Diese Bezeichnung ändert sich in Definition 9.3.

$$
\begin{aligned}
\big((AB)^{\mathrm{t}}\big)_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{m} (B^{\mathrm{t}})_{ik}(A^{\mathrm{t}})_{kj} = (B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}})_{ij},\\
\big(\lambda(AB)\big)_{ij} &= \lambda\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{m} (\lambda a_{ik})b_{kj} = \big((\lambda A)B\big)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(\lambda b_{kj}) = \big(A(\lambda B)\big)_{ij},\\
\big(A(BC)\big)_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(BC)_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\sum_{l=1}^{n} b_{kl}c_{lj} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\\
&= \sum_{l=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}\Big)c_{lj} = \sum_{l=1}^{n}(AB)_{il}c_{lj} = ((AB)C)_{ij},\\
\big(A(B+C)\big)_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{m}(a_{ik}b_{kj}+a_{ik}c_{kj})\\
&= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{m} a_{ik}c_{kj} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij},\\
\big((A+B)C\big)_{ij} &= \sum_{k=1}^{m}(a_{ik}+b_{ik})c_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{m} b_{ik}c_{kj} = (AC)_{ij} + (BC)_{ij}.
\end{aligned}
$$
□

Bemerkung 5.9.

(a) Für $A \in K^{n\times m}$ gilt selbstverständlich $0_{k\times n}\cdot A = 0_{k\times m}$ und $A\cdot 0_{m\times k} = 0_{n\times k}$.

(b) Wir nennen Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ *vertauschbar*, falls $AB = BA$. Das ist für $n \geq 2$ in der Regel nicht erfüllt:

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0_2 \neq \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}
$$

Daher ist $(K^{n\times n}, +, \cdot)$ *kein* Körper. Wir sehen auch, dass nicht jede (von 0_n verschiedene) Matrix ein Inverses bzgl. $\cdot$ besitzt (selbst die Kürzungsregel gilt nicht für Matrizen).

(c) Eine quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt *invertierbar*, falls eine Matrix $B \in K^{n\times n}$ mit

$$
AB = 1_n = BA
$$

existiert.[3] Gilt auch $AC = 1_n = CA$, so ist $C = C1_n = C(AB) = (CA)B = 1_nB = B$. Daher ist B eindeutig bestimmt und man schreibt wie bei Gruppen $A^{-1} := B$. Man nennt A^{-1} die zu A *inverse* Matrix. Wir zeigen in Lemma 5.15, dass aus $AB = 1_n$ bereits die Invertierbarkeit folgt, d. h. $BA = 1_n$ muss nicht geprüft werden.

(d) Ist A invertierbar, so auch A^{t}, denn

$$
A^{\mathrm{t}}(A^{-1})^{\mathrm{t}} = (A^{-1}A)^{\mathrm{t}} = 1_n^{\mathrm{t}} = 1_n = (AA^{-1})^{\mathrm{t}} = (A^{-1})^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}.
$$

Man setzt daher $\boxed{A^{-\mathrm{t}} := (A^{-1})^{\mathrm{t}} = (A^{\mathrm{t}})^{-1}.}$

(e) Manchmal ist es nützlich, Matrizen in rechteckige *Blöcke* zu unterteilen:

$$
A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix} \qquad \text{mit } A_1 \in K^{n_1\times m_1},\ A_2 \in K^{n_1\times m_2},\ A_3 \in K^{n_2\times m_1},\ A_4 \in K^{n_2\times m_2}
$$

[3] Invertierbare (bzw. nicht invertierbare) Matrizen nennt man auch *regulär* (bzw. *singulär*).

Für eine weitere Matrix $B = \left(\begin{smallmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{smallmatrix}\right)$ mit Blöcken $B_1 \in K^{m_1 \times k_1}$, $B_2 \in K^{m_1 \times k_2}$, $B_3 \in K^{m_2 \times k_1}$, $B_4 \in K^{m_2 \times k_2}$ gilt dann

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{pmatrix}.$$

Sind A_1 und A_4 quadratisch und $A_2 = A_3 = 0$, so nennt man $A = \left(\begin{smallmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{smallmatrix}\right) = \operatorname{diag}(A_1, A_4)$ eine *Blockdiagonalmatrix*.

Lemma 5.10. *Die invertierbaren Matrizen in $K^{n\times n}$ bilden eine Gruppe* $\mathrm{GL}(n, K)$ *bzgl. Multiplikation. Man nennt sie* allgemeine lineare Gruppe vom Grad n *über* K.

Beweis. Das neutrale Element 1_n ist offenbar invertierbar. Mit A ist auch A^{-1} invertierbar. Für invertierbare Matrizen A und B gilt

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A1_nA^{-1} = AA^{-1} = 1_n$$

und analog $(B^{-1}A^{-1})(AB) = 1_n$. Dies zeigt, dass auch AB invertierbar ist mit $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Das Assoziativgesetz der Multiplikation folgt aus Lemma 5.8. □

Beispiel 5.11. In $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$ gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.3 Der Rang einer Matrix

Satz 5.12. *Seien $z_1, \ldots, z_n$ die Zeilen und $s_1, \ldots, s_m$ die Spalten einer Matrix $A \in K^{n\times m}$. Dann gilt* $\dim\langle z_1, \ldots, z_n\rangle = \dim\langle s_1, \ldots, s_m\rangle$.

Beweis. Nach Bemerkung 4.20 existiert $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, sodass $\{z_i : i \in I\}$ eine Basis von $\langle z_1, \ldots, z_n\rangle$ ist. Sei analog $\{s_j : j \in J\}$ eine Basis von $\langle s_1, \ldots, s_m\rangle$. Sei $A = (a_{ij})$. Wir zeigen, dass die Zeilen der Matrix

$$B := (a_{ij})_{i\in I, j\in J} \in K^{|I|\times|J|}$$

linear unabhängig sind. Seien dazu $\lambda_i \in K$ mit $\sum_{i\in I} \lambda_i a_{ij} = 0$ für alle $j \in J$. Für $k \in \{1, \ldots, m\} \setminus J$ existieren $\mu_j \in K$ mit $s_k = \sum_{j\in J} \mu_j s_j$, d. h. $a_{ik} = \sum_{j\in J} \mu_j a_{ij}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es folgt

$$\sum_{i\in I} \lambda_i a_{ik} = \sum_{i\in I} \lambda_i \sum_{j\in J} \mu_j a_{ij} = \sum_{j\in J} \mu_j \sum_{i\in I} \lambda_i a_{ij} = 0.$$

Also gilt $\sum_{i\in I} \lambda_i a_{ij} = 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$, d. h. $\sum_{i\in I} \lambda_i z_i = 0$. Aus der linearen Unabhängigkeit von $\{z_i : i \in I\}$ folgt $\lambda_i = 0$ für $i \in I$. Daher sind die Zeilen von B linear unabhängig. Da sie im $|J|$-dimensionalen Vektorraum $K^{|J|}$ liegen, gilt $|I| \leq |J|$. Die Zeilen (bzw. Spalten) von A sind die Spalten (bzw. Zeilen) von A^{t}. Benutzt man das obige Argument mit A^{t}, so folgt $|J| \leq |I|$. Insgesamt ist $\dim\langle z_1, \ldots, z_n\rangle = |I| = |J| = \dim\langle s_1, \ldots, s_m\rangle$. □

Definition 5.13. In der Situation von Satz 5.12 nennt man

$$\operatorname{rk} A := \dim\langle z_1, \ldots, z_n\rangle = \dim\langle s_1, \ldots, s_m\rangle$$

den *Rang* von A. Im Fall $\operatorname{rk} A = \min\{n, m\}$ sagt man: A hat *vollen Rang.*

Beispiel 5.14.

(a) Die Einheitsmatrix 1_n hat (vollen) Rang n, denn ihre Zeilen bilden die Standardbasis. Es gilt $\operatorname{rk}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) = 1$, denn die zweite Zeile ist das Doppelte der ersten. Wir überlegen uns in Bemerkung 6.13, wie man den Rang einer beliebigen Matrix effizient berechnet.

(b) Für jede Matrix A gilt $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A^{\mathrm{t}})$ und $\operatorname{rk} A = 0 \iff A = 0$.

Lemma 5.15.

(a) Für Matrizen A und B mit „passendem" Format gilt $\operatorname{rk}(AB) \leq \min\{\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B\}$.

(b) Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie vollen Rang hat.

Beweis.

(a) Seien $s_1, \ldots, s_m$ die Spalten von A und sei $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^{\mathrm{t}}$ die i-te Spalte von B. Dann ist $\lambda_1 s_1 + \ldots + \lambda_m s_m$ die i-te Spalte von AB. Also sind die Spalten von AB Linearkombinationen der Spalten von A. Dies zeigt $\operatorname{rk}(AB) \leq \operatorname{rk} A$. Aus Beispiel 5.14 folgt

$$\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk}((AB)^{\mathrm{t}}) = \operatorname{rk}(B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}) \leq \operatorname{rk}(B^{\mathrm{t}}) = \operatorname{rk} B.$$

(b) Ist $A \in K^{n\times n}$ invertierbar, so gilt

$$n = \operatorname{rk} 1_n = \operatorname{rk}(AA^{-1}) \overset{\text{(a)}}{\leq} \operatorname{rk} A \leq n,$$

d. h. A hat vollen Rang. Sei umgekehrt $\operatorname{rk} A = n$. Dann lassen sich die Standardbasisvektoren $e_1, \ldots, e_n$ als Linearkombinationen der Spalten von A ausdrücken. Also existiert $B \in K^{n\times n}$ mit $AB = 1_n$. Wegen $\operatorname{rk}(A^{\mathrm{t}}) = \operatorname{rk} A$ existiert auch ein $C \in K^{n\times n}$ mit $A^{\mathrm{t}}C = 1_n$, d. h. $C^{\mathrm{t}}A = (A^{\mathrm{t}}C)^{\mathrm{t}} = 1_n^{\mathrm{t}} = 1_n$. Wegen $C^{\mathrm{t}} = C^{\mathrm{t}}(AB) = (C^{\mathrm{t}}A)B = B$ ist A invertierbar. □

6 Der Gauß-Algorithmus

6.1 Gleichungssysteme

Definition 6.1. Ein (*lineares*) *Gleichungssystem* ist eine Matrixgleichung der Form $Ax = b$, wobei die *Koeffizientenmatrix* $A \in K^{n\times m}$ und der Vektor $b \in K^{n\times 1}$ gegeben sind. Gesucht ist die *Lösungsmenge*

$$L := \{x \in K^{m\times 1} : Ax = b\} \subseteq K^{m\times 1}.$$

- Im Fall $L \neq \varnothing$ nennt man das Gleichungssystem *lösbar*.
- Im Fall $b = 0$ nennt man das Gleichungssystem *homogen* und anderenfalls *inhomogen*.
- Durch Anfügen der Spalte b an A erhält man die *erweiterte* Koeffizientenmatrix $(A|b) \in K^{n\times(m+1)}$.

Beispiel 6.2. Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 5, \\ -x_1 \qquad &= 2 \end{aligned}$$

entspricht der Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit genau einer Lösung $x = (-2, 3)^{\mathrm{t}}$.

Bemerkung 6.3. Jedes homogene Gleichungssystem ist lösbar, denn der Nullvektor ist eine Lösung.

Satz 6.4 (Kronecker-Capelli[1])**.** *Genau dann ist das Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar, wenn* $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A|b)$.

Beweis. Seien $s_1, \ldots, s_m$ die Spalten von A. Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A|b) &\iff \dim\langle s_1, \ldots, s_m\rangle = \dim\langle s_1, \ldots, s_m, b\rangle \\ &\iff \langle s_1, \ldots, s_m\rangle = \langle s_1, \ldots, s_m, b\rangle \iff b \in \langle s_1, \ldots, s_m\rangle \\ &\iff \exists x_1, \ldots, x_m \in K : b = \sum_{i=1}^{m} x_i s_i \iff \exists x \in K^{m\times 1} : Ax = b. \end{aligned}$$

□

[1] mitunter auch nach Rouché und Frobenius benannt

Bemerkung 6.5. Sei $A \in K^{n\times m}$ mit vollem Rang $n \leq m$. Dann ist

$$\operatorname{rk} A \leq \operatorname{rk}(A|b) \leq \min\{n, m+1\} = n = \operatorname{rk} A$$

und $Ax = b$ ist stets lösbar. Im Fall $n = m$ ist A invertierbar nach Lemma 5.15 und $x = A^{-1}b$ ist die einzige Lösung. Im Fall $n < m$ nennt man das Gleichungssystem $Ax = b$ *unterbestimmt*, d. h. es gibt weniger Gleichungen als Unbekannte. Wir zeigen, dass es dann mehrere Lösungen gibt.

Satz 6.6. *Sei $A \in K^{n\times m}$ und $b \in K^{n\times 1}$.*

(a) Die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ ist ein Unterraum L_0 von $K^{m\times 1}$ der Dimension $m - \operatorname{rk}(A)$.

(b) Besitzt das Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung $\widetilde{x}$, so ist $\widetilde{x} + L_0$ die Lösungsmenge.

Beweis.

(a) Wegen $0 \in L_0$ ist $L_0 \neq \varnothing$. Für $x, y \in L_0$ und $\lambda \in K$ gilt

$$A(\lambda x + y) = \lambda Ax + Ay = 0,$$

d. h. $\lambda x + y \in L_0$. Dies zeigt $L_0 \leq K^{m\times 1}$ (Bemerkung 3.13). Sei $b_1, \ldots, b_k$ eine Basis von L_0. Wir ergänzen zu einer Basis $b_1, \ldots, b_m$ von $K^{m\times 1}$. Die i-te Spalte von A ist Ae_i mit dem Standardbasisvektor e_i. Da e_i eine Linearkombination von $b_1, \ldots, b_m$ ist, liegt jede Spalte von A in $\langle Ab_1, \ldots, Ab_m\rangle$. Insbesondere ist $\operatorname{rk} A = \dim\langle Ab_1, \ldots, Ab_m\rangle$. Aus $b_1, \ldots, b_k \in L_0$ folgt $Ab_1 = \ldots = Ab_k = 0$ und

$$\operatorname{rk} A = \dim\langle Ab_{k+1}, \ldots, Ab_m\rangle.$$

Es genügt zu zeigen, dass die $m - k$ Vektoren $Ab_{k+1}, \ldots, Ab_m$ linear unabhängig sind, denn dann ist $\operatorname{rk} A = m - k$. Seien $\lambda_i \in K$ mit $\sum_{i=k+1}^{m} \lambda_i Ab_i = 0$. Dann ist auch $A\sum_{i=k+1}^{m} \lambda_i b_i = 0$, d. h. $\sum_{i=k+1}^{m} \lambda_i b_i \in L_0 = \langle b_1, \ldots, b_k\rangle$. Da $b_1, \ldots, b_m$ eine Basis von $K^{m\times 1}$ ist, erhält man $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_m = 0$ wie gewünscht.

(b) Es gilt

$$Ax = b \iff Ax = A\widetilde{x} \iff A(x - \widetilde{x}) = 0 \iff x - \widetilde{x} \in L_0 \iff x \in \widetilde{x} + L_0. \qquad \square$$

Bemerkung 6.7.

(a) Hat $A \in K^{n\times m}$ vollen Rang $m \leq n$, so besitzt das Gleichungssystem $Ax = b$ höchstens eine Lösung. Im Fall $m < n$ spricht man von *überbestimmten* Gleichungssystemen. Im Folgenden beschäftigen wir uns mit der expliziten Konstruktion der Lösungsmenge eines beliebigen Gleichungssystems.

(b) Da die Abbildung $L_0 \to \widetilde{x} + L_0$, $v \mapsto \widetilde{x} + v$ eine Bijektion ist, besitzt ein lösbares Gleichungssystem genauso viele Lösungen wie das entsprechende homogene Gleichungssystem. Ist K endlich (z. B. $K = \mathbb{F}_2$), so ist die Anzahl dieser Lösungen eine Potenz von $|K|$ (Satz 4.8). Für unendliche Körper wie $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ besitzt jedes Gleichungssystem keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen.

6.2 Elementare Zeilenoperationen

Definition 6.8. Die folgenden Transformationen einer Matrix $A \in K^{n\times m}$ werden (*elementare*) *Zeilenoperationen* genannt:

- Multiplikation einer Zeile von A mit einem Skalar $\lambda \in K^\times$. Dies entspricht der Multiplikation mit einer *Elementarmatrix* der Form

$$\begin{pmatrix} 1_{s-1} & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & 1_{n-s} \end{pmatrix} = 1_n + (\lambda - 1)E_{ss}$$

  von links an A.

- Vertauschen zweier Zeilen von A. Dies entspricht der Multiplikation mit einer Elementarmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1_{s-1} & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & 1_{t-s-1} & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & 1_{n-t} \end{pmatrix} = 1_n - E_{ss} - E_{tt} + E_{st} + E_{ts}$$

  von links an A.

- Addieren eines Vielfaches einer Zeile von A zu einer anderen Zeile. Dies entspricht der Multiplikation mit einer Elementarmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1_{s-1} & & & & \\ & 1 & & \lambda & \\ & & 1_{t-s-1} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1_{n-t} \end{pmatrix} = 1_n + \lambda E_{st} \qquad (\lambda \in K,\ s \neq t)$$

  von links an A.

Matrizen A und B heißen *zeilen-äquivalent*, falls sich A durch endlich viele elementare Zeilenoperationen in B überführen lässt. Ggf. schreiben wir $A \sim B$.

Bemerkung 6.9.

(a) Alle elementaren Zeilenoperationen sind umkehrbar. Aus $A \sim B$ folgt somit $B \sim A$. Außerdem sind die Elementarmatrizen invertierbar. Nach Lemma 5.10 ist auch das Produkt von Elementarmatrizen invertierbar. Aus $A \sim B$ folgt daher die Existenz einer Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit $SA = B$.

(b) Nach (a) ist die Zeilen-Äquivalenz eine Äquivalenzrelation auf $K^{n\times m}$. Im nächsten Satz bestimmen wir ein besonders einfaches Repräsentantensystem für die Äquivalenzklassen.

(c) Analog definiert man (*elementare*) *Spaltenoperationen*. Diese entsprechen der Multiplikation mit Elementarmatrizen von *rechts* an A (probieren Sie es aus). Spaltenoperationen lassen sich auch durch Zeilenoperationen an A^{t} realisieren. Wir benutzen die Schreibweise $A \sim B$ auch, wenn B aus A durch Spaltenoperationen hervorgeht. Ggf. existiert ein $S \in \mathrm{GL}(m, K)$ mit $AS = B$.

Satz 6.10 (Gauss-Algorithmus[2]). *Jede Matrix $A \in K^{n\times m}$ ist zeilen-äquivalent zu genau einer Matrix $\widehat{A}$ in* Zeilenstufenform[3]*, d. h.*

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & \vdots \end{pmatrix}.$$

Beweis. Der folgende Algorithmus überführt A in $\widehat{A}$:

(1) Setze $z := 1$ (Zeilenindex).

(2) Für $s = 1, \ldots, m$ (Spaltenindex):

- Falls $\exists i \geq z : a_{is} \neq 0$, dann:
  - Tausche i-te mit z-ter Zeile. Anschließend gilt $a_{zs} \neq 0$.
  - Dividiere z-te Zeile durch a_{zs}. Anschließend gilt $a_{zs} = 1$.
  - Für $j = 1, \ldots, z-1, z+1, \ldots, n$ subtrahiere das a_{js}-Fache der z-ten Zeile von der j-ten Zeile. Anschließend gilt $a_{js} = 0$.
  - Erhöhe z um 1.

Für die Eindeutigkeit von $\widehat{A}$ seien B und C Matrizen in Zeilenstufenform mit $A \sim B$ und $A \sim C$. Dann ist auch $B \sim C$ und es existiert $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit $SB = C$. Sei b_i (bzw. s_i) die i-te Spalte von B (bzw. S). Dann ist $c_i = Sb_i$ die i-te Spalte von C. Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis von K^n. Sei $b_i \in \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$. Wir zeigen $b_i = c_i$ und $s_k = e_k$ für $k \leq \operatorname{rk} B$ durch Induktion nach k. Im Fall $k = 0$ ist $b_i \in \langle \varnothing \rangle = \{0\}$, also $b_i = 0$. Sicher ist dann auch $c_i = Sb_i = 0$. Sei nun die Behauptung bis $k-1$ bereits bewiesen. Die erste Spalte (von links) von B, die nicht in $\langle e_1, \ldots, e_{k-1} \rangle$ liegt, ist $b_i = e_k$ wegen der Zeilenstufenform. Die Spalten von S sind linear unabhängig, da S invertierbar ist. Dies zeigt

$$c_i = Sb_i = Se_k = s_k \notin \langle s_1, \ldots, s_{k-1} \rangle = \langle e_1, \ldots, e_{k-1} \rangle.$$

Also ist c_i die erste Spalte von C, die nicht in $\langle e_1, \ldots, e_{k-1} \rangle$ liegt, d. h. $c_i = e_k = s_k = b_i$ (Zeilenstufenform). Für jede weitere Spalte $b_j \in \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$ gilt nun $c_j = Sb_j = (e_1, \ldots, e_k, s_{k+1}, \ldots, s_n)b_j = b_j$. Somit ist $b_i = c_i$ für $i = 1, \ldots, m$, d. h. $B = C$. □

Beispiel 6.11.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid :2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 \\ \\ + \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5/2 & -5/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ -1/2 \quad 5/2 \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 17/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid :17/2 \end{matrix}$$

[2] auch *Gauß-Elimination* oder *Gauß-Jordan-Algorithmus* genannt

[3] Jede von 0 verschiedene Zeile enthält eine *führende Eins*. Alle Einträge links, ober- und unterhalb einer führenden Eins sind 0. Die führenden Einsen rutschen mit jeder Zeile weiter nach rechts. Nullzeilen (falls vorhanden) stehen unten.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow + \\ \longleftarrow + \\ \quad -3 \quad 3/2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.3 Anwendungen

Satz 6.12. *Sei $U := \langle u_1, \dots, u_n \rangle \leq K^m$. Sei $A \in K^{n \times m}$ die Matrix mit Zeilen $u_1, \dots, u_n$. Dann bilden die von 0 verschiedenen Zeilen von $\widehat{A}$ eine Basis von U. Insbesondere ist* $\dim U = \operatorname{rk} \widehat{A} = \operatorname{rk} A$.

Beweis. Durch elementare Zeilenoperationen werden Zeilen von A durch Linearkombinationen von Zeilen ersetzt. Die Zeilen von $\widehat{A}$ erzeugen daher einen Unterraum $W \leq U$. Da alle Zeilenoperationen umkehrbar sind, gilt sogar $W = U$ und $\dim U = \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \widehat{A}$. Sei k die Anzahl der von 0 verschiedenen Zeilen in $\widehat{A}$. Dann gilt $\operatorname{rk} \widehat{A} \leq k$. Andererseits besitzt $\widehat{A}$ die linear unabhängigen Spalten $e_1, \dots, e_k$. Dies zeigt $\operatorname{rk} \widehat{A} = k$ und die Behauptung folgt. □

Bemerkung 6.13. Zur Ermittlung einer Basis von U muss man beim Gauß-Algorithmus keine Nullen oberhalb der führenden Einsen erzeugen (die von 0 verschiedenen Zeilen sind trotzdem linear unabhängig, denn deren Anzahl bleibt gleich). Außerdem ist es ratsam, Divisionen zu vermeiden, indem man mit Zeilen tauscht, die bereits eine führende Eins in der aktuellen Spalte haben. Ist man nur an $\dim U$ (oder allgemeiner an $\operatorname{rk} A$) interessiert, so darf man wegen $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A^{\mathrm{t}})$ auch elementare Spaltenoperationen verwenden. Dies kann nützlich sein, wenn A weniger Spalten als Zeilen besitzt (viele Möglichkeiten führen zum Ziel).

Beispiel 6.14. Eine Art Schach-Rätsel: Rang in zwei Zügen!

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \operatorname{rk} A = 2$$

Satz 6.15. *Sei $Ax = b$ ein Gleichungssystem mit $A \in K^{n \times m}$. Sei $(\widehat{A}|c)$ die Zeilenstufenform von $(A|b)$. Dann gilt:*

(a) Genau dann ist $Ax = b$ lösbar, wenn e_{m+1} keine Zeile von $(\widehat{A}|c)$ ist.

Ggf. erhält man die Lösungsmenge wie folgt: Seien $(1, n_1), \dots, (k, n_k)$ die Positionen der führenden Einsen in $(\widehat{A}|c)$. Die $n-k$ Nullzeilen werden gestrichen. Für alle $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{n_1, \dots, n_k\}$ fügen wir die Zeile $-e_i$ an Position i ein, sodass die resultierende Matrix $M \in K^{m \times (m+1)}$ auf der Hauptdiagonale nur Einträge ± 1 besitzt.

(b) Die letzte Spalte $\widetilde{x}$ von M erfüllt $A\widetilde{x} = b$.

(c) Die $m-k$ Spalten von M, die nicht zu den Indizes $n_1, \dots, n_k$ gehören, bilden eine Basis von $L_0 := \{x \in K^{m \times 1} : Ax = 0\}$.

(d) Die Lösungsmenge von $Ax = b$ ist $\widetilde{x} + L_0$.

Beweis. Sei $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit $(SA|Sb) = S(A|b) = (\widehat{A}|c)$. Für $x \in K^{m\times 1}$ gilt

$$Ax = b \iff SAx = Sb \iff \widehat{A}x = c.$$

Ist e_{m+1} eine Zeile von $(\widehat{A}|c)$, so erhält man in der Gleichung $\widehat{A}x = c$ den Widerspruch $0 = 1$, d. h. es gibt keine Lösung.

Sei nun e_{m+1} keine Zeile von $(\widehat{A}|c)$. Wir verifizieren die Behauptungen an folgendem Beispiel

$$(\widehat{A}|c) = \left(\begin{array}{ccccc|c} . & 1 & a_1 & . & a_2 & c_1 \\ . & . & . & 1 & a_3 & c_2 \\ . & . & . & . & . & . \end{array}\right) \qquad M = \begin{pmatrix} -1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & a_1 & . & a_2 & c_1 \\ . & . & -1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & a_3 & c_2 \\ . & . & . & . & -1 & . \end{pmatrix}$$

(hier steht . für 0 zur besseren Übersicht). Man sieht leicht, dass $\widehat{A}\widetilde{x} = c$ gilt. Somit gilt auch $A\widetilde{x} = b$. Damit sind (a) und (b) bewiesen. Genauso sieht man, dass die (rot markierten) Spalten s_1, s_3 und s_5 von M in L_0 liegen. Die verschiedenen Positionen der Einträge -1 in s_i implizieren die lineare Unabhängigkeit von $\{s_1, s_3, s_5\}$. Nach Satz 6.6 und Satz 6.12 ist andererseits

$$\dim L_0 = m - \mathrm{rk}(A) = m - \mathrm{rk}(\widehat{A}) = m - k = 3.$$

Dies zeigt (c). Aus Satz 6.6 folgt (d). □

Beispiel 6.16.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 11 \\ -2 & 1 & -3 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L = \widetilde{x} + L_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Kontrolle:

$$A\widetilde{x} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = b.$$

Satz 6.17 (Matrizeninversion)**.** *Für $A \in K^{n\times n}$ sei $(\widehat{A}|B)$ die Zeilenstufenform von $(A|1_n) \in K^{n\times 2n}$. Genau dann ist A invertierbar, wenn $\widehat{A} = 1_n$. Ggf. ist $A^{-1} = B$.*

Beweis. Es gilt

$$A \text{ invertierbar} \overset{5.15}{\iff} \operatorname{rk} A = n \overset{6.12}{\iff} \operatorname{rk} \widehat{A} = n \iff \widehat{A} = 1_n.$$

Sei nun $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit

$$(SA|S) = S(A|1_n) = (\widehat{A}|B) = (1_n|B).$$

Dann ist $B = S = S(AA^{-1}) = (SA)A^{-1} = 1_nA^{-1} = A^{-1}$. □

Folgerung 6.18. *Jede invertierbare Matrix ist ein Produkt von Elementarmatrizen.*

Beweis. Für $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ gilt $A \sim 1_n$ nach Satz 6.17. □

Beispiel 6.19.

$$(A|1_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \mid : (-3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & -1/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 6.20.

(a) Ergibt sich während des Gauß-Algorithmus ein „Versatz“ der Zeilen

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & & * \end{pmatrix},$$

so muss die Zeilenstufenform eine Nullzeile aufweisen. Die Matrix kann dann nicht invertierbar sein und man kann den Algorithmus vorzeitig abbrechen.

(b) Matrizen $A, B \in K^{n\times m}$ heißen *äquivalent*, falls man A durch Zeilen- und Spaltenoperationen in B überführen kann (und umgekehrt). Das bedeutet, es existieren $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ und $T \in \mathrm{GL}(m, K)$ mit $SAT = B$. Offenbar definiert dies eine Äquivalenzrelation. Man sieht leicht, dass jede Matrix A zu einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

äquivalent ist. Dabei ist $r = \operatorname{rk} A$ eindeutig bestimmt. Insbesondere sind A und B genau dann äquivalent, wenn $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$ gilt. Man braucht für die Äquivalenz also kein neues Symbol einzuführen. Die Anzahl der Äquivalenzklassen von $n \times n$-Matrizen ist $n + 1$.

(c) Der folgende Satz liefert einen effizienten Algorithmus, um gleichzeitig Summe und Durchschnitt von Unterräumen zu bestimmen.

Satz 6.21 (Zassenhaus-Algorithmus)**.** *Seien $U := \langle u_1, \dots, u_s \rangle \leq K^n$ und $W := \langle w_1, \dots, w_t \rangle \leq K^n$. Sei*

$$A := \begin{pmatrix} u_1 & u_1 \\ \vdots & \vdots \\ u_s & u_s \\ w_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ w_t & 0 \end{pmatrix} \in K^{(s+t)\times 2n}, \qquad \widehat{A} = \begin{pmatrix} b_1 & * \\ \vdots & \vdots \\ b_k & * \\ 0 & c_1 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & c_l \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_l \in K^n$ mit $b_k \neq 0 \neq c_l$. Dann ist $\{b_1, \dots, b_k\}$ eine Basis von $U + W$ und $\{c_1, \dots, c_l\}$ ist eine Basis von $U \cap W$.

Beweis. Wegen $U + W = \langle u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_t \rangle$ ist $\{b_1, \dots, b_k\}$ eine Basis von $U + W$ nach Satz 6.12. Außerdem ist jede Zeile der Form $(0, c_m)$ von $\widehat{A}$ eine Linearkombination der Zeilen von A, sagen wir

$$(0, c_m) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i (u_i, u_i) + \sum_{j=1}^{t} \mu_j (w_j, 0)$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_s, \mu_1, \dots, \mu_t \in K$. Dies zeigt

$$c_m = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i u_i = -\sum_{j=1}^{t} \mu_j w_j \in U \cap W$$

für $m = 1, \dots, l$. Aufgrund der Zeilenstufenform ist $\{c_1, \dots, c_l\}$ linear unabhängig. Durch elementare *Spalten*operationen überführt man A in

$$\begin{pmatrix} 0 & u_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & u_s \\ w_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ w_t & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus Bemerkung 6.13 folgt nun leicht $\operatorname{rk} A = \dim(U) + \dim(W)$. Die Dimensionsformel liefert daher

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) = \operatorname{rk}(A) - k = \operatorname{rk}(\widehat{A}) - k = l.$$

Also ist $\{c_1, \dots, c_l\}$ eine Basis von $U \cap W$. □

Beispiel 6.22. Sei $U := \langle (1,1,1,0), (0,-4,1,5) \rangle$ und $W := \langle (0,-2,1,2), (1,-1,1,3) \rangle$. Wie üblich muss man nicht alle Schritte des Gauß-Algorithmus durchführen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 5 & 0 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 5 & 0 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Es folgt $U + W = \langle (1,1,1,0), (0,-2,1,2), (0,0,-1,1) \rangle$ und $U \cap W = \langle (-1,3,-2,-5) \rangle$.

7 Lineare Abbildungen

7.1 Homomorphismen und Isomorphismen

Bemerkung 7.1. Um verschiedene Vektorräume V und W in Beziehung zu setzen, studieren wir Abbildungen $V \to W$, die Addition und Skalarmultiplikation „respektieren“. Es wird sich zeigen, dass solche Abbildungen durch Matrizen beschrieben werden können.

Definition 7.2. Eine Abbildung $f\colon V \to W$ zwischen K-Vektorräumen V und W heißt *linear* oder *Homomorphismus*, falls für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

$$\boxed{f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v).}$$

Die Menge der linearen Abbildungen $V \to W$ wird mit $\mathrm{Hom}(V, W)$ bezeichnet. Ist f linear und bijektiv, so nennt man f einen *Isomorphismus*. Ggf. nennt man V und W *isomorph* und schreibt $V \cong W$.

Bemerkung 7.3.

(a) Für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ gilt $f(0_V) = 0_W$, denn

$$f(0_V) = f(1_K 0_V + 0_V) = 1_K f(0_V) + f(0_V) = f(0_V) + f(0_V).$$

(b) Eine Abbildung $f\colon V \to W$ ist genau dann linear, wenn

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(u) + f(v), \\ f(\lambda u) &= \lambda f(u) \end{aligned}$$

für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in K$ gilt (setze $\lambda = 1$ bzw. $v = 0$ in Definition 7.2; vgl. Bemerkung 3.13). Isomorphe Vektorräume unterscheiden sich daher nur durch die Benennung ihrer Elemente.

(c) Sei $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ und $g \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Für $u, u' \in U$ und $\lambda \in K$ gilt

$$(g \circ f)(\lambda u + u') = g(\lambda f(u) + f(u')) = \lambda g(f(u)) + g(f(u')) = \lambda (g \circ f)(u) + (g \circ f)(u').$$

Dies zeigt $g \circ f \in \mathrm{Hom}(U, W)$.

(d) Ist $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus, so ist auch $f^{-1}\colon W \to V$ ein Isomorphismus[1], denn für $w, w' \in W$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda w + w') &= f^{-1}\big(\lambda f(f^{-1}(w)) + f(f^{-1}(w'))\big) \\ &= f^{-1}\big(f(\lambda f^{-1}(w) + f^{-1}(w'))\big) = \lambda f^{-1}(w) + f^{-1}(w'). \end{aligned}$$

[1] In der Analysis ist die Umkehrabbildung einer bijektiven stetigen Funktion nicht unbedingt stetig. Daher gibt es den merkwürdigen Begriff *Homöomorphismus* (kein Tippfehler).

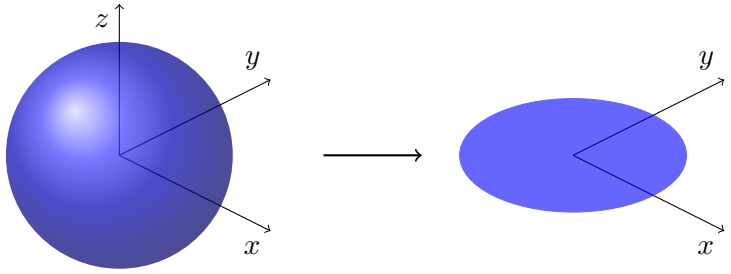
(e) Die Isomorphie von Vektorräumen ist eine Äquivalenzrelation.[2] Die Reflexivität folgt aus dem Isomorphismus id_V (Beispiel 7.4), die Symmetrie folgt aus (d) und die Transitivität folgt aus (c).

Beispiel 7.4.

(a) Die *Nullabbildung* $0\colon V \to W$, $v \mapsto 0_W$ ist stets linear. Die Identität $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ ist ein Isomorphismus.

(b) Für $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ und $U \leq V$ ist die Einschränkung $f_{|U}$ linear. Insbesondere ist die Inklusionsabbildung $U \to V$ als Einschränkung von id_V linear.

(c) Für $n \leq m$ ist die *Projektion* $K^m \to K^n$, $(x_1,\dots,x_m) \mapsto (x_1,\dots,x_n)$ ein surjektiver Homomorphismus. Die Projektion $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ reduziert ein 3-dimensionales Objekt auf seinen „Schatten“:



(d) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear und $a := f(1)$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = f(x1) = xf(1) = ax$. Der Graph von f beschreibt daher eine Gerade durch den Koordinatenursprung. Achtung: In der Schulmathematik werden mitunter auch Funktionen der Form $f(x) = ax + b$ als „linear“ bezeichnet (solche Abbildungen heißen *affin*,[3] siehe Aufgabe I.25).

(e) Für $A \in K^{n\times m}$ ist die Abbildung $K^{m\times 1} \to K^{n\times 1}$, $x \mapsto Ax$ nach Lemma 5.8 linear. Wir zeigen in Satz 7.18, dass jede lineare Abbildung (nach Basiswahl) diese Form besitzt.

(f) Die Transposition $K^{n\times m} \to K^{m\times n}$, $A \mapsto A^{\mathrm{t}}$ ist ein Isomorphismus.

(g) Für jede n-elementige Menge $M = \{x_1,\dots,x_n\}$ ist die Abbildung $\mathrm{Abb}(M,V) \to V^n$, $f \mapsto (f(x_1),\dots,f(x_n))$ ein Isomorphismus.

Lemma 7.5. *Für $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$, $V_1 \leq V$ und $W_1 \leq W$ ist $f(V_1) \leq W$ und $f^{-1}(W_1) \leq V$. Insbesondere ist $f(V) \leq W$ und $\operatorname{Ker} f := f^{-1}(\{0\}) \leq V$.*

Beweis. Wegen $0 = f(0) \in f(V_1)$ ist $f(V_1) \neq \varnothing$. Für $u, v \in V_1$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\lambda f(u) + f(v) = f(\lambda u + v) \in f(V_1).$$

Dies zeigt $f(V_1) \leq W$ (Bemerkung 3.13). Wegen $f(0) = 0 \in W_1$ ist auch $f^{-1}(W_1) \neq \varnothing$. Für $u, v \in f^{-1}(W_1)$ und $\lambda \in K$ gilt $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v) \in W_1$, d. h. $\lambda u + v \in f^{-1}(W_1)$. Dies zeigt $f^{-1}(W_1) \leq V$. □

Definition 7.6. In der Situation von Lemma 7.5 nennt man $\operatorname{Ker} f$ den *Kern* von f und

$$\operatorname{rk} f := \dim f(V)$$

den *Rang* von f. Für $A \in K^{n\times m}$ sei $\operatorname{Ker} A := \{x \in K^{m\times 1} : Ax = 0\}$ der *Kern* von A.

[2] Allerdings ist die Gesamtheit aller Vektorräume keine Menge, sondern eine *Klasse*.
[3] Ein Beispiel ist die Umrechnung von Grad Celsius nach Fahrenheit: $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$.

Lemma 7.7. *Genau dann ist $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ injektiv, wenn $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Ggf. ist $V \to f(V)$, $v \mapsto f(v)$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Sei f injektiv und $v \in \operatorname{Ker} f$. Aus $f(v) = 0 = f(0)$ folgt $v = 0$, d. h. $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Sei umgekehrt $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ und $u, v \in V$ mit $f(u) = f(v)$. Dann ist $f(u - v) = f(u) - f(v) = 0$, also $u - v \in \operatorname{Ker} f = \{0\}$. Daher ist $u = v$ und f ist injektiv. Die zweite Aussage ist trivial. □

Satz 7.8. *Seien V und W Vektorräume. Sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V und seien $c_1, \ldots, c_n \in W$ beliebig. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ mit $f(b_i) = c_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Dabei gilt:*

(a) f injektiv $\iff$ $c_1, \ldots, c_n$ linear unabhängig.

(b) f surjektiv $\iff$ $W = \langle c_1, \ldots, c_n \rangle$.

(c) f Isomorphismus $\iff$ $c_1, \ldots, c_n$ Basis von W.

Beweis. Jedes $u \in V$ lässt sich eindeutig in der Form $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$ schreiben. Wir definieren

$$f(u) := \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i \in W.$$

Für $v = \sum_{i=1}^n \mu_i b_i$ und $\rho \in K$ gilt

$$f(\rho u + v) = f\Big(\sum_{i=1}^n (\rho\lambda_i + \mu_i) b_i\Big) = \sum_{i=1}^n (\rho\lambda_i + \mu_i) c_i = \rho \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i + \sum_{i=1}^n \mu_i c_i = \rho f(u) + f(v).$$

Also ist f linear mit $f(b_i) = c_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Ist auch $g \in \mathrm{Hom}(V,W)$ mit $g(b_i) = c_i$ für $i = 1, \ldots, n$, so gilt

$$g(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i g(b_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(b_i) = f(u)$$

für alle $u \in V$. Somit ist $g = f$ und f ist eindeutig bestimmt.

(a) Sei f injektiv und $\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i = 0$ für $\lambda_i \in K$. Dann ist

$$f\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i\Big) = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i = 0.$$

Aus Lemma 7.7 folgt $\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \in \operatorname{Ker} f = \{0\}$. Da $b_1, \ldots, b_n$ linear unabhängig sind, erhält man $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Also sind $c_1, \ldots, c_n$ linear unabhängig. Seien nun umgekehrt $c_1, \ldots, c_n$ linear unabhängig und $u := \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \in \operatorname{Ker} f$. Dann ist $\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i = f(u) = 0$ und man erhält $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Daher ist $u = 0$ und $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Nach Lemma 7.7 ist f injektiv.

(b) Aus $f(\sum \lambda_i b_i) = \sum \lambda_i c_i$ für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ folgt $f(V) = \langle c_1, \ldots, c_n \rangle$. Dies zeigt die Behauptung.

(c) Folgt aus (a) und (b). □

Bemerkung 7.9. Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Im Fall $\dim V < \dim W$ ist f nicht surjektiv, denn das Bild einer Basis von V kann kein Erzeugendensystem von W sein. Im Fall $\dim V > \dim W$ ist f nicht injektiv, denn das Bild einer Basis kann nicht linear unabhängig sein. Für $\dim V = \dim W$ erhält man

$$f \text{ injektiv} \iff f \text{ surjektiv} \iff f \text{ bijektiv}$$

(vgl. Bemerkung 2.11(e)).

Satz 7.10. *Zwei K-Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie die gleiche Dimension haben. Insbesondere ist jeder n-dimensionale K-Vektorraum zu K^n isomorph.*

Beweis. Sei $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus von Vektorräumen und B eine Basis von V. Nach Satz 7.8 ist $f(B)$ eine Basis von W. Also gilt $\dim V = |B| = |f(B)| = \dim W$. Haben umgekehrt V und W die gleiche Dimension, so gibt es Basen $\{b_1, \ldots, b_n\}$ und $\{c_1, \ldots, c_n\}$ von V bzw. W. Nach Satz 7.8 existiert ein Isomorphismus $f\colon V \to W$ mit $f(b_i) = c_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Die zweite Behauptung folgt aus $\dim K^n = n$. Einen expliziten Isomorphismus erhält man durch die Koordinatendarstellung $V \to K^n$, $v \mapsto {}_B[v]$ bzgl. einer Basis B von V (sie bildet B auf die Standardbasis von K^n ab). □

Bemerkung 7.11.

(a) Die Vektorräume $\{0\}, K, K^2, \ldots$ bilden ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen von endlich-dimensionalen K-Vektorräumen.

(b) Für K-Vektorräume $V_1, \ldots, V_n$ mit $d_i := \dim V_i$ gilt $V_1 \times \ldots \times V_n \cong K^{d_1} \times \ldots \times K^{d_n} \cong K^{d_1 + \ldots + d_n}$.

(c) Obwohl $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}^2$ gleichmächtig sind, gilt $\mathbb{Q} \ncong \mathbb{Q}^2$ nach Satz 7.10.

(d) Seien $U, V \leq W$ Vektorräume. Offenbar gilt $V \leq U + V$ und $U \cap V \leq U$. Aus Satz 4.23 und der Dimensionsformel folgt

$$\dim((U+V)/V) = \dim(U+V) - \dim(V) = \dim(U) - \dim(U \cap V) = \dim(U/(U \cap V)).$$

Mit Satz 7.10 erhält man den sogenannten *ersten Isomorphiesatz*[4]

$$\boxed{(U+V)/V \cong U/(U \cap V).}$$

(e) Für Vektorräume $U \leq V \leq W$ gilt offenbar $V/U \leq W/U$. Aus

$$\begin{aligned}\dim\big((W/U)/(V/U)\big) &= \dim(W/U) - \dim(V/U) \\ &= \dim(W) - \dim(U) - \dim(V) + \dim(U) = \dim(W/V)\end{aligned}$$

erhält man den *zweiten Isomorphiesatz*[5]

$$\boxed{(W/U)/(V/U) \cong W/V}$$

(vgl. Aufgabe I.11).

[4] Merkregel: Auf einer Seite stehen zwei U, auf der anderen Seite zwei V.
[5] Merkregel: Kürzen eines Doppelbruchs.

Satz 7.12 (Homomorphiesatz)**.** *Für $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon V/\operatorname{Ker}(f) &\to f(V), \\ v+\operatorname{Ker}(f) &\mapsto f(v) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus. Also gilt $\boxed{V/\operatorname{Ker}(f) \cong f(V)}$ *und* $\boxed{\dim V = \operatorname{rk}(f) + \dim \operatorname{Ker}(f).}$

Beweis. Für $v, w \in V$ gilt

$$\begin{aligned} v+\operatorname{Ker}(f) = w+\operatorname{Ker}(f) &\iff v-w \in \operatorname{Ker}(f) \iff f(v-w)=0 \\ &\iff f(v)=f(w) \iff \overline{f}(v+\operatorname{Ker}(f)) = \overline{f}(w+\operatorname{Ker}(f)). \end{aligned}$$

Die Implikation $\Rightarrow$ zeigt, dass $\overline{f}$ wohldefiniert ist, während die Implikation $\Leftarrow$ zeigt, dass $\overline{f}$ injektiv ist. Offenbar ist $\overline{f}$ auch linear und surjektiv. Die Gleichung für $\dim V$ folgt aus Satz 4.23. □

7.2 Darstellungsmatrizen

Satz 7.13. *Für K-Vektorräume V und W ist* $\mathrm{Hom}(V,W)$ *ein Unterraum von* $\mathrm{Abb}(V,W)$*.*

Beweis. Sicher liegt das neutrale Element $f=0$ von $\mathrm{Abb}(V,W)$ in $\mathrm{Hom}(V,W)$. Seien $f, g \in \mathrm{Hom}(V,W)$, $u, v \in V$ und $\lambda, \mu \in K$. Wegen

$$\begin{aligned} (f+g)(\mu u+v) &= f(\mu u+v)+g(\mu u+v) = \mu f(u)+f(v)+\mu g(u)+g(v) = \mu(f+g)(u)+(f+g)(v), \\ (\lambda f)(\mu u+v) &= \lambda f(\mu u+v) = \lambda(\mu f(u)+f(v)) = \mu\lambda f(u)+\lambda f(v) = \mu(\lambda f)(u)+(\lambda f)(v) \end{aligned}$$

sind $f+g$ und λf linear. □

Bemerkung 7.14. Ist B eine Basis von V, so ist die Einschränkungsabbildung $\mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{Abb}(B,W)$, $f \mapsto f_{|B}$ ein Isomorphismus nach Satz 7.8.

Definition 7.15. Seien V und W Vektorräume mit Basen $B=\{b_1,\dots,b_m\}$ bzw. $C=\{c_1,\dots,c_n\}$. Sei $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ und $f(b_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}c_j$ mit $a_{ji} \in K$ für $i=1,\dots,m$.

(a) Man nennt ${}_C[f]_B := (a_{ji}) \in K^{n\times m}$ die *Darstellungsmatrix* von f bzgl. B und C.

(b) Im Fall $V=W$ und $f=\mathrm{id}_V$ nennt man ${}_C\Delta_B := {}_C[\mathrm{id}_V]_B$ die *Basiswechselmatrix* bzgl. B und C.

(c) Sind B und C die Standardbasen von $V=K^m$ und $W=K^n$, so setzt man $[f] := {}_C[f]_B$. Merkregel: Die Spalten von $[f]$ sind die Bilder der Standardbasis.

Bemerkung 7.16. In der Situation von Definition 7.15 gilt ${}_B\Delta_B = 1_m$.

Beispiel 7.17. Die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x,y) \mapsto (2x-y,\ y,\ -3x)$$

ist linear mit Matrix

$$[f] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Offenbar sind $B := \big\{(1,-1),(0,2)\big\}$ und $C := \big\{(1,1,1),(0,-1,1),(1,0,1)\big\}$ Basen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$. Wegen

$$f(1,-1) = (3,-1,-3) = -7(1,1,1) - 6(0,-1,1) + 10(1,0,1),$$
$$f(0,2) = (-2,2,0) = 4(1,1,1) + 2(0,-1,1) - 6(1,0,1)$$

ergibt sich

$${}_C[f]_B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -6 & 2 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}$$

(im Zweifel müssen Sie die Einträge durch ein Gleichungssystem bestimmen).

Satz 7.18. *Sei V ein m-dimensionaler Vektorraum mit Basis B und sei W ein n-dimensionaler Vektorraum mit Basis C. Dann ist die Abbildung*

$${}_C[.]_B \colon \operatorname{Hom}(V,W) \to K^{n\times m}, \qquad f \mapsto {}_C[f]_B$$

ein Isomorphismus mit

$$\boxed{{}_C[f(v)]^{\mathrm{t}} = {}_C[f]_B\,{}_B[v]^{\mathrm{t}}}$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\ f\ } & W \\ {\scriptstyle {}_B[.]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle {}_C[.]} \\ K^m & \xrightarrow[{}_C[f]_B]{} & K^n \end{array}$$

für alle $v \in V$. Insbesondere ist $\dim \operatorname{Hom}(V,W) = nm$ *und* $\operatorname{rk} f = \operatorname{rk}({}_C[f]_B)$.

Beweis. Sei $B = \{b_1,\dots,b_m\}$ und $C = \{c_1,\dots,c_n\}$. Nach Satz 7.8 ist ${}_C[.]_B$ eine Bijektion. Seien $f, g \in \operatorname{Hom}(V,W)$ mit ${}_C[f]_B = (a_{ij})$ und ${}_C[g]_B = (a'_{ij})$. Für $i = 1,\dots,m$ und $\lambda \in K$ gilt

$$(\lambda f + g)(b_i) = \lambda f(b_i) + g(b_i) = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ji}c_j + \sum_{j=1}^{n} a'_{ji}c_j = \sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{ji} + a'_{ji})c_j.$$

Dies zeigt ${}_C[\lambda f + g]_B = \lambda\,{}_C[f]_B + {}_C[g]_B$. Also ist ${}_C[.]_B$ ein Isomorphismus. Sei $v = \sum_{i=1}^{m} v_i b_i$. Dann ist

$$f(v) = \sum_{i=1}^{m} v_i f(b_i) = \sum_{i=1}^{m} v_i \sum_{j=1}^{n} a_{ji}c_j = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ji}v_i\Big)c_j$$

und es folgt

$${}_C[f]_B\,{}_B[v]^{\mathrm{t}} = \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ji}v_i\Big)_j^{\mathrm{t}} = {}_C[f(v)]^{\mathrm{t}}.$$

Offenbar ist ${}_B[b_i] = e_i$ der i-te Standardbasisvektor. Also ist ${}_C[f(b_i)]^{\mathrm{t}} = {}_C[f]_B\,{}_B[b_i]^{\mathrm{t}}$ die i-te Spalte von ${}_C[f]_B$. Da ${}_C[.]$ ein Isomorphismus ist, gilt

$$\operatorname{rk} f = \dim\langle f(b_1),\dots,f(b_m)\rangle = \dim\langle {}_C[f(b_1)],\dots,{}_C[f(b_m)]\rangle = \operatorname{rk}({}_C[f]_B). \qquad \square$$

Bemerkung 7.19.

(a) Für $V = W$ und $f = \mathrm{id}_V$ erhält man ${}_C[v]^{\mathrm{t}} = {}_C\Delta_{BB}[v]^{\mathrm{t}}$. Für $f\colon K^n \to K^m$ gilt $f(v)^{\mathrm{t}} = [f]v^{\mathrm{t}}$ bzgl. der Standardbasen.

(b) Sei $U \leq V$. Nach Folgerung 4.16 besitzt U ein Komplement W, d. h. $V = U \oplus W$. Die Projektion $f\colon V \to W$, $u + w \mapsto w$ für $u \in U$ und $w \in W$ ist ein Homomorphismus mit $\operatorname{Ker} f = U$. Daher ist jeder Unterraum Kern eines Homomorphismus. Seien B und C Basen von V bzw. W. Für $A := {}_C[f]_B$ gilt $\operatorname{Ker} f = \{v \in V : A_B[v]^{\mathrm{t}} = 0\}$ nach Satz 7.18. Also lässt sich U als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems beschreiben.

Beispiel 7.20. Seien f, B und C wie in Beispiel 7.17. Für $v := (2,4) = 2(1,-1) + 3(0,2) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$f(v)^{\mathrm{t}} = [f]v^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix},$$

$${}_C[f(v)]^{\mathrm{t}} = {}_C[f]_B {}_B[v]^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -6 & 2 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Kontrolle: $-2(1,1,1) - 6(0,-1,1) + 2(1,0,1) = (0,4,-6) = f(v)$.

Folgerung 7.21. *Sei $f \in \operatorname{Hom}(V,W)$ und $A := {}_C[f]_B \in K^{n\times m}$ bzgl. beliebiger Basen. Dann gilt*

(a) f injektiv $\iff \operatorname{rk} A = m$.

(b) f surjektiv $\iff \operatorname{rk} A = n$.

Beweis.

(a) f injektiv $\overset{7.7}{\iff} \operatorname{Ker} f = \{0\} \overset{7.12}{\iff} \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} f = m$.

(b) f surjektiv $\iff f(V) = W \iff \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} f = \dim W = n$. □

Satz 7.22. *Seien U, V und W Vektorräume mit Basen B, C bzw. D. Seien $f \in \operatorname{Hom}(U,V)$ und $g \in \operatorname{Hom}(V,W)$. Dann ist*

$$\boxed{{}_D[g \circ f]_B = {}_D[g]_C {}_C[f]_B.}$$

Beweis. Nach Bemerkung 7.3 ist $g \circ f \in \operatorname{Hom}(U,W)$. Sei $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$, $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ und $D = \{d_1, \ldots, d_k\}$. Sei ${}_C[f]_B = (a_{ij})$ und ${}_D[g]_C = (a'_{ij})$. Dann gilt

$$(g \circ f)(b_i) = g\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} c_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} g(c_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \sum_{l=1}^{k} a'_{lj} d_l = \sum_{l=1}^{k} \Big(\sum_{j=1}^{n} a'_{lj} a_{ji}\Big) d_l.$$

Darin ist $\sum_{j=1}^{n} a'_{lj} a_{ji}$ der Eintrag von ${}_D[g]_C {}_C[f]_B$ an Position (l,i) wie gewünscht. □

Bemerkung 7.23. Merkregel: Die Komposition von linearen Abbildungen entspricht der Multiplikation von Matrizen. Für lineare Abbildungen f, g, h zwischen „passenden“ Räumen übertragen sich die Distributivgesetze von Matrizen:

$$(f+g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h) \qquad f \circ (g+h) = (f \circ g) + (f \circ h).$$

Das kann man natürlich auch direkt nachrechnen.

Beispiel 7.24. Seien f, B und C wie in Beispiel 7.17. Sei $g \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ mit Matrix ${}_B[g]_C = -\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt

$$ {}_B[g \circ f]_B = {}_B[g]_C {}_C[f]_B = -\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -6 & 2 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} = 1_2 = {}_B[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_B, $$

d. h. $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Umgekehrt ist $f \circ g \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, denn f kann nicht surjektiv sein.

Folgerung 7.25. *Sei $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus zwischen Vektorräumen V und W mit Basen B bzw. C. Dann ist* $\boxed{{}_B[f^{-1}]_C = {}_C[f]_B^{-1}.}$ *Im Fall $V = W$ ist ${}_C\Delta_B^{-1} = {}_B\Delta_C$.*

Beweis. Nach Bemerkung 7.3 ist $f^{-1} \in \operatorname{Hom}(W, V)$. Aus Satz 7.22 folgt

$$ {}_C[f]_B {}_B[f^{-1}]_C = {}_C[\mathrm{id}_W]_C = {}_C\Delta_C = 1_{|C|} $$

und ${}_B[f^{-1}]_C = {}_C[f]_B^{-1}$. Die zweite Aussage folgt mit $f = \mathrm{id}_V$. □

Bemerkung 7.26. Die Isomorphismen $f\colon V \to V$ bilden die *allgemeine lineare Gruppe* $\mathrm{GL}(V)$. Sie entsprechen den Matrizen in $\mathrm{GL}(n, K)$, wobei $n = \dim V$. Genauer ist ${}_B[.]_B\colon \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(n, K)$ ein Isomorphismus von Gruppen (anstatt von Vektorräumen).

Folgerung 7.27 (Basiswechsel)**.** *Seien B, B' Basen von V und C, C' Basen von W. Für $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ gilt*

$$ \boxed{{}_{C'}[f]_{B'} = {}_{C'}\Delta_C {}_C[f]_B {}_B\Delta_{B'}.} $$

Im Fall $V = W$ ist

$$ \boxed{{}_{B'}[f]_{B'} = {}_{B'}\Delta_B {}_B[f]_{B'} \Delta_B^{-1}.} $$

Beweis. Aus Satz 7.22 folgt

$$ {}_{C'}\Delta_C {}_C[f]_B {}_B\Delta_{B'} = {}_{C'}[\mathrm{id}_W]_C {}_C[f]_B {}_B[\mathrm{id}_V]_{B'} = {}_{C'}[\mathrm{id}_W]_C {}_C[f]_{B'} = {}_{C'}[f]_{B'}. $$

Für $V = W$, $C = B$ und $C' = B'$ erhält man ${}_{B'}[f]_{B'} = {}_{B'}\Delta_B {}_B[f]_B {}_B\Delta_{B'} = {}_{B'}\Delta_B {}_B[f]_{B'} \Delta_B^{-1}$ mit Folgerung 7.25. □

Beispiel 7.28. Sei wieder $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ wie in Beispiel 7.17. Wir ersetzen die Basis $B = \big\{(1, -1), (0, 2)\big\}$ durch $B' := \big\{(0, 1), (1, 1)\big\}$. Wegen $(0, 1) = 0(1, -1) + \frac{1}{2}(0, 2)$ und $(1, 1) = (1, -1) + (0, 2)$ gilt

$$ {}_B\Delta_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}_C[f]_{B'} = {}_C[f]_B {}_B\Delta_{B'} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -6 & 2 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}. $$

Definition 7.29. Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen *ähnlich*, falls ein $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit $B = SAS^{-1}$ existiert. Wir schreiben ggf. $A \approx B$.

Bemerkung 7.30.

(a) Offenbar ist $A \approx A$ (wähle $S = 1_n$). Aus $B = SAS^{-1}$ folgt $A = S^{-1}BS$. Aus $B = SAS^{-1}$ und $C = TBT^{-1}$ mit $T \in \mathrm{GL}(n, K)$ folgt $C = TSAS^{-1}T^{-1} = (TS)A(TS)^{-1}$. Daher ist die Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation.

(b) Für Basen B und C von V und $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$ sind ${}_B[f]_B$ und ${}_C[f]_C$ nach Folgerung 7.27 ähnlich. Ist umgekehrt $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ gegeben (mit $n = \dim V$), so existiert ein $g \in \mathrm{GL}(V)$ mit ${}_B[g]_B = S$ nach Satz 7.18. Für $C := \{g(b) : b \in B\}$ gilt dann $S = {}_B[\mathrm{id}_V]_C = {}_B\Delta_C$. Daher bestimmt f eine Ähnlichkeitsklasse von Darstellungsmatrizen in $K^{n\times n}$. Dies ermöglicht konkrete Berechnungen mit abstrakten Abbildungen. Wir konstruieren später spezielle Basen, sodass die Darstellungsmatrizen möglichst einfache Gestalt haben (zum Beispiel Diagonalmatrizen). Damit beschleunigen sich Berechnungen.

Definition 7.31. Für $A = (a_{ij})_{i,j} \in K^{n\times n}$ nennen wir $\operatorname{tr} A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ die *Spur* von A (Summe der Hauptdiagonaleinträge).

Lemma 7.32. *Die Abbildung* $\operatorname{tr}\colon K^{n\times n} \to K$ *ist linear mit* $\operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}}) = \operatorname{tr} A$. *Für* $A \in K^{n\times m}$ *und* $B \in K^{m\times n}$ *gilt* $\boxed{\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).}$

Beweis. Für $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ in $K^{n\times n}$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\operatorname{tr}(\lambda A + B) = \operatorname{tr}\big((\lambda a_{ij} + b_{ij})_{i,j}\big) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{ii} + b_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \lambda \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B).$$

Also ist tr linear. Offensichtlich ist $\operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}}) = \operatorname{tr} A$. Für $A \in K^{n\times m}$ und $B \in K^{m\times n}$ gilt

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \operatorname{tr}(BA). \qquad \square$$

Folgerung 7.33. *Ähnliche Matrizen haben die gleiche Spur.*

Beweis. Für $A \in K^{n\times n}$ und $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ gilt $\operatorname{tr}(S(AS^{-1})) = \operatorname{tr}((AS^{-1})S) = \operatorname{tr} A$. $\square$

Definition 7.34. Sei V ein Vektorraum mit Basis B und $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$. Wir nennen $\operatorname{tr} f := \operatorname{tr}({}_B[f]_B)$ die *Spur* von f. Nach Folgerung 7.27 und Folgerung 7.33 hängt $\operatorname{tr} f$ nicht von der Wahl der Basis ab.

Bemerkung 7.35. Die Spurabbildung lässt sich „koordinatenfrei“ durch die Eigenschaft $\operatorname{tr} f = \operatorname{rk} f$ für alle $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$ mit $f^2 = f$ charakterisieren (Aufgabe II.6).

Satz 7.36 (Fillmore)**.** *Sei* $A \in K^{n\times n} \setminus K1_n$ *und* $d_1, \ldots, d_n \in K$ *mit* $\operatorname{tr} A = d_1 + \ldots + d_n$. *Dann ist* A *zu einer Matrix mit Hauptdiagonale* $d_1, \ldots, d_n$ *ähnlich.*

Beweis. Induktion nach n: Wegen $A \notin K1_n$ ist $n \geq 2$. Sei $A = (a_{ij})$. Gilt $a_{ij} \neq 0$ für gewisse $i \neq j$, so ist $Ae_j \notin \langle e_j \rangle$. Ist A eine Diagonalmatrix, so existieren $i \neq j$ mit $a_{ii} \neq a_{jj}$. In diesem Fall ist

$$A(e_i + e_j) = a_{ii}e_i + a_{jj}e_j \notin \langle e_i + e_j \rangle.$$

In jedem Fall existiert ein $b_1 \in K^n$, sodass b_1 und Ab_1 linear unabhängig sind. Dann sind auch b_1 und $b_2 := Ab_1 - d_1b_1$ linear unabhängig. Wir ergänzen b_1, b_2 zu einer Basis $b_1, \ldots, b_n$ von K^n. Bezüglich dieser Basis hat A die Form $\left(\begin{smallmatrix} d_1 & * \\ * & A_1 \end{smallmatrix}\right)$ mit $A_1 = (a'_{ij}) \in K^{(n-1)\times(n-1)}$. Im Fall $n = 2$ sind wir fertig, denn $\operatorname{tr} A_1 = \operatorname{tr}(A) - d_1 = d_2$.

Sei nun $n \geq 3$. Ist $A_1 \in K1_{n-1}$, so gilt

$$A(b_1 + b_3) = d_1b_1 + b_2 + Ab_3 \in b_2 + \langle b_1, b_3 \rangle.$$

Indem wir b_3 durch $b_1 + b_3$ ersetzen, erreichen wir $a'_{12} = 1$ und $A_1 \notin K1_{n-1}$ (dies ändert $\operatorname{tr} A_1$ nicht). Nach Induktion existiert $S \in \mathrm{GL}(n-1, K)$, sodass SA_1S^{-1} Hauptdiagonale $d_2, \ldots, d_n$ hat. Nun hat

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & * \\ * & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & * \\ * & SA_1S^{-1} \end{pmatrix}$$

Hauptdiagonale $d_1, \ldots, d_n$. □

Beispiel 7.37. Sei $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ und $(d_1, d_2) = (0, 3)$. Wir setzen $b_1 := (1, 1)$ und $b_2 := Ab_1 = (1, 2)$. Sei E die Standardbasis von $\mathbb{Q}^2$ und $B := \{b_1, b_2\}$. Für $S := {}_E\Delta_B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ gilt

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

nach Folgerung 7.27.

7.3 Dualräume

Definition 7.38. Für einen K-Vektorraum V nennt man $V^* := \mathrm{Hom}(V, K)$ den *Dualraum* von V. Seine Elemente nennt man (*lineare*) *Funktionale*.

Lemma 7.39. *Sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V. Für $i = 1, \ldots, n$ sei $b_i^* \in V^*$ mit $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$ für $j = 1, \ldots, n$. Dann ist $b_1^*, \ldots, b_n^*$ eine Basis von V^*.*

Beweis. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $f := \lambda_1 b_1^* + \ldots + \lambda_n b_n^* = 0$. Für $i = 1, \ldots, n$ gilt $0 = f(b_i) = \lambda_i$. Daher sind $b_1^*, \ldots, b_n^*$ linear unabhängig. Die Behauptung folgt aus $\dim V^* = \dim V$ (Satz 7.18). □

Beispiel 7.40. Ist $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis von $V = K^n$, so sind $e_1^*, \ldots, e_n^*$ die Projektionen, d. h. $e_i^*(v_1, \ldots, v_n) = v_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Bemerkung 7.41.

(a) In der Situation von Lemma 7.39 nennt man $b_1^*, \ldots, b_n^*$ die zu $b_1, \ldots, b_n$ *duale Basis*.

(b) Für unendlich-dimensionale Räume V ist $V^* \ncong V$, denn V^* ist „größer“ als V (ohne Beweis).

(c) Nach Satz 7.8 existiert ein Isomorphismus $V \to V^*$, der eine Basis auf die entsprechende duale Basis abbildet. Allerdings gibt es keinen *kanonischen* Isomorphismus, der nicht von einer Basiswahl abhängt (vgl. Satz 12.7). Der nächste Satz zeigt, dass die Situation zwischen V und dem *Bidualraum* $V^{**} := (V^*)^*$ besser ist.

Satz 7.42. *Für $v \in V$ sei $F_v \colon V^* \to K$, $f \mapsto f(v)$. Dann ist $F \colon V \to V^{**}$, $v \mapsto F_v$ ein kanonischer Isomorphismus.*

Beweis. Für $f_1, f_2 \in V^*$ und $\lambda \in K$ ist

$$F_v(\lambda f_1 + f_2) = (\lambda f_1 + f_2)(v) = \lambda f_1(v) + f_2(v) = \lambda F_v(f_1) + F_v(f_2),$$

d. h. $F_v \in V^{**}$. Für $v, w \in V$ gilt

$$F_{\lambda v+w}(f) = f(\lambda v + w) = \lambda f(v) + f(w) = \lambda F_v(f) + F_w(f) = (\lambda F_v + F_w)(f),$$

d. h. F ist linear. Sei nun $F_v = 0$. Im Fall $v \neq 0$ kann man v zu einer Basis von V ergänzen. Für die duale Basis wäre dann $0 = F_v(v^*) = v^*(v) = 1$. Dieser Widerspruch zeigt $\operatorname{Ker} F = \{0\}$, d. h. F ist injektiv. Wegen $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V < \infty$ muss F auch surjektiv sein. □

Definition 7.43. Für $U \leq V$ und $W \leq V^*$ sei

$$U^0 := \big\{ f \in V^* : f(U) = \{0\} \big\} \subseteq V^*,$$
$$W_0 := \big\{ v \in V : \forall f \in W : f(v) = 0 \big\} \subseteq V.$$

Wir nennen U^0 (bzw. W_0) das *duale Komplement* von U (bzw. W).

Lemma 7.44. *Für $U, \tilde{U} \leq V$ und $W, \tilde{W} \leq V^*$ gilt*

(a) $U \subseteq \tilde{U} \Rightarrow \tilde{U}^0 \subseteq U^0$ *und* $W \subseteq \tilde{W} \Rightarrow \tilde{W}_0 \subseteq W_0$.

(b) $U^0 \leq V^*$, $W_0 \leq V$ *und*

$$\dim V = \dim(U) + \dim(U^0) = \dim(W) + \dim(W_0).$$

(c) Die Abbildungen $U \mapsto U^0$ und $W \mapsto W_0$ sind zueinander invers.[6]

(d)

$$\boxed{\begin{aligned} (U + \tilde{U})^0 &= U^0 \cap \tilde{U}^0, & (W + \tilde{W})_0 &= W_0 \cap \tilde{W}_0, \\ (U \cap \tilde{U})^0 &= U^0 + \tilde{U}^0, & (W \cap \tilde{W})_0 &= W_0 + \tilde{W}_0. \end{aligned}}$$

(e) $V = U \oplus \tilde{U} \iff V^* = U^0 \oplus \tilde{U}^0$.

Beweis.

(a) Folgt aus der Definition.

[6] Man spricht in dieser Situation von einer Galois-*Verbindung*.

(b) Die Einschränkung $\Gamma\colon V^* \to U^*$, $f \mapsto f_{|U}$ ist ein Homomorphismus mit Kern $U^0 \leq V^*$. Da man jedes Funktional in U^* nach V fortsetzen kann (Basisergänzung), ist Γ surjektiv. Aus dem Homomorphiesatz folgt

$$\dim V = \dim V^* = \dim(U^0) + \dim(U^*) = \dim(U^0) + \dim(U).$$

Mit W anstelle von U erhält man

$$W^0 = \big\{f \in V^{**} : f(W) = \{0\}\big\} \leq V^{**}$$

und $\dim V = \dim(W) + \dim(W^0)$. Für den Isomorphismus $F\colon V \to V^{**}$, $v \mapsto F_v$ aus Satz 7.42 gilt

$$v \in W_0 \iff F_v(W) = \{0\} \iff F_v \in W^0.$$

Also ist $W_0 = F^{-1}(W^0) \leq V$ mit $\dim W_0 = \dim W^0$.

(c) Nach Definition ist $U \leq (U^0)_0$ und $W \leq (W_0)^0$. Aus (b) folgt $\dim U = \dim(U^0)_0$ und $\dim W = \dim(W_0)^0$.

(d) Aus der Definition folgt

$$\begin{aligned}(U + \tilde{U})^0 &= \big\{f \in V^* : f(U + \tilde{U}) = \{0\}\big\}\\ &= \big\{f \in V^* : f(U) = \{0\} = f(\tilde{U})\big\} = U^0 \cap \tilde{U}^0,\\ (W + \tilde{W})_0 &= \{v \in V : \forall f \in W + \tilde{W} : f(v) = 0\} = W_0 \cap \tilde{W}_0.\end{aligned}$$

Mit (c) erhält man

$$\begin{aligned}(U \cap \tilde{U})^0 &= ((U^0)_0 \cap (\tilde{U}^0)_0)^0 = ((U^0 + \tilde{U}^0)_0)^0 = U^0 + \tilde{U}^0,\\ (W \cap \tilde{W})_0 &= ((W_0)^0 \cap (\tilde{W}_0)^0)_0 = ((W_0 + \tilde{W}_0)^0)_0 = W_0 + \tilde{W}_0.\end{aligned}$$

(e) Wegen $V^0 = \{0\}$ und $\{0\}^0 = V^*$ gilt

$$\begin{aligned}U + \tilde{U} = V &\overset{\text{(c)}}{\iff} (U + \tilde{U})^0 = \{0\} \overset{\text{(d)}}{\iff} U^0 \cap \tilde{U}^0 = \{0\},\\ U \cap \tilde{U} = \{0\} &\iff (U \cap \tilde{U})^0 = V^* \iff U^0 + \tilde{U}^0 = V^*.\end{aligned}$$

Dies zeigt $V = U \oplus \tilde{U} \iff V^* = U^0 \oplus \tilde{U}^0$. □

Folgerung 7.45. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $0 \leq k \leq n$. Dann gibt es eine Bijektion zwischen der Menge der k-dimensionalen Unterräume und der Menge der $(n-k)$-dimensionalen Unterräume von V.*

Beweis. Sei $F\colon V \to V^*$ ein beliebiger Isomorphismus. Nach Lemma 7.44 ist $U \mapsto F^{-1}(U^0)$ eine Bijektion mit den gewünschten Eigenschaften. □

Satz 7.46. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit $q < \infty$ Elementen. Für $1 \leq k \leq n$ besitzt V genau*

$$\frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)\dots(q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1)\dots(q - 1)}$$

Unterräume der Dimension k.

Beweis. Jeder k-dimensionale Unterraum $U \leq V$ wird durch ein k-Tupel linear unabhängiger Vektoren $(v_1, \ldots, v_k)$ aufgespannt. Für $v_1 \in V \setminus \{0\}$ hat man $|V| - 1 = q^n - 1$ Möglichkeiten. Wegen der linearen Unabhängigkeit darf v_2 nicht in $\langle v_1 \rangle \cong K$ liegen. Daher gibt es $q^n - q$ Möglichkeiten für $v_2 \in V \setminus \langle v_1 \rangle$. Allgemein hat man $q^n - q^{i-1}$ Möglichkeiten für die Wahl von $v_i \in V \setminus \langle v_1, \ldots, v_{i-1} \rangle$. Insgesamt gibt es $D(n,k) := (q^n - 1)(q^n - q) \ldots (q^n - q^{k-1})$ linear unabhängige k-Tupel $(v_1, \ldots, v_k)$ in V. Allerdings spannen viele davon denselben Raum auf.

Das gleiche Argument mit U anstelle von V liefert genau $D(k,k) = (q^k - 1)(q^k - q) \ldots (q^k - q^{k-1})$ linear unabhängige k-Tupel in U. Also spannen genau $D(k,k)$ der k-Tupel in V denselben Unterraum auf. Die Anzahl der k-dimensionalen Unterräume ist daher $\frac{D(n,k)}{D(k,k)}$. Die Behauptung folgt, indem man alle Faktoren q kürzt. □

Bemerkung 7.47. Auf den ersten Blick ist nicht klar, warum die in Satz 7.46 angegebene Formel überhaupt eine ganze Zahl ist. Wir haben also eine arithmetische Aussage mit Hilfe der linearen Algebra bewiesen. Wegen

$$\frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \ldots (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \ldots (q - 1)} = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \ldots (q^{k+1} - 1)}{(q^{n-k} - 1)(q^{n-k-1} - 1) \ldots (q - 1)}$$

erhält man Folgerung 7.45 für endliche Körper.

Beispiel 7.48. Die Anzahl der 2-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{F}_2^5$ ist

$$\frac{(2^5 - 1)(2^4 - 1)}{(2^2 - 1)(2 - 1)} = \frac{31 \cdot 15}{3} = 155.$$

Definition 7.49. Seien V, W Vektorräume und $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann heißt $f^* \colon W^* \to V^*$, $g \mapsto g \circ f$ die zu f *duale Abbildung.*

Satz 7.50. *Für Vektorräume V, W ist $\mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$, $f \mapsto f^*$ ein Isomorphismus. Seien B und C Basen von V bzw. W. Seien B^* und C^* die entsprechenden dualen Basen. Dann gilt*

$$\boxed{{}_{B^*}[f^*]_{C^*} = {}_C[f]_B^{\mathrm{t}}.}$$

Insbesondere ist

(a) f injektiv $\iff$ f^* surjektiv.

(b) f surjektiv $\iff$ f^* injektiv.

Beweis. Für $g_1, g_2 \in W^*$ und $\lambda \in K$ gilt

$$f^*(\lambda g_1 + g_2) = (\lambda g_1 + g_2) \circ f = \lambda(g_1 \circ f) + (g_2 \circ f) = \lambda f^*(g_1) + f^*(g_2)$$

nach Bemerkung 7.23. Dies zeigt $f^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$. Für $g \in W^*$ und $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(V, W)$ gilt analog

$$(\lambda f_1 + f_2)^*(g) = g \circ (\lambda f_1 + f_2) = \lambda(g \circ f_1) + (g \circ f_2) = (\lambda f_1^* + f_2^*)(g).$$

Daher ist $f \mapsto f^*$ linear. Sei $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ und $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$. Sei $f(b_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} c_j$ mit $a_{ji} \in K$. Dann gilt

$$f^*(c_i^*)(b_j) = (c_i^* \circ f)(b_j) = c_i^*\Big(\sum_{k=1}^n a_{kj} c_k\Big) = a_{ij} = \Big(\sum_{k=1}^m a_{ik} b_k^*\Big)(b_j)$$

für $j = 1, \ldots, m$. Es folgt $f^*(c_i^*) = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_k^*$ für $i = 1, \ldots, n$. Dies zeigt ${}_C[f]_B^{\mathrm{t}} = (a_{ji})^{\mathrm{t}} = (a_{ij}) = {}_{B^*}[f^*]_{C^*}$. Nach Satz 7.18 ist $f \mapsto f^*$ ein Isomorphismus.

Mit Folgerung 7.21 ergibt sich

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv} &\iff \mathrm{rk}({}_C[f]_B) = m \iff \mathrm{rk}({}_{B^*}[f^*]_{C^*}) = m \iff f^* \text{ surjektiv}, \\ f \text{ surjektiv} &\iff \mathrm{rk}({}_C[f]_B) = n \iff \mathrm{rk}({}_{B^*}[f^*]_{C^*}) = n \iff f^* \text{ injektiv}. \end{aligned}$$ □

Bemerkung 7.51. Für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $g \in \mathrm{Hom}(W, U)$ gilt $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, denn

$$(g \circ f)^*(\varphi) = \varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f = g^*(\varphi) \circ f = f^*(g^*(\varphi)) = (f^* \circ g^*)(\varphi)$$

für $\varphi \in U^*$. Alternativ kann man die Matrixidentität $(AB)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}} A^{\mathrm{t}}$ aus Lemma 5.8 benutzen.

8 Eigenwerte und Eigenvektoren

8.1 Definitionen und Beispiele

Bemerkung 8.1. In diesem Kapitel untersuchen wir Homomorphismen $f\colon V \to V$ von einem Vektorraum in sich selbst. Man spricht dann von *Endomorphismen* und schreibt $\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$. Durch Wahl einer geeigneten Basis B von V werden wir erreichen, dass ${}_B[f]_B$ möglichst einfache Gestalt hat.[1]

Definition 8.2. Sei V ein K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Man nennt $\lambda \in K$ einen *Eigenwert*[2] von f, falls der *Eigenraum*

$$E_\lambda(f) := \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$$

nicht der Nullraum ist. Ggf. nennt man $\dim E_\lambda(f)$ die *geometrische Vielfachheit* von λ. Die Vektoren $v \in E_\lambda(f) \setminus \{0\}$ heißen *Eigenvektoren* zum Eigenwert λ.

Bemerkung 8.3.

(a) Für $v \in V$ und $\lambda \in K$ gilt

$$f(v) = \lambda v \iff f(v) - \lambda v = 0 \iff (f - \lambda\,\mathrm{id})(v) = 0 \iff v \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}).$$

Daher ist der Eigenraum $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id})$ tatsächlich ein Unterraum von V. Nach dem Homomorphiesatz ist $\dim(V) - \mathrm{rk}(f - \lambda\,\mathrm{id})$ die geometrische Vielfachheit von λ.

(b) Sei B eine Basis von V, $x := {}_B[v]^{\mathrm{t}} \in K^{n\times 1}$ und $A := {}_B[f]_B$. Dann gilt

$$f(v) = \lambda v \overset{7.18}{\iff} Ax = \lambda x \iff (A - \lambda 1_n)x = 0.$$

Daher lässt sich $E_\lambda(f)$ durch Lösen des homogenen Gleichungssystems $(A - \lambda 1_n)x = 0$ berechnen. Wir sprechen dann auch von Eigenwerten, Eigenräumen und Eigenvektoren von A. Da ähnliche Matrizen denselben Endomorphismus (bzgl. verschiedener Basen) beschreiben, haben sie die gleichen Eigenwerte (aber nicht unbedingt die gleichen Eigenvektoren).

(c) Aus Lemma 7.7 und Bemerkung 7.9 folgt: $f \in \mathrm{End}(V)$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn 0 *kein* Eigenwert von f ist.

Beispiel 8.4. Sei $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ mit

$$A := [f] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[1] Nach Bemerkung 6.20 findet man stets Basen B, C von V, sodass ${}_C[f]_B = \mathrm{diag}(1_r, 0_{n-r})$ gilt. Das Produkt solcher Matrizen lässt sich allerdings nicht sinnvoll interpretieren.

[2] Obwohl auch im Englischen von *eigenvalues* die Rede ist, gab es keinen Namensgeber Eigen.

Zieht man $\lambda = 1$ auf der Hauptdiagonale ab, so erhält man eine Matrix vom Rang 1 mit drei identischen Zeilen. Offenbar bilden $b_1 := (1, 0, -1)$ und $b_2 := (0, 1, -1)$ eine Basis von $E_1(f)$. Insbesondere hat $\lambda = 1$ geometrische Vielfachheit 2. Da die Zeilensummen von A konstant sind, ist $b_3 := (1, 1, 1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 4$. Nun ist $B := \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ mit ${}_B[f]_B = \operatorname{diag}(1, 1, 4)$. Damit berechnet man leicht ${}_B[f \circ f \circ f]_B = {}_B[f]_B^3 = \operatorname{diag}(1, 1, 4)^3 = \operatorname{diag}(1, 1, 64)$.

8.2 Diagonalisierbarkeit

Definition 8.5. Man nennt $f \in \operatorname{End}(V)$ *diagonalisierbar*, falls eine Basis B von V existiert, sodass ${}_B[f]_B$ eine Diagonalmatrix ist. Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt *diagonalisierbar*, falls A zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.

Bemerkung 8.6. Offenbar ist $f \in \operatorname{End}(V)$ genau dann diagonalisierbar, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren von f besitzt. Eine Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn die entsprechende lineare Abbildung $f\colon K^{n\times 1} \to K^{n\times 1}$, $x \mapsto Ax$ diagonalisierbar ist (Bemerkung 7.30).

Beispiel 8.7.

(a) Die Abbildung aus Beispiel 8.4 ist diagonalisierbar.

(b) Diagonalmatrizen sind offensichtlich diagonalisierbar.

(c) Sei $A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in K^{2\times 2}$. Da $A - \lambda 1_2$ für $\lambda \neq 0$ vollen Rang hat, ist $\lambda = 0$ der einzige Eigenwert von A. Wegen $E_0(A) = \langle (1, 0) \rangle$ existiert keine Basis aus Eigenvektoren und A ist *nicht* diagonalisierbar.

(d) Sei $A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ und $\lambda \in \mathbb{Q}$. Dann ist

$$A - \lambda 1_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \\ \end{array}\!\!\!

(5) Ist $u_1 + \ldots + u_n = 0$ mit $u_i \in U_i$ für $i = 1, \ldots, n$, so folgt $u_1 = \ldots = u_n = 0$.

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2): Für $n = 1$ ist (2) trivial. Induktiv dürfen wir annehmen, dass (2) bereits für $n-1$ gilt. Aus der Dimensionsformel folgt dann

$$\dim(U_1 + \ldots + U_n) = \dim(U_1 + \ldots + U_{n-1}) + \dim(U_n) = \dim(U_1) + \ldots + \dim(U_n).$$

(2) $\Rightarrow$ (3): Die gegebene Abbildung ist stets linear und surjektiv. Wegen

$$\dim(U_1 \times \ldots \times U_n) \overset{7.11}{=} \dim(U_1) + \ldots + \dim(U_n) = \dim(U_1 + \ldots + U_n)$$

muss sie auch injektiv sein.

(3) $\Rightarrow$ (4): Ergibt sich aus der Injektivität von $U_1 \times \ldots \times U_n \to U_1 + \ldots + U_n$.

(4) $\Rightarrow$ (5): Die beiden Zerlegungen des Nullvektors $u_1 + \ldots + u_n = 0 + \ldots + 0$ müssen nach (4) identisch sein, d. h. $u_1 = \ldots = u_n = 0$.

(5) $\Rightarrow$ (1): Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Induktiv können wir $U_1 + \ldots + U_{n-1} = U_1 \oplus \ldots \oplus U_{n-1}$ annehmen, denn die Voraussetzung (5) überträgt sich auf $U_1, \ldots, U_{n-1}$. Sei nun $u = u_1 + \ldots + u_{n-1} \in (U_1 + \ldots + U_{n-1}) \cap U_n$. Dann ist

$$0 = u_1 + \ldots + u_{n-1} - u \in U_1 + \ldots + U_n$$

und (5) zeigt $u = 0$. Also gilt (1). □

Satz 8.10. *Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte von $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt*

$$E_{\lambda_1}(f) + \ldots + E_{\lambda_k}(f) = E_{\lambda_1}(f) \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k}(f) \leq V. \tag{8.1}$$

Insbesondere ist $k \leq \dim V$.

Beweis. Induktion nach k: Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei also $k \geq 2$ und (8.1) für $k-1$ bereits bewiesen. Seien $v_i \in E_{\lambda_i}(f)$ mit $v_1 + \ldots + v_k = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= f(v_1 + \ldots + v_k) - \lambda_k(v_1 + \ldots + v_k) = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k - \lambda_k v_1 - \ldots - \lambda_k v_k \\ &= (\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \ldots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} \in E_{\lambda_1}(f) \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_{k-1}}(f). \end{aligned}$$

Aus Lemma 8.9 folgt $(\lambda_i - \lambda_k)v_i = 0$ für $i = 1, \ldots, k-1$. Wegen $\lambda_i \neq \lambda_k$ gilt $v_1 = \ldots = v_{k-1} = 0$. Schließlich ist auch $v_k = v_1 + \ldots + v_k = 0$. Nun ergibt sich (8.1) aus Lemma 8.9. Die letzte Behauptung folgt aus $\dim E_{\lambda_i}(f) \geq 1$ für $i = 1, \ldots, k$. □

Bemerkung 8.11. Merkregel: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Folgerung 8.12. *Besitzt $A \in K^{n \times n}$ genau n verschiedene Eigenwerte, so ist A diagonalisierbar.*

Beweis. Nach Satz 8.10 besitzt $K^{n \times 1}$ eine Basis aus Eigenvektoren von A (je einer pro Eigenwert). Nach Bemerkung 8.6 ist A diagonalisierbar. □

Beispiel 8.13.

(a) Die Einheitsmatrix zeigt, dass die Umkehrung von Folgerung 8.12 falsch ist. Wir leiten in Satz 10.34 eine genaue Charakterisierung der Diagonalisierbarkeit her.

(b) Die Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ aus Beispiel 8.7 besitzt die Eigenwerte $\pm\sqrt{2}$ und ist daher diagonalisierbar. Wir zeigen über den Umweg der Determinante, dass die Eigenwerte einer Matrix genau die Nullstellen eines Polynoms mit Koeffizienten in K sind (Satz 10.32).

Definition 8.14. Man nennt $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ eine (*obere*[3]) *Dreiecksmatrix*, falls alle Einträge unterhalb der Hauptdiagonale verschwinden, d. h. $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$:

$$A = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix}.$$

Gilt zusätzlich $a_{ii} = 0$ für $i = 1, \ldots, n$, so spricht man von einer *strikten* (oberen) Dreiecksmatrix.

Beispiel 8.15. Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix. Für $\lambda \in \{a_{11}, \ldots, a_{nn}\}$ hat $A - \lambda 1_n$ nicht vollen Rang, denn beim Gauß-Algorithmus tritt ein Versatz der Zeilen auf (Bemerkung 6.20). Ist andererseits $\lambda \notin \{a_{11}, \ldots, a_{nn}\}$, so sind die Hauptdiagonaleinträge von $A - \lambda 1_n$ alle ungleich 0. Daher hat $A - \lambda 1_n$ vollen Rang. Dies zeigt, dass die Eigenwerte von A genau die Einträge auf der Hauptdiagonale sind. Insbesondere ist A diagonalisierbar, wenn $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ paarweise verschieden sind.

[3] Analog definiert man *untere* Dreiecksmatrizen.

9 Determinanten

9.1 Rekursive Definition

Bemerkung 9.1.

(a) Mathematiker versuchen oft komplizierte Objekte (wie $f \in \operatorname{End}(V)$) durch einfachere (wie $\operatorname{rk} f$ oder $\operatorname{tr} f$) zu ersetzen, um wesentliche Informationen sichtbar zu machen. So haben wir in Lemma 5.15 gesehen, dass $\operatorname{rk} f$ Rückschlüsse auf die Bijektivität von f zulässt, sofern man $\dim V$ kennt. Man nennt solche Größen *Invarianten*, wenn sie unter „natürlichen“ Umformungen (wie Basiswechsel) unverändert bleiben. Wir definieren in diesem Kapitel als weitere Invariante die *Determinante* $\det f$. Wir zeigen, dass f genau dann bijektiv ist, wenn $\det f \neq 0$ gilt (im Gegensatz zu $\operatorname{rk} f$ hängt dieses Kriterium nicht mehr von $\dim V$ ab).[1]

(b) In der Maßtheorie versucht man möglichst vielen Mengen $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ein „Volumen“ $\operatorname{vol} S \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ zuzuordnen. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear. Die in (a) beschriebene Zahl $\det f$ misst, wie sehr sich das Volumen durch Anwenden von f verändert, d. h. es gilt $\operatorname{vol} f(S) = |\det f| \operatorname{vol}(S)$, sofern $\operatorname{vol} S$ definiert ist. Dem n-dimensionalen *Hyperwürfel*

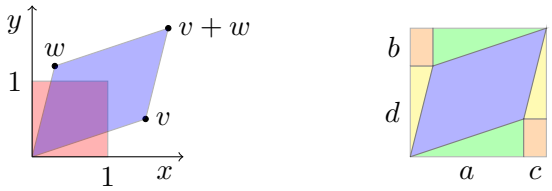
$$H := \big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall i : 0 \leq x_i \leq 1\big\}$$

wird das Volumen $\operatorname{vol} H = 1$ zugewiesen. Daraus folgt

$$|\det f| = \operatorname{vol} f(H).$$

Das Vorzeichen von $\det f$ beschreibt, ob f orientierungserhaltend (Beispiel: Drehung) oder orientierungsumkehrend (Beispiel: Spiegelung) ist. Mehr dazu in Beispiel 11.22.

Beispiel 9.2. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $v := f(e_1) = (a, b)$ und $w := f(e_2) = (c, d)$, d. h. $[f] = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$. Das Bild des (roten) Quadrats $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$ ist das von den Vektoren v und w aufgespannte (blaue) Parallelogramm $f(H)$:



Die Fläche von $f(H)$ liest man aus der Zeichnung ab:

$$\operatorname{vol} f(H) = (a + c)(b + d) - 2bc - ab - cd = ad - bc.$$

Die Fläche ist genau dann 0, wenn v und w auf einer Ursprungsgeraden liegen, also linear abhängig sind. Dies ist äquivalent zu $\operatorname{rk} f \leq 1$.

[1] Aus dem realen Leben: Wenn Sie Probleme haben, sich das Alter einer Person zu merken, merken Sie sich stattdessen das Geburtsjahr, denn diese Invariante ändert sich nicht jedes Jahr.

Definition 9.3. Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ und $1 \le s, t \le n$. Durch Streichen der s-ten Zeile und t-ten Spalte von A entsteht die Matrix $A_{st} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$. Die *Determinante*[2] von A ist rekursiv definiert:

$$\det A := \begin{cases} a_{11} & \text{falls } n = 1, \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) & \text{falls } n \ge 2. \end{cases}$$

Beispiel 9.4.

(a) Für $n = 2$ erhält man

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = a \det(A_{11}) - b \det(A_{21}) = ad - bc$$

(vgl. Beispiel 9.2).

(b) Für jede obere Dreiecksmatrix $A = (a_{ij})$ gilt $\det A = a_{11} \dots a_{nn}$. Dies ist klar für $n = 1$. Sei induktiv die Behauptung für $n - 1$ bereits bewiesen. Da A_{11} auch eine obere Dreiecksmatrix ist, folgt

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) = a_{11} \det(A_{11}) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Da man mit dem Gauß-Algorithmus jede Matrix in eine obere Dreiecksmatrix überführen kann, untersuchen wir, wie sich die Determinante bei elementaren Zeilenoperationen verändert.

Lemma 9.5. *Die Abbildung* $\det\colon K^{n\times n} \to K$ *ist linear in jeder Zeile, d. h. für* $a_1, \dots, a_n, b \in K^n$, $\lambda \in K$ *und* $1 \le k \le n$ *gilt*

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_k + b \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Beweis. Sei $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$. Für $c \in K^n$ sei $M(c)$ die Matrix mit Zeilen $a_1, \dots, a_{k-1}, c, a_{k+1}, \dots, a_n$. Für $n = 1$ ist $k = 1$ und

$$\det\big(M(\lambda a_1 + b)\big) = \lambda a_{11} + b_1 = \lambda \det(M(a_1)) + \det(M(b))$$

wie behauptet. Sei nun $n \ge 2$ und die Behauptung für $n - 1$ bereits bewiesen. Streichen der k-ten Zeile ergibt

$$M(\lambda a_k + b)_{k1} = M(a_k)_{k1} = M(b)_{k1}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \det\big(M(\lambda a_k + b)\big) &= (-1)^{k+1}(\lambda a_{k1} + b_1) \det\big(M(\lambda a_k + b)_{k1}\big) + \sum_{i\ne k} (-1)^{i+1} a_{i1} \det\big(M(\lambda a_k + b)_{i1}\big) \\ &= \lambda (-1)^{k+1} a_{k1} \det(M(a_k)_{k1}) + (-1)^{k+1} b_1 \det(M(b)_{k1}) \end{aligned}$$

[2] In manchen Büchern schreibt man $|A|$ anstelle von $\det A$. Das kann aber mit einer Matrixnorm verwechselt werden (Beispiel 18.61).

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{i \neq k} (-1)^{i+1} a_{i1} \big(\lambda \det(M(a_k)_{i1}) + \det(M(b)_{i1}) \big) \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(M(a_k)_{i1}) + (-1)^{k+1} b_1 \det(M(b)_{k1}) + \sum_{i \neq k} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(M(b)_{i1}) \\
&= \lambda \det(M(a_k)) + \det(M(b)). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Satz 9.6. *Für $A \in K^{n \times n}$ gilt:*

(a) Durch Multiplikation einer Zeile von A mit $\lambda \in K$ wird auch $\det A$ mit λ multipliziert.

(b) Vertauschen von zwei Zeilen von A ändert das Vorzeichen von $\det A$.[3]

(c) Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile von A ändert $\det A$ nicht.

Beweis. Seien $a_1, \ldots, a_n$ die Zeilen von A.

(a) Setzt man zunächst $\lambda = 1$ und $b = 0$ in Lemma 9.5, so sieht man, dass die Determinante verschwindet, wenn A eine Nullzeile besitzt. Die Behauptung folgt nun, indem man λ beliebig und $b = 0$ in Lemma 9.5 wählt.

(b) Wir zeigen zunächst $\det A = 0$, falls $a_k = a_{k+1}$ für ein k gilt. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei $n \geq 2$. Für $i \notin \{k, k+1\}$ besitzt A_{i1} zwei benachbarte identische Zeilen. Außerdem ist $a_{k1} = a_{k+1,1}$ und $A_{k1} = A_{k+1,1}$. Durch Induktion nach n folgt

$$
\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) = a_{k1} \det(A_{k1}) - a_{k1} \det(A_{k1}) = 0.
$$

Für beliebige $a_1, \ldots, a_n$ erhält man

$$
\begin{aligned}
0 = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k + a_{k+1} \\ a_k + a_{k+1} \\ \vdots \end{pmatrix} &\overset{9.5}{=} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ a_{k+1} \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{k+1} \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{k+1} \\ a_{k+1} \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ a_{k+1} \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{k+1} \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

d. h. das Vertauschen von benachbarten Zeilen ändert das Vorzeichen von $\det A$. Das Vertauschen von beliebigen Zeilen a_s und a_t mit $s < t$ lässt sich auf $2(t-s)-1$ Vertauschungen von benachbarten Zeilen zurückführen: $a_s \leftrightarrow a_{s+1}$, $a_s \leftrightarrow a_{s+2}, \ldots, a_s \leftrightarrow a_t$, $a_t \leftrightarrow a_{t-1}, \ldots, a_t \leftrightarrow a_{s+1}$.

(c) Wir addieren λa_k zu Zeile a_l mit $k \neq l$ und erhalten

$$
\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_l + \lambda a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \overset{9.5}{=} \det(A) + \lambda \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix}.
$$

[3] Beachte: Für $K = \mathbb{F}_2$ gibt es keine Vorzeichen, da $1 = -1$.

Es genügt also, $\det A = 0$ zu zeigen, falls A zwei identische Zeilen besitzt. Nach (b) können wir annehmen, dass diese Zeilen benachbart sind. Dieser Fall wurde im Beweis von (b) bereits erledigt. $\square$

Beispiel 9.7.

$$\det\begin{pmatrix}-4 & -2 & -2\\ 6 & 3 & 2\\ 8 & 7 & 6\end{pmatrix} \quad \Big|:(-2) \qquad = -2\det\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 6 & 3 & 2\\ 8 & 7 & 6\end{pmatrix} \begin{matrix}-3 & -4\\ +\\ & +\end{matrix}$$

$$= -2\det\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix} \quad = 2\det\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \overset{9.4}{=} -12$$

Bemerkung 9.8. Für $A \in K^{n\times n}$ und $\lambda \in K$ gilt $\boxed{\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A),}$ denn jede der n Zeilen wird mit λ multipliziert.

Lemma 9.9. *Sei* $A = \left(\begin{smallmatrix}A_1 & A_2\\ 0 & A_3\end{smallmatrix}\right) \in K^{(n+m)\times(n+m)}$ *mit* $A_1 \in K^{n\times n}$, $A_2 \in K^{n\times m}$ *und* $A_3 \in K^{m\times m}$. *Dann gilt* $\det A = \det(A_1)\det(A_3)$.

Beweis. Führt man den Gauß-Algorithmus an A durch, so wird zuerst A_1 und dann A_3 in eine obere Dreiecksmatrix umgeformt. Am Ende ist auch A eine obere Dreiecksmatrix und die Behauptung folgt. $\square$

9.2 Eigenschaften

Satz 9.10. *Für* $A \in K^{n\times n}$ *gilt*

$$A \text{ invertierbar} \iff \operatorname{rk} A = n \iff \det A \neq 0.$$

Beweis. Die erste Äquivalenz stammt aus Lemma 5.15. Da die Zeilenstufenform $\widehat{A}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, gilt

$$\det A \neq 0 \overset{9.6}{\iff} \det \widehat{A} \neq 0 \overset{9.4}{\iff} \widehat{A} = 1_n \iff \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \widehat{A} = n. \qquad \square$$

Satz 9.11 (Determinantensatz)**.** *Für* $A, B \in K^{n\times n}$ *gilt* $\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B).}$

Beweis. Ist $\det A = 0$, so folgt $\operatorname{rk}(AB) \leq \operatorname{rk} A < n$ aus Lemma 5.15. Dann ist auch $\det(AB) = 0$ nach Satz 9.10. Wir können also $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ annehmen. Nach Folgerung 6.18 ist A ein Produkt von Elementarmatrizen, sagen wir $A = A_1 \dots A_k$. Sei $M \in K^{n\times n}$ beliebig. Für die drei Arten von elementaren Zeilenoperationen gilt jeweils

$$\det(A_i M) = \left\{\begin{matrix}\lambda\det(M)\\ -\det(M)\\ \det(M)\end{matrix}\right\} = \det(A_i 1_n)\det(M) = \det(A_i)\det(M)$$

nach Satz 9.6. Insgesamt folgt

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(A_1 \dots A_k B) = \det(A_1)\det(A_2 \dots A_k B) = \dots = \det(A_1)\dots\det(A_k)\det(B)\\ &= \dots = \det(A_1)\det(A_2 \dots A_k)\det(B) = \det(A)\det(B).\end{aligned}$$ □

Folgerung 9.12.

(a) Für $A \in K^{n\times n}$ gilt $\boxed{\det(A^{\mathrm{t}}) = \det A.}$

(b) Für $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ gilt $\boxed{\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.}$

(c) Ähnliche Matrizen haben die gleiche Determinante.

Beweis.

(a) Wegen $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A^{\mathrm{t}})$ können wir annehmen, dass A invertierbar ist (anderenfalls ist $\det A = 0 = \det(A^{\mathrm{t}})$). Wieder ist A ein Produkt von Elementarmatrizen $A = A_1 \dots A_k$. Für die ersten beiden Zeilenoperationen gilt $A_i^{\mathrm{t}} = A_i$. Für die dritte Zeilenoperation ist $\det A_i = 1 = \det(A_i^{\mathrm{t}})$. Dies zeigt

$$\begin{aligned}\det(A^{\mathrm{t}}) &\overset{5.8}{=} \det(A_k^{\mathrm{t}} \dots A_1^{\mathrm{t}}) = \det(A_k^{\mathrm{t}})\dots\det(A_1^{\mathrm{t}}) = \det(A_k)\dots\det(A_1)\\ &= \det(A_1)\dots\det(A_k) = \det(A_1 \dots A_k) = \det A.\end{aligned}$$

(b) Die Behauptung folgt aus $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det 1_n = 1$.

(c) Für $A \in K^{n\times n}$ und $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ gilt

$$\det(SAS^{-1}) = \det(S)\det(A)\det(S^{-1}) = \det(S)\det(S)^{-1}\det(A) = \det A.$$ □

Definition 9.13.

- Nach dem Determinantensatz und Folgerung 9.12 bilden die Matrizen mit Determinante 1 eine Untergruppe $\mathrm{SL}(n, K) \leq \mathrm{GL}(n, K)$. Man nennt $\mathrm{SL}(n, K)$ die *spezielle lineare Gruppe* vom Grad n über K. Es gilt $\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}_2) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_2)$.
- Sei V ein Vektorraum mit Basis B. Für $f \in \mathrm{End}(V)$ definiert man $\det f := \det({}_B[f]_B)$.

Bemerkung 9.14.

(a) Wegen $\det(A^{\mathrm{t}}) = \det A$ darf man bei der Berechnung von $\det A$ auch elementare Spaltenoperationen benutzen.

(b) Nach Folgerung 7.27 und Folgerung 9.12 hängt $\det f$ nicht von der Wahl der Basis von V ab. Nach Satz 9.10 ist f genau dann ein Isomorphismus, wenn $\det f \neq 0$.

(c) Die folgende Aussage verallgemeinert den Determinantensatz.

Satz 9.15 (Cauchy-Binet-Formel)**.** *Für $A, B \in K^{n\times m}$ und $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ sei $A_I := (a_{ij} : i = 1, \dots, n,\ j \in I)$. Dann gilt*

$$\det(AB^{\mathrm{t}}) = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,m\}\\ |I| = n}} \det(A_I)\det(B_I).$$

Beweis. Im Fall $n > m$ ist die Summe leer und $\det(AB^{\mathrm{t}}) = 0$ nach Lemma 5.15. Sei also $n \leq m$. Wir zerlegen die i-te Zeile von A als $a_i = a_i' + a_i''$. Ersetzt man a_i durch a_i' bzw. a_i'', so erhält man Matrizen A' bzw. A'' mit $\det A_I = \det(A_I') + \det(A_I'')$ für alle $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ mit $|I| = n$ nach Lemma 9.5. Die i-te Zeile von AB^{t} ist $a_i'B^{\mathrm{t}} + a_i''B^{\mathrm{t}}$. Daher gilt auch $\det(AB^{\mathrm{t}}) = \det(A'B^{\mathrm{t}}) + \det(A''B^{\mathrm{t}})$. Es genügt also, die Behauptung für A' bzw. A'' anstelle von A zu beweisen. Auf diese Weise erreicht man, dass A in jeder Zeile höchstens einen von 0 verschiedenen Eintrag besitzt. Wähle $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ mit $|I| = n$ und $a_{ij} = 0$ für $1 \leq i \leq n$ und $j \notin I$. Für $I' \neq I$ besitzt $A_{I'}$ eine Nullspalte und $\det A_{I'} = 0$. Es gilt $AB^{\mathrm{t}} = A_I(B_I)^{\mathrm{t}}$ und $\det(AB^{\mathrm{t}}) = \det(A_I)\det(B_I)$ nach Folgerung 9.12. □

9.3 Laplace-Entwicklung

Satz 9.16 (Laplace-Entwicklung)**.** *Sei $n \geq 2$ und $A \in K^{n\times n}$. Für $1 \leq k \leq n$ gilt*

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ki} \det(A_{ki}).}$$

Beweis. Seien $a_1, \ldots, a_n$ die Spalten von A. Nach Bemerkung 9.14 gilt

$$\begin{aligned}\det\big(\cdots \overset{\downarrow}{a_{k-1}} \overset{\downarrow}{a_k} \cdots\big) &= -\det\big(\cdots \overset{\downarrow}{a_{k-2}} \overset{\downarrow}{a_k} a_{k-1} \cdots\big) = \ldots \\ &= (-1)^{k-1} \det\big(a_k \;\; a_1 \;\; \cdots \;\; a_{k-1} \;\; a_{k+1} \;\; \cdots\big) = (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{ik} \det(A_{ik}).\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung folgt aus der ersten, indem man $\det(A^{\mathrm{t}}) = \det A$ benutzt. □

Bemerkung 9.17. Die Gleichungen in Satz 9.16 nennt man *Entwicklung nach der k-ten Spalte/Zeile.* Die Vorzeichen $(-1)^{i+k}$ verteilen sich schachbrettartig:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Beispiel 9.18. Wie die meisten rekursiven Verfahren ist auch die Laplace-Entwicklung in der Regel ineffizient. Sie eignet sich jedoch für sogenannte *dünnbesetzte* Matrizen, d. h. Matrizen mit vielen Nulleinträgen. Wir entwickeln zuerst nach der dritten Zeile und anschließend nach der zweiten Spalte:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -2 \cdot 4 = -8$$

Bemerkung 9.19. Für eine Folge von Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in K$ definiert das man Produkt $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ analog zum Summenzeichen $\sum$.

Satz 9.20 (VANDERMONDE). *Für $x_1, \dots, x_n \in K$ nennt man*

$$A := (x_i^{j-1}) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$$

VANDERMONDE-Matrix.[4] *Es gilt*

$$\det A = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

Insbesondere ist A genau dann invertierbar, wenn $x_1, \dots, x_n$ paarweise verschieden sind.

Beweis. Induktion nach n: Im Fall $n = 1$ ist $A = 1_1$ und $\prod_{i<j}(x_j - x_i)$ ist das leere Produkt, welches man als 1 interpretiert (so wie die leere Summe als 0 interpretiert wird). Sei also $n \ge 2$. Wir subtrahieren das x_1-Fache der vorletzten Spalte von der letzten Spalte. Anschließend subtrahieren wir das x_1-Fache der $(n-2)$-ten Spalte von der vorletzten Spalte usw. Dadurch erhält man die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & (x_n - x_1)x_n & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

mit derselben Determinante (Bemerkung 9.14). Durch Entwicklung nach der ersten Zeile kann man zur kleineren Matrix

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & (x_n - x_1)x_n & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

übergehen. Die Faktoren $(x_k - x_1)$ können für $k = 2, \dots, n$ aus der Determinante herausgezogen werden. Dies ergibt

$$\det A = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)\det\big((x_{i+1}^{j-1})_{i,j=1}^{n-1}\big).$$

Nun folgt die Behauptung mit Induktion. □

Definition 9.21. Für $A \in K^{n\times n}$ nennt man

$$\widetilde{A} := \begin{cases} 1_1 & \text{falls } n = 1 \\ \big((-1)^{i+j}\det(A_{ji})\big)_{i,j} & \text{falls } n > 1 \end{cases} \in K^{n\times n}$$

die zu A *komplementäre* Matrix.[5]

Satz 9.22. *Für alle $A \in K^{n\times n}$ gilt* $\boxed{A\widetilde{A} = \det(A)1_n = \widetilde{A}A.}$ *Insbesondere ist $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$, falls $A \in \mathrm{GL}(n, K)$.*

[4] In manchen Büchern betrachtet man die transponierte Matrix.
[5] auch *Adjunkte* genannt; Verwechslungsgefahr mit der *adjungierten* Matrix A^* aus Definition 13.12

Beweis. Für $n = 1$ ist die Behauptung klar. Sei also $n \geq 2$. Sei $A_{(k,l)}$ die Matrix, die aus A entsteht, indem man die l-te Zeile durch die k-te Zeile ersetzt. Für $k \neq l$ hat $A_{(k,l)}$ zwei identische Zeilen und es folgt $\det A_{(k,l)} = 0$. Andererseits ist $A_{(k,k)} = A$. Sei $A\widetilde{A} = (c_{ij})$. Entwicklung nach der l-ten Zeile von $A_{(k,l)}$ ergibt

$$\delta_{kl} \det(A) = \det A_{(k,l)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}(-1)^{i+l} \det(A_{li}) = c_{kl}.$$

Dies zeigt $A\widetilde{A} = \det(A)1_n$. Die Gleichung $\widetilde{A}A = \det(A)1_n$ zeigt man analog durch Entwicklung nach einer Spalte. □

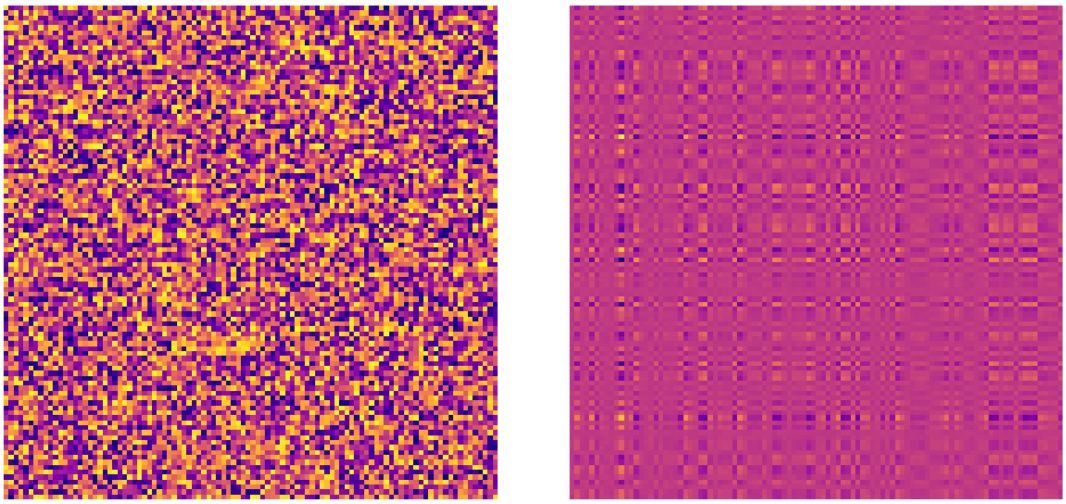
Beispiel 9.23. Für jede invertierbare 2×2-Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ erhält man

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 9.24.

(a) Die Formel $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$ zeigt, dass der Eintrag von A^{-1} an Position (i, j) von allen a_{st}, außer denen mit $s = j$ oder $t = i$, abhängt. Daher weist die Inverse einer zufällig gewählten 100×100-Matrix deutliche Strukturen auf:[6]

A $\qquad\qquad$ A^{-1}



(b) Für „große“ n hat diese Formel mehr theoretische als praktische Bedeutung (nutzen Sie Satz 6.17 zur Berechnung von A^{-1}). Ist beispielsweise $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, so ist auch $\det(A)A^{-1} = \widetilde{A} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. Insbesondere ist $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, falls $\det A = \pm 1$. Aus dem Gauß-Algorithmus ist diese Beobachtung nicht ersichtlich. Satz 9.26 liefert eine ähnliche Aussage für Gleichungssysteme.

Satz 9.25. *Für $A, B \in K^{n\times n}$ gilt $\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$.*

Beweis. O. B. d. A. sei $n \geq 2$. Sei $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $\widetilde{AB} = (c_{ij})$ und $\widetilde{B}\widetilde{A} = (d_{ij})$. Durch Streichen der j-ten Zeile von A bzw. der i-ten Spalte von B entstehen die Matrizen $A_{j\cdot}$ bzw. $B_{\cdot i}$. Offenbar gilt

[6] Die Grafiken wurden mit SageMath generiert.

$(AB)_{ji} = A_{j.}B_{.i}$. Aus der Cauchy-Binet-Formel folgt

$$\begin{aligned} c_{ij} &= (-1)^{i+j} \det(A_{j.}B_{.i}) = (-1)^{i+j} \sum_{k=1}^{n} \det(A_{jk}) \det(B_{ki}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \det(B_{ki}) (-1)^{k+j} \det(A_{jk}) = d_{ij}. \end{aligned}$$

□

Satz 9.26 (CRAMERs Regel)**.** *Sei $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ und $b \in K^{n\times 1}$. Für $k = 1, \ldots, n$ sei A_k die Matrix, die aus A entsteht, indem man die k-te Spalte durch b ersetzt. Für die eindeutige Lösung $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}$ des Gleichungssystems $Ax = b$ gilt dann $x_k = \frac{\det A_k}{\det A}$ für $k = 1, \ldots, n$.*

Beweis. Wir benutzen Satz 9.22 und entwickeln A_k nach der k-ten Spalte:

$$(\det A_k)_k = \Big(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \det(A_{ik}) b_i\Big)_k = \widetilde{A}b = \widetilde{A}Ax = \det(A)x = (\det(A)x_k)_k.$$

□

Beispiel 9.27. Für die eindeutige Lösung x des Systems

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt (Entwicklung nach der dritten Zeile)

$$x_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0.$$

9.4 Die Leibniz-Formel

Bemerkung 9.28. Führt man die Laplace-Entwicklung für $n \times n$-Matrizen bis auf 1×1-Matrizen zurück, so erhält man die Determinante als Summe von $n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Termen. Wir bestimmen diese Terme explizit.

Definition 9.29. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $N := \{1, \ldots, n\}$. Eine Bijektion der Form $N \to N$ heißt *Permutation* von N. Die Menge der Permutationen von N wird mit S_n bezeichnet.

Bemerkung 9.30.

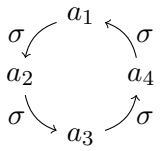
(a) Analog zu $\mathrm{GL}(V)$ ist auch S_n eine Gruppe bzgl. Komposition von Abbildungen. Wir werden daher das Kompositionszeichen $\circ$ oft einsparen. Man nennt S_n die *symmetrische Gruppe vom Grad n.*

(b) Sei $\sigma \in S_n$. Für die Wahl von $\sigma(1) \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es n Möglichkeiten. Da σ injektiv ist, gilt $\sigma(2) \neq \sigma(1)$. Für die Wahl von $\sigma(2)$ verbleiben also noch $n - 1$ Möglichkeiten usw. Insgesamt hat man $n!$ Möglichkeiten, eine Permutation zu definieren, d. h. $|S_n| = n!$.

Beispiel 9.31.

(a) Für $k \geq 2$ nennt man $\sigma \in S_n$ einen (k-)*Zyklus* (oder Zyklus der *Länge* k), falls paarweise verschiedene $1 \leq a_1, \ldots, a_k \leq n$ existieren, sodass

$$\sigma(x) = \begin{cases} a_{i+1} & \text{falls } x = a_i \text{ mit } i < k, \\ a_1 & \text{falls } x = a_k, \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$



Man schreibt dann $\sigma = (a_1, \ldots, a_k)$. Diese Schreibweise ist eindeutig bis auf „Rotation“, d. h.

$$\sigma = (a_2, \ldots, a_k, a_1) = \ldots = (a_k, a_1, \ldots, a_{k-1}).$$

Die Komposition von Zyklen geschieht wie bei Abbildungen üblich von rechts nach links:

$$(1,3,4,5) \circ (3,4,5) \circ (1,3,2) = (1,5,4)(2,3).$$

Außerdem ist $(a_1, \ldots, a_k)^{-1} = (a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1)$.

(b) Zyklen der Länge 2 heißen *Transpositionen*. Eine Transposition vertauscht also zwei Elemente und lässt alle anderen Elemente fest. Jeder k-Zyklus ist eine Komposition von $k-1$ Transpositionen:

$$(a_1, \ldots, a_k) = (a_1, a_2)(a_2, a_3) \ldots (a_{k-1}, a_k).$$

Allerdings gibt es viele Möglichkeiten für eine solche Komposition.

(c) In S_3 ist jedes nicht-triviale Element ein Zyklus: $S_3 = \{\mathrm{id}, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}$.

(d) Zyklen $\sigma = (a_1, \ldots, a_k)$ und $\tau = (b_1, \ldots, b_l)$ heißen *disjunkt*, falls

$$\{a_1, \ldots, a_k\} \cap \{b_1, \ldots, b_l\} = \varnothing.$$

Gegebenenfalls gilt $\sigma\tau = \tau\sigma$.

Satz 9.32. *Jede Permutation $\sigma \in S_n$ ist eine Komposition von paarweise disjunkten Zyklen $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_k$. Dabei sind $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $\sigma \in S_n$. Im Fall $\sigma = \mathrm{id}$ ist σ das leere Produkt von Zyklen. Sei also $\sigma \neq \mathrm{id}$ und

$$a_1 := \min\{1 \leq i \leq n : \sigma(i) \neq i\}.$$

Sei $a_i := \sigma^{i-1}(a_1)$ für $i \geq 2$. Wegen $n < \infty$ existieren $i < j$ mit $a_i = a_j$, d. h. $\sigma^{j-i}(a_1) = a_1$. Daher existiert

$$s := \min\{1 \leq i \leq n : \sigma^i(a_1) = a_1\}.$$

Die Elemente $a_1, \ldots, a_s$ sind paarweise verschieden. Also ist $\sigma_1 := (a_1, \ldots, a_s)$ ein s-Zyklus. Für $\rho := \sigma\sigma_1^{-1}$ gilt

$$\rho(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in \{a_1, \ldots, a_s\}, \\ \sigma(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Fall $\rho = \mathrm{id}$ ist $\sigma = \sigma_1$ und wir sind fertig. Anderenfalls können wir das Verfahren mit ρ anstatt σ wiederholen. Da mit jeder Wiederholung die Anzahl der Fixpunkte von ρ wächst, erreicht man nach endlich vielen Schritten $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_k$ mit paarweise disjunkten Zyklen $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$.

Sei auch $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_l$ eine Komposition von paarweise disjunkten Zyklen $\tau_1, \ldots, \tau_l$. Dann existiert ein i mit $\tau_i(a_1) \neq a_1$. Da die Zyklen disjunkt sind, gilt $\tau_i(a_1) = \sigma(a_1) = \sigma_1(a_1) = a_2$, $\tau_i(a_2) = \sigma_1(a_2) = a_3$ usw. Also ist $\tau_i = \sigma_1$ und $\sigma_2 \ldots \sigma_k = \tau_1 \ldots \tau_{i-1}\tau_{i+1} \ldots \tau_l$. Die Eindeutigkeit der σ_i folgt nun mit Induktion nach k. □

Bemerkung 9.33.

(a) Da nach Beispiel 9.31 jeder Zyklus eine Komposition von Transpositionen ist, ist sogar jede Permutation eine Komposition von (in der Regel nicht disjunkten) Transpositionen.

(b) Man kann die Schreibweise in disjunkte Zyklen

$$\sigma = (a_1, \dots, a_s)(b_1, \dots, b_t) \dots$$

vollständig eindeutig machen, indem man $a_1 = \min\{a_1, \dots, a_s\} < b_1 = \min\{b_1, \dots, b_t\} < \dots$ fordert.

Definition 9.34. Für $\sigma \in S_n$ nennt man

$$P_\sigma := (\delta_{i\sigma(j)})_{i,j} \in \mathbb{Q}^{n \times n}$$

die *Permutationsmatrix* von σ. Außerdem heißt $\operatorname{sgn}\sigma := \det P_\sigma$ das *Signum* oder *Vorzeichen* von σ.

Bemerkung 9.35. Die Permutationsmatrix von σ entsteht, indem man die Zeilen der Einheitsmatrix (also die Standardbasis $e_1, \dots, e_n$) gemäß σ permutiert. Mit dem Gauß-Algorithmus lässt sich diese Permutation durch endlich viele Zeilenvertauschungen realisieren (das entspricht dem Sortieralgorithmus *Selectionsort*). Wegen $\det 1_n = 1$ ist $\operatorname{sgn}\sigma \in \{\pm 1\}$ also tatsächlich ein „Vorzeichen“.

Beispiel 9.36. Wir bestimmen die Permutationsmatrix und das Signum für die Permutationen in S_3:

σ	id	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$
P_σ	1_3	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\operatorname{sgn}\sigma$	1	-1	-1	-1	1	1

Satz 9.37. *Für $\sigma, \tau \in S_n$ gilt $P_{\sigma\circ\tau} = P_\sigma P_\tau$ und* $\boxed{\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau).}$

Beweis. Der Eintrag von $P_\sigma P_\tau$ an Position (i,j) ist

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{i\sigma(k)}\delta_{k\tau(j)} = \delta_{i,\sigma(\tau(j))} = \delta_{i,(\sigma\circ\tau)(j)}.$$

Dies zeigt die erste Gleichung. Die zweite folgt aus dem Determinantensatz. □

Bemerkung 9.38.

(a) Die Permutationsmatrix einer Transposition ist genau die Elementarmatrix zur Vertauschung von Zeilen. Insbesondere hat jede Transposition Signum -1. Nach Satz 9.37 ist das Produkt einer geraden Anzahl an Transpositionen niemals ein Produkt einer ungeraden Anzahl an Transpositionen.

(b) Nach Beispiel 9.31 hat jeder l-Zyklus Signum $(-1)^{l-1}$. Ist σ ein Produkt von paarweise disjunkten Zyklen mit Längen $l_1, \dots, l_k$, so gilt

$$\boxed{\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{l_1+\dots+l_k-k}.}$$

Zum Beispiel ist

$$\operatorname{sgn}\big((1,2,5,6)(3,7)(4,9,8)\big) = (-1)^{4+2+3-3} = 1.$$

Zählt man Fixpunkte als Zyklen der Länge 1, so vereinfacht sich die Formel zu $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{n-k}$.

(c) Aus Satz 9.37 folgt, dass die Permutationen mit Signum 1 eine Untergruppe $A_n \leq S_n$ bilden. Man nennt A_n die *alternierende* Gruppe vom Grad n. In gewisser Weise verhält sich A_n zu S_n so wie $\mathrm{SL}(n,K)$ zu $\mathrm{GL}(n,K)$.

Satz 9.39 (Leibniz-Formel)**.** *Für $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ gilt*

$$\boxed{\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.}$$

Beweis. Die Zeilen $a_1, \dots, a_n$ von A lassen sich als Linearkombinationen der Standardbasis ausdrücken: $a_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$. Da det in jeder Zeile linear ist (Lemma 9.5), gilt

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{i_1=1}^n a_{1i_1} \det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i_1=1}^n a_{1i_1} \sum_{i_2=1}^n a_{2i_2} \det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ e_{i_2} \\ a_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \dots \\ &= \sum_{1\leq i_1,\dots,i_n\leq n} a_{1i_1} \dots a_{ni_n} \det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ \vdots \\ e_{i_n} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Existieren $s \neq t$ mit $i_s = i_t$, so verschwindet die entsprechende Determinante. Man muss also nur über die Tupel $(i_1, \dots, i_n)$ mit paarweise verschiedenen Einträgen summieren. Jedes solche Tupel beschreibt eine Permutation $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(j) = i_j$ für $j = 1, \dots, n$. Es folgt

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} \det(P_\sigma^{\mathrm{t}}) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}. \qquad \square$$

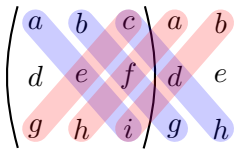
Folgerung 9.40 (Sarrus-Regel)**.** *Für 3×3-Matrizen gilt*

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb.}$$

Beweis. Man benutze die Leibniz-Formel mit Beispiel 9.36. $\square$

Bemerkung 9.41.

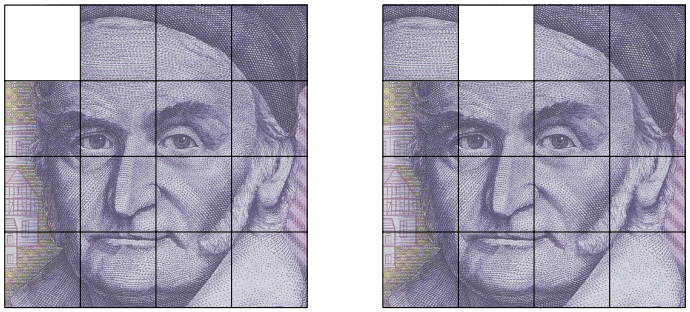
(a) Man kann sich die Sarrus-Regel mit folgendem Schema merken:



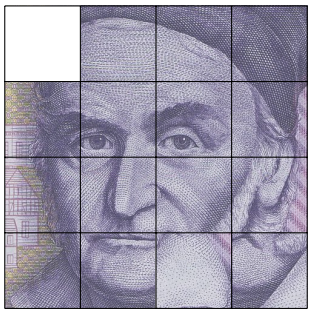
(b) Achtung: Die Sarrus-Regel gilt *nur* für 3×3-Matrizen (für 4×4-Matrizen braucht man $4! = 24$ Summanden).

(c) Sei $A \in K^{n \times n}$ mit Eigenwert λ. Dann ist $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda 1_n) \neq \{0\}$ und $\det(A - \lambda 1_n) = 0$. Nach der Leibniz-Formel ist $\det(A - \lambda 1_n)$ ein Polynom in λ. Auf diese Weise werden wir alle Eigenwerte von A berechnen.

Beispiel 9.42. Das folgende *Schiebepuzzle* besteht aus 15 beweglichen Quadraten und einem leeren Feld. Ein Quadrat, welches horizontal oder vertikal an das leere Feld grenzt, darf auf dieses geschoben werden (vgl. Cover):



Sam Loyd bot ein Preisgeld von 1000 \$, wem es gelingt, die folgende Konfiguration in den Ausgangszustand zu überführen:[7]



Jeder Zug entspricht einer Transposition in S_{16}. Legt man ein Schachbrettmuster zugrunde, so wandert das leere Feld bei jedem Zug von schwarz nach weiß oder umgekehrt. Da das leere Feld in Loyds Konfiguration in der Ausgangsstellung liegt, benötigt man zur Lösung eine gerade Anzahl an Zügen. Andererseits unterscheidet sich Loyds Konfiguration nur um eine Transposition vom Ausgangszustand. Nach Bemerkung 9.38 ist diese Konfiguration also unlösbar und Loyd musste das Preisgeld nie auszahlen.

[7] siehe [J. Slocum und D. Sonneveld, *The 15 puzzle*, The Slocum Puzzle Foundation, Beverly Hills, 2006]

Aufgaben

Aufgabe I.1. Welche der folgenden Aussagen sind im Jahr 2025 wahr?

(a) Es gibt einen Monat mit 28 Tagen.

(b) Es gibt einen Monat mit genau 28 Tagen.

(c) Es gibt genau einen Monat mit 28 Tagen.

(d) Es gibt genau einen Monat mit genau 28 Tagen.

Aufgabe I.2. Seien $1 \leq a \leq b \leq 9$ natürliche Zahlen. Der Logiker (S)iegfried kennt nur die Summe $a+b$, während sein Kollege (P)etrus nur das Produkt ab kennt. Sie wissen von der Kenntnis des anderen. Die beiden führen folgenden Dialog:

S: „Ich kenne a und b nicht.“	P: „Ich kenne a und b nicht.“
S: „Ich kenne a und b nicht.“	P: „Ich kenne a und b nicht.“
S: „Ich kenne a und b nicht.“	P: „Ich kenne a und b nicht.“
S: „Ich kenne a und b nicht.“	P: „Ich kenne a und b nicht.“
S: „Ich kenne a und b nicht.“	P: „Jetzt kenne ich a und b!“

Bestimmen Sie daraus a und b.

Aufgabe I.3. Für endliche Mengen A und B gilt $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ nach Lemma 1.12. Finden und beweisen Sie eine analoge Gleichung für drei endliche Mengen.

Aufgabe I.4. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2.

Aufgabe I.5. Konstruieren Sie Relationen mit folgenden Eigenschaften:

(a) reflexiv, aber weder symmetrisch noch transitiv.

(b) symmetrisch, aber weder reflexiv noch transitiv.

(c) transitiv, aber weder reflexiv noch symmetrisch.

Aufgabe I.6. Beweisen Sie, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist.

Aufgabe I.7. Sei $U := \{2z + 1 : z \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$. Untersuchen Sie, ob $(U, +)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe I.8. Seien $(G, *)$ und $(H, \circ)$ Gruppen. Zeigen Sie, dass $G \times H$ mit der Verknüpfung

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) := (g_1 * g_2, h_1 \circ h_2)$$

zu einer Gruppe wird.

Aufgabe I.9. Konstruieren Sie einen Körper mit drei Elementen.
Hinweis: Was ist $1 + 1$?

Aufgabe I.10. Zeigen Sie:

(a) Eine nichtleere Teilmenge H einer Gruppe G ist genau dann eine Untergruppe, wenn für alle $x, y \in H$ gilt: $xy^{-1} \in H$.

(b) Eine nichtleere Teilmenge U eines K-Vektorraums V ist genau dann ein Unterraum, wenn für alle $u, v \in U$ und $\lambda \in K$ gilt: $\lambda u + v \in U$.

Aufgabe I.11 (Korrespondenzsatz)**.** Seien $U \leq V$ Vektorräume.

(a) Zeigen Sie, dass jeder Unterraum von V/U die Form W/U mit $U \leq W \leq V$ hat.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $W \mapsto W/U$ eine Bijektion zwischen $\{W : U \leq W \leq V\}$ und der Menge der Unterräume von V/U ist.

Aufgabe I.12 (Dedekind-Identität)**.** Seien X, Y, Z Unterräume eines Vektorraums V mit $X \subseteq Z$. Zeigen Sie: $(X + Y) \cap Z = X + (Y \cap Z)$.

Aufgabe I.13. Sei V ein Vektorraum, $S \subseteq V$ und $U, W \leq V$. Zeigen Sie:

(a) $\langle S \rangle$ ist der Durchschnitt aller Unterräume von V, die S enthalten.

(b) $U + W = \langle U \cup W \rangle$.

(c) $U \cup W \leq V \iff U \cup W \in \{U, W\}$.

Aufgabe I.14. Seien u, v, w Vektoren eines Vektorraums V. Beweisen oder widerlegen Sie: Genau dann ist $\{u, v, w\}$ linear unabhängig, wenn $\{u, v\}$, $\{u, w\}$ und $\{v, w\}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe I.15. Offenbar ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, in dem die Skalarmultiplikation mit der üblichen Multiplikation in $\mathbb{R}$ übereinstimmt (dies müssen Sie nicht prüfen). Zeigen Sie:

(a) 1 und $\sqrt{2}$ sind linear unabhängig über $\mathbb{Q}$.

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \langle 1, \sqrt{2} \rangle = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$ ist ein Körper mit den gleichen Verknüpfungen wie in $\mathbb{R}$.

Aufgabe I.16. Sei $n = n_1 + \ldots + n_k$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ paarweise verschieden. Sei

$$A := \operatorname{diag}(\lambda_1 1_{n_1}, \ldots, \lambda_k 1_{n_k}) \in K^{n \times n}$$

und $B \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie:

(a) Genau dann ist $AB = BA$, wenn $B = \operatorname{diag}(B_1, \ldots, B_k)$ mit $B_i \in K^{n_i \times n_i}$ für $i = 1, \ldots, k$.

(b) Genau dann ist $AB = BA$ für alle $B \in K^{n \times n}$, wenn A eine Skalarmatrix ist (d. h. $k = 1$).

Aufgabe I.17. Hannover möchte wegen Aussicht auf Fördermittel möglichst viele Vereine gründen. Um bei Abstimmungen immer eine Mehrheit zu garantieren, soll jeder Verein eine ungerade Mitgliederzahl haben. Zwei verschiedene Vereine sollen hingegen immer eine gerade Anzahl gemeinsamer Mitglieder haben. Zeigen Sie:

(a) Es kann nicht mehr Vereine als Einwohner geben.
Hinweis: Konstruieren Sie $A \in \mathbb{F}_2^{n\times m}$ mit $AA^{\mathrm{t}} = 1_n$.

(b) Es ist immer möglich, genauso viele Vereine wie Einwohner zu gründen. Beachten Sie, dass ein Verein nach §56 BGB mindestens sieben Mitglieder benötigt.
Hinweis: Konstruieren Sie $A = (1_m + v^{\mathrm{t}}v)(1_m + w^{\mathrm{t}}w)$ mit $v, w \in \mathbb{F}_2^m$.

Aufgabe I.18. Zeigen Sie:

(a) Das Vertauschen von zwei Zeilen einer Matrix lässt sich durch die beiden anderen elementaren Zeilenoperationen realisieren.

(b) Jede $n \times n$-Matrix ist ein Produkt von Matrizen der Form $1_n + \lambda E_{ij}$ mit $\lambda \in K$ und $1 \leq i, j \leq n$ (der Fall $i = j$ ist zugelassen).

Aufgabe I.19. Sei $A \in \mathrm{GL}(n, K)$. Zeigen Sie, dass man die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} A \\ 1_n \end{smallmatrix}\right) \in K^{2n\times n}$ durch elementare Spaltenoperationen in die Form $\left(\begin{smallmatrix} 1_n \\ B \end{smallmatrix}\right)$ überführen kann. Dabei ist $B = A^{-1}$.

Aufgabe I.20. Sei $A \in K^{n\times m}$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{rk} A$ die kleinste Zahl r ist, sodass Vektoren $v_1, \ldots, v_r \in K^n$ und $w_1, \ldots, w_r \in K^m$ mit $A = v_1^{\mathrm{t}}w_1 + \ldots + v_r^{\mathrm{t}}w_r$ existieren.

Aufgabe I.21. Seien $A \in \mathbb{Q}^{n\times m}$ und $b \in \mathbb{Q}^{n\times 1}$. Begründen Sie:

(a) Der Rang von A über $\mathbb{Q}$ ist der Rang von A über $\mathbb{R}$.

(b) Ist A über $\mathbb{R}$ invertierbar, so auch über $\mathbb{Q}$.

(c) Besitzt das Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung in $\mathbb{R}^{m\times 1}$, so existiert auch eine Lösung in $\mathbb{Q}^{m\times 1}$.

(d) Die Lösungsmengen von $Ax = b$ über $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ können unterschiedlich sein.

Aufgabe I.22. Seien V, W Vektorräume und $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Zeigen Sie:

(a) Genau dann ist f injektiv, wenn ein $g \in \operatorname{Hom}(W, V)$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$ existiert.

(b) Genau dann ist f surjektiv, wenn ein $g \in \operatorname{Hom}(W, V)$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$ existiert.

(c) Sind die Abbildungen g jeweils eindeutig bestimmt?

Aufgabe I.23. Seien U, V, W, X Vektorräume und $f\colon U \to V$, $g\colon V \to W$ und $h\colon W \to X$ lineare Abbildungen.

(a) Zeigen Sie $\operatorname{rk}(g \circ f) + \operatorname{rk}(h \circ g) \leq \operatorname{rk}(g) + \operatorname{rk}(h \circ g \circ f)$ (Frobenius-Ungleichung).
Hinweis: Für $g(V) = g(f(U)) \oplus Y$ gilt $h(g(V)) = h\big(g(f(U))\big) + h(Y)$.

(b) Folgern Sie Lemma 5.15(a) aus Teil (a).

(c) Folgern Sie $\operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(B) \leq \operatorname{rk}(AB) + n$ für $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times k}$ aus Teil (a) (Sylvester-Ungleichung).

Aufgabe I.24. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Die Summe und das Produkt von (strikten) oberen (bzw. unteren) Dreiecksmatrizen in $K^{n\times n}$ sind wieder (strikte) obere (bzw. untere) Dreiecksmatrizen (Definition 8.14).

(b) Die oberen (bzw. unteren) Dreiecksmatrizen bilden einen Unterraum U von $K^{n\times n}$. Berechnen Sie $\dim U$.

(c) Die Menge der invertierbaren oberen (bzw. unteren) Dreiecksmatrizen in $K^{n\times n}$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, K)$.

Aufgabe I.25. Sei V ein K-Vektorraum. Für $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ und $v \in V$ sei $f_{\varphi,v} \colon V \to V$, $w \mapsto \varphi(w) + v$. Die Abbildungen der Form $f_{\mathrm{id}_V,v}$ nennt man *Translationen*. Zeigen Sie:

(a)
$$\mathrm{Aff}(V) := \{f_{\varphi,v} : \varphi \in \mathrm{GL}(V), v \in V\} \subseteq \mathrm{Abb}(V, V)$$
ist eine Gruppe bzgl. Komposition von Abbildungen. Handelt es sich um eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$?

(b) Die Translationen bilden eine Untergruppe von $\mathrm{Aff}(V)$.

Bemerkung: Man nennt $\mathrm{Aff}(V)$ die *affine* Gruppe von V.

Aufgabe I.26. Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $A \in K^{n\times n}$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass λ^k ein Eigenwert von A^k ist. Gilt auch die Umkehrung? Zeigen Sie, dass λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1} ist, falls A invertierbar ist.

Aufgabe I.27. Sei $A \in K^{n\times n}$ diagonalisierbar. Zeigen Sie, dass auch A^{t} diagonalisierbar ist und dieselben Eigenwerte hat. Stimmen auch die Eigenräume überein?

Aufgabe I.28. Seien $a, b \in K$ und
$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in K^{n\times n}.$$
Zeigen Sie:
$$\det A = (a-b)^{n-1}(a + (n-1)b).$$
Hinweis: Addieren Sie die Spalten 2 bis n zur ersten und führen Sie anschließend Zeilenoperationen aus.

Aufgabe I.29 (Allgemeiner Entwicklungssatz)**.** Seien $A \in K^{r\times s}$, $B \in K^{s\times t}$, $I \subseteq \{1, \dots, r\}$ und $J \subseteq \{1, \dots, t\}$ mit $|I| = |J| = k$. Für eine Matrix $M = (m_{ij})$ sei $M_{IJ} := (m_{ij})_{i\in I, j\in J}$. Zeigen Sie:
$$\det\big((AB)_{IJ}\big) = \sum_{\substack{L\subseteq\{1,\dots,s\} \\ |L|=k}} \det(A_{IL}) \det(B_{LJ}).$$
Bemerkung: Dies verallgemeinert die Matrizenmultiplikation, den Determinantensatz und die Cauchy-Binet-Formel.

Aufgabe I.30. Zeigen Sie für $A \in K^{n\times n}$:

(a) $\det \widetilde{A} = \det(A)^{n-1}$, wobei $0^0 = 1$.

(b) $\widetilde{A^{\mathrm{t}}} = (\widetilde{A})^{\mathrm{t}}$.

(c) $\widetilde{\widetilde{A}} = \det(A)^{n-2}A$ für $n \geq 2$ (auch wenn $\det A = 0$).
Hinweis: Fallunterscheidung nach $\operatorname{rk} A$.

Aufgabe I.31. Transpositionen der Form $(a, a+1) \in S_n$ nennt man *Basistranspositionen*. Zeigen Sie, dass jede Permutation ein Produkt von Basistranspositionen ist.
Bemerkung: Dies ist die Grundlage von *Bubblesort*.

Aufgabe I.32. Zeigen Sie $|A_n| = \frac{n!}{2}$ für $n \geq 2$.
Hinweis: Wenden Sie die Leibniz-Formel auf die Matrix $(1)_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ an.

Aufgabe I.33. Seien $\sigma, \tau \in S_n$ mit $\operatorname{sgn}\sigma \neq \operatorname{sgn}\tau$. Zeigen Sie $\det(P_\sigma + P_\tau) = 0$.
Hinweis: $P_\sigma + P_\tau = P_\sigma(P_\sigma^{-1} + P_\tau^{-1})P_\tau$.

Aufgabe I.34. Sei $\sigma \in S_n$. Zeigen Sie

$$\operatorname{sgn}\sigma = \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst Transpositionen σ.

Aufgabe I.35. Ist das Schiebepuzzle auf dem Cover lösbar?

Aufgabe I.36. Beim Spiel *Lights Out* ist ein 5×5-Grid von Lichtern gegeben, die an oder aus sein können. Berührt man ein Licht, so ändert das Licht zusammen mit seinen horizontalen und vertikalen Nachbarn (oben/unten, rechts/links) den Zustand (an $\leftrightarrow$ aus). Ziel des Spiels ist, alle Lichter eines gegebenen Zustands auszuschalten.

(a) Überlegen Sie sich, dass eine Lösung eindeutig durch einen Vektor in $\mathbb{F}_2^{25}$ gegeben ist, wobei jede Koordinate beschreibt, ob das entsprechende Licht berührt werden muss.

(b) Modellieren Sie die Lösung des Spiels als Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix in $\mathbb{F}_2^{25\times 25}$.

(c) Prüfen Sie (mit Computer), wie viele der 2^{25} Zustände lösbar sind.

(d) Wie viele Lösungen besitzt ein lösbarer Zustand und worin unterscheiden sich die Lösungen?

(e) Wie viele „Züge“ (Lichtschalter-Berührungen) sind im worst case zur Lösung erforderlich?

(f) Welche Zustände mit nur einem brennenden Licht sind lösbar?

(g) Entwickeln Sie einen leicht zu lernenden Algorithmus zum Lösen des Spiels, der ohne Computerberechnungen auskommt.

Hinweis: Spielen Sie hier: `https://raw.org/research/solving-lightsout-using-linear-algebra`

Lineare Algebra II

10 Polynome

10.1 Der Vektorraum der Polynome

Bemerkung 10.1. In Bemerkung 9.41 haben wir angedeutet, dass die Eigenwerte einer Matrix A Lösungen gewisser (nicht-linearer) Polynomgleichungen sind. Wir definieren in diesem Kapitel Polynome mit Koeffizienten in einem beliebigen Körper und untersuchen deren Nullstellen. Daraus leiten wir ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus ab.

Definition 10.2. Ein (formales) *Polynom* über einem Körper K in der *Variablen* X ist eine Summe der Form

$$\alpha = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$$

mit *Koeffizienten* $a_0, \ldots, a_n \in K$.

- Man nennt a_0 das *Absolutglied* von α.
- Sofern nicht alle Koeffizienten 0 sind, nennt man

  $$d := \deg \alpha := \max\{k \in \mathbb{N}_0 : a_k \neq 0\}$$

  den *Grad* von α und a_d den *führenden* Koeffizienten.[1] Im Fall $a_d = 1$ heißt α *normiert*.
- Für das *Nullpolynom* (alle Koeffizienten sind 0) setzt man $\deg 0 := -\infty$.
- Die Menge aller Polynome über K wird mit $K[X]$ bezeichnet.

Bemerkung 10.3.

(a) Kennt man den Grad von $\alpha \in K[X]$ nicht, so schreibt man $\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k = \sum a_k X^k$ unter der Annahme, dass nur endlich viele Koeffizienten ungleich 0 sind.

(b) Polynome werden als gleich angesehen, wenn sie die gleichen Koeffizienten haben, d. h.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k \iff \forall k \in \mathbb{N}_0 : a_k = b_k.$$

(c) Die Körperelemente $\lambda \in K$ werden mit den *konstanten* Polynomen $\lambda X^0 \in K[X]$ identifiziert. Dies sind genau die Polynome vom Grad ≤ 0. Insbesondere gilt $0, 1 \in K \subseteq K[X]$.

Beispiel 10.4. Das Polynom $\alpha = X^2 - 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ ist normiert vom Grad 2 mit Absolutglied 1.

[1] auch *Leitkoeffizient* genannt

Satz 10.5. *Mit den Verknüpfungen*

$$\sum a_k X^k + \sum b_k X^k := \sum (a_k + b_k) X^k,$$
$$\lambda \sum a_k X^k := \sum (\lambda a_k) X^k$$

wird $K[X]$ ein unendlich-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $1, X, X^2, \ldots$.

Beweis. Formal ist ein Polynom nichts weiter als eine Abbildung $\mathbb{N}_0 \to K$, $k \mapsto a_k$ mit $|\{k \in \mathbb{N}_0 : a_k \neq 0\}| < \infty$. Man sieht leicht, dass Summen und skalare Vielfache von Polynomen wieder Polynome sind. Mit den angegebenen Verknüpfungen wird $K[X]$ daher ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, K)$. Nach Definition ist jedes Polynom eine endliche Linearkombination von $1, X, X^2, \ldots$, d. h. $K[X] = \langle 1, X, X^2, \ldots \rangle$. Aus der Eindeutigkeit der Koeffizienten (Bemerkung 10.3) folgt die lineare Unabhängigkeit von $\{1, X, X^2, \ldots\}$. □

Bemerkung 10.6.

(a) Für $\alpha, \beta \in K[X]$ und $\lambda \in K$ gilt offenbar $\deg(\alpha + \beta) \leq \max\{\deg \alpha, \deg \beta\}$ und $\deg(\lambda\alpha) \leq \deg \alpha$. Daher bilden die Polynome vom Grad kleiner d einen d-dimensionalen Unterraum mit Basis $1, X, \ldots, X^{d-1}$.

(b) Sie wissen vermutlich, dass man Polynome auch multiplizieren kann, z. B.

$$\begin{aligned}(2X^3 - X^2 + 5X - 1)(4X^2 + 3) &= 8X^5 - 4X^4 + (6 + 20)X^3 + (-3 - 4)X^2 + 15X - 3 \\ &= 8X^5 - 4X^4 + 26X^3 - 7X^2 + 15X - 3\end{aligned}$$

Dies lässt sich wie folgt formalisieren.

Satz 10.7. *Für Polynome $\alpha = \sum a_k X^k$, $\beta = \sum b_k X^k$ ist*

$$\alpha \cdot \beta := \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} \Big) X^k$$

ein Polynom vom Grad $\deg(\alpha) + \deg(\beta)$. Es gelten folgende Rechenregeln:

$$\alpha\beta = \beta\alpha, \qquad \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, \qquad \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma.$$

Beweis. Im Fall $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ ist $\alpha\beta = 0$ und $\deg(\alpha\beta) = -\infty = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$. Sei also $d := \deg \alpha \geq 0$ und $e := \deg \beta \geq 0$. Für $k > d + e$ ist $\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} = 0$ und $\deg(\alpha\beta) \leq d + e$. Für $k = d + e$ ist $\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} = a_d b_e \neq 0$. Dies zeigt $\deg(\alpha\beta) = d + e$. Insbesondere ist $\alpha\beta \in K[X]$. Für $\gamma = \sum c_k X^k$ gilt

$$\alpha\beta = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} \Big) X^k = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{l=0}^{k} b_l a_{k-l} \Big) X^k = \beta\alpha$$
$$\alpha(\beta + \gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{l=0}^{k} a_l (b_{k-l} + c_{k-l}) \Big) X^k = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} \Big) X^k + \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{l=0}^{k} a_l c_{k-l} \Big) X^k = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Der Koeffizient von X^k in $\alpha(\beta\gamma)$ ist

$$\sum_{l=0}^{k} a_l \sum_{m=0}^{k-l} b_m c_{k-l-m} = \sum_{\substack{r,s,t\in\mathbb{N}_0\\ r+s+t=k}} a_r b_s c_t = \sum_{l=0}^{k} \Big(\sum_{m=0}^{l} a_m b_{l-m} \Big) c_{k-l}.$$

Dies ist auch der Koeffizient von X^k in $(\alpha\beta)\gamma$. Also ist $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$. □

Bemerkung 10.8. Im Gegensatz zur Matrizenmultiplikation ist die Multiplikation von Polynomen kommutativ. Das einzige Körperaxiom, welches $K[X]$ nicht erfüllt, ist die Existenz Inverser bzgl. Multiplikation. Zum Beispiel existiert kein $\alpha \in K[X]$ mit $X \cdot \alpha = 1$. Dennoch gilt die Kürzungsregel: $\alpha\beta = \alpha\gamma \Rightarrow \beta = \gamma$, falls $\alpha \neq 0$. Dies folgt aus

$$\deg(\beta - \gamma) \leq \deg(\alpha) + \deg(\beta - \gamma) = \deg(\alpha(\beta - \gamma)) = \deg 0 = -\infty.$$

Man kann in $K[X]$ also wie in $\mathbb{Z}$ rechnen.

Satz 10.9 (Division mit Rest)**.** *Für $\alpha, \beta \in K[X]$ mit $\beta \neq 0$ existieren eindeutig bestimmte Polynome $\gamma, \delta \in K[X]$ mit $\alpha = \beta\gamma + \delta$ und $\deg \delta < \deg \beta$.*

Beweis. Existenz: Wähle $\gamma \in K[X]$, sodass

$$\delta := \alpha - \beta\gamma = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \ldots + a_0$$

möglichst kleinen Grad $d \in \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$ hat. Sei $\beta = b_e X^e + \ldots + b_0$ und $e := \deg \beta$. Gilt $d \geq e$, so ist

$$a_d b_e^{-1} X^{d-e} \beta = a_d b_e^{-1} (b_e X^d + b_{e-1} X^{d-1} + \ldots + b_0 X^{d-e}) = a_d X^d + \ldots$$

und es folgt

$$\deg\big(\alpha - \beta(\gamma + a_d b_e^{-1} X^{d-e})\big) = \deg\big(\delta - a_d b_e^{-1} X^{d-e} \beta\big) < d.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von γ. Also ist $d < e$ und $\alpha = \beta\gamma + \delta$.

Eindeutigkeit: Sei nun $\alpha = \beta\tilde{\gamma} + \tilde{\delta}$ mit $\tilde{\gamma}, \tilde{\delta} \in K[X]$ und $\deg \tilde{\delta} < e$. Nach Satz 10.7 ist

$$e + \deg(\tilde{\gamma} - \gamma) = \deg(\beta) + \deg(\tilde{\gamma} - \gamma) = \deg(\beta(\tilde{\gamma} - \gamma)) = \deg(\delta - \tilde{\delta}) \leq \max\{\deg \delta, \deg \tilde{\delta}\} < e.$$

Es folgt $\deg(\tilde{\gamma} - \gamma) = -\infty = \deg(\delta - \tilde{\delta})$. Dies zeigt $\tilde{\gamma} = \gamma$ und $\tilde{\delta} = \delta$. □

Definition 10.10. In der Situation von Satz 10.9 nennt man δ den *Rest* bei der Division von α durch β. Im Fall $\delta = 0$ nennt man β einen *Teiler* von α und schreibt $\beta \mid \alpha$ (zusätzlich sei $0 \mid 0$). Ggf. sagt man auch „β *teilt* α“ oder „α ist durch β *teilbar*“.

Beispiel 10.11.

$$\begin{array}{rrrrl} (2X^3 & -X^2 & +5X & +1) : (X^2+3) = 2X - 1 =: \gamma \\ -(2X^3 & & +6X) & \\ & -X^2 & -X & +1 \\ & -(-X^2 & & -3) \\ & & -X & +4 =: \delta \end{array}$$

Also $\alpha = 2X^3 - X^2 + 5X + 1 = (X^2+3)(2X-1) - X + 4 = \beta\gamma + \delta$ mit $\deg \delta = 1 < 2 = \deg \beta$.

Bemerkung 10.12. Die Division durch normierte Polynome vom Grad 1 lässt sich mit dem HORNER-*Schema*[2] effizient gestalten. Sei dazu $\alpha = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ und $\beta = X - b$. Wir berechnen $c_n := 0$, $c_k := a_{k+1} + bc_{k+1}$ für $k = n-1, \ldots, 0$ und $d := a_0 + bc_0$:

$$\begin{array}{cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ + & 0 & bc_{n-1} & bc_{n-2} & \cdots & bc_0 \\ \hline & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_0 & d \end{array}$$

Für $\gamma := c_{n-1}X^{n-1} + \ldots + c_0$ gilt nun

$$\begin{aligned} \beta\gamma + d &= c_{n-1}X^n + (c_{n-2} - bc_{n-1})X^{n-1} + \ldots + (c_0 - bc_1)X - bc_0 + d \\ &= a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 = \alpha. \end{aligned}$$

Beispiel 10.13. Für $\alpha = 2X^3 - X^2 + 3X + 1$ und $\beta = X - 2$ erhält man:

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & -1 & 3 & 1 \\ + & 0 & 4 & 6 & 18 \\ \hline & 2 & 3 & 9 & 19 \end{array}$$

Dies zeigt $\alpha = \beta(2X^2 + 3X + 9) + 19$.

10.2 Nullstellen

Definition 10.14. Sei $\alpha = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in K[X]$. Man kann ein Element $x \in K$ für X in α *einsetzen*:

$$\alpha(x) := \sum_{k=0}^{d} a_k x^k \in K.^3$$

Man nennt x eine *Nullstelle* von α, falls $\alpha(x) = 0$.

Lemma 10.15. *Für $\alpha, \beta \in K[X]$ und $x \in K$ gilt*

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(x) &= \alpha(x) + \beta(x), \\ (\alpha\beta)(x) &= \alpha(x)\beta(x). \end{aligned}$$

Beweis. Seien $\alpha = \sum a_k X^k$ und $\beta = \sum b_k X^k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(x) &= \sum (a_k + b_k)x^k = \sum a_k x^k + \sum b_k x^k = \alpha(x) + \beta(x), \\ (\alpha\beta)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (a_k x^k)(b_{n-k}x^{n-k}) = \sum a_k x^k \sum b_k x^k = \alpha(x)\beta(x). \end{aligned}$$ □

Bemerkung 10.16. Merkregel: Es ist egal, ob Sie erst addieren/multiplizieren und danach einsetzen oder erst einsetzen und danach addieren/multiplizieren. Achtung: Es gilt weder $\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$ noch $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ für $\alpha \in K[X]$ und $x, y \in K$.

[2] auch RUFFINIS *Regel* genannt
[3] Wir vereinbaren $0^0 := 1$.

Satz 10.17 (Interpolation)**.** *Seien $x_1, \ldots, x_n \in K$ paarweise verschieden und $y_1, \ldots, y_n \in K$ beliebig. Dann existiert genau ein Polynom α vom Grad $< n$ mit $\alpha(x_i) = y_i$ für $i = 1, \ldots, n$.*

Beweis. Sei $\alpha = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X^{n-1}$. Die Bedingung $\alpha(x_i) = y_i$ für $i = 1, \ldots, n$ bedeutet:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems ist eine Vandermonde-Matrix. Da die x_i paarweise verschieden sind, ist die Matrix nach Satz 9.20 invertierbar. Also existiert genau eine Lösung $(a_0, \ldots, a_{n-1})$. □

Bemerkung 10.18. Eine explizite Lösung der Interpolationsaufgabe ist durch das LAGRANGE-*Polynom*

$$\alpha := \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \in K[X]$$

gegeben (nachrechnen). Man kann $\deg \alpha < n$ direkt ablesen.

Beispiel 10.19.

(a) Für $K^n = \mathbb{R}^2$ entspricht Satz 10.17 der geometrischen Aussage, dass zwei verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^2$ durch genau eine Gerade verbunden sind (senkrechte Geraden werden allerdings nicht durch Polynome beschrieben).

(b) Wir suchen ein Polynom $\alpha \in \mathbb{R}[X]$ durch die Punkte $(-1, 2)$, $(0, 1)$ und $(1, 3)$. Der Beweis von Satz 10.17 führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mit der eindeutigen Lösung $(1, 1/2, 3/2)$, d. h. $\alpha = 1 + \frac{1}{2}X + \frac{3}{2}X^2$.

Folgerung 10.20.

(a) Jedes Polynom $\alpha \in K[X]$ vom Grad $d \geq 0$ besitzt höchstens d Nullstellen.

(b) Sei $|K| = \infty$ und $\alpha, \beta \in K[X]$ mit $\alpha(x) = \beta(x)$ für alle $x \in K$. Dann gilt $\alpha = \beta$.

Beweis.

(a) Angenommen α besitzt paarweise verschiedene Nullstellen $x_1, \ldots, x_{d+1} \in K$. Nach Satz 10.17 mit $y_1 = \ldots = y_{d+1} = 0$ ist α das einzige Polynom vom Grad $\leq d$ mit diesen Nullstellen. Andererseits hat das Nullpolynom auch diese Nullstellen. Also gilt $\alpha = 0$ und $d = -\infty$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

(b) Wegen $|K| = \infty$ besitzt $\alpha - \beta$ unendlich viele Nullstellen. Aus (a) folgt $\alpha = \beta$. □

Bemerkung 10.21. Für $K = \mathbb{R}$ ist jedes Polynom $\alpha \in \mathbb{R}[X]$ eindeutig durch die (stetige) Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \alpha(x)$ bestimmt, denn $|K| = \infty$. In der Analysis unterscheidet man daher nicht zwischen Polynom und Funktion. Über endlichen Körpern K würde man dabei Information verlieren, denn es gibt nur endlich viele Abbildungen $K \to K$, aber unendlich viele Polynome. Zum Beispiel entsprechen die Polynome $X, X^2, \ldots \in \mathbb{F}_2[X]$ alle der Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{F}_2}$.

Lemma 10.22. *Genau dann ist $x \in K$ eine Nullstelle von $\alpha \in K[X]$, wenn $(X - x) \mid \alpha$.*

Beweis. Division mit Rest liefert $\gamma, \delta \in K[X]$ mit $\alpha = (X - x)\gamma + \delta$ und $\deg \delta < \deg(X - x) = 1$, d. h. $\delta \in K$. Nun ist

$$\delta = \delta(x) = \big(\alpha - (X - x)\gamma\big)(x) \overset{10.15}{=} \alpha(x) - (x - x)\gamma(x) = \alpha(x). \qquad \square$$

Definition 10.23. Sei $x \in K$ eine Nullstelle von $\alpha \neq 0$. Man nennt $X - x$ einen *Linearfaktor* von α. Die größte Zahl $e \in \mathbb{N}$ mit $(X - x)^e \mid \alpha$ nennt man die *algebraische Vielfachheit* der Nullstelle x. Im Fall $e = 1$ spricht man von einer *einfachen* Nullstelle und anderenfalls von einer *mehrfachen* Nullstelle.

Lemma 10.24. *Seien $x_1, \ldots, x_n \in K$. Dann hat jeder normierte Teiler von $(X - x_1) \ldots (X - x_n) \in K[X]$ die Form $(X - x_{i_1}) \ldots (X - x_{i_k})$ mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$.*

Beweis. Im Fall $n = 1$ sind 1 (das leere Produkt mit $k = 0$) und $X - x_1$ die einzigen normierten Teiler. Sei also $n \geq 2$ und die Behauptung für $n - 1$ bereits bewiesen. Seien $\alpha, \beta \in K[X]$ normiert mit $(X - x_1) \ldots (X - x_n) = \alpha\beta$. Dann ist $\alpha(x_n)\beta(x_n) = (\alpha\beta)(x_n) = 0$, o. B. d. A. sei $\alpha(x_n) = 0$. Nach Lemma 10.22 gilt $\alpha = (X - x_n)\gamma$ für ein $\gamma \in K[X]$. Nach Bemerkung 10.8 darf man $X - x_n$ kürzen und erhält $(X - x_1) \ldots (X - x_{n-1}) = \gamma\beta$. Die Behauptung folgt nun durch Induktion. $\square$

Beispiel 10.25.

(a) Sei $\alpha = X^3 + X^2 - 5X + 3 \in \mathbb{R}[X]$. Eine Nullstelle $x \in \mathbb{R}$ ist eine Lösung der Gleichung

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0.$$

Auch wenn es Lösungsformeln für solche Gleichungen (dritten und vierten Grades[4]) gibt, sind diese in der Praxis aufwendig. Wir werden unsere Beispiele (und Übungsaufgaben) daher so wählen, dass man „kleine“ ganzzahlige Nullstellen erraten kann. Angenommen es gibt eine Nullstelle $x \in \mathbb{Z}$. Wegen $x(x^2 + x - 5) = -3$ ist x ein Teiler von 3, d. h. $x \in \{\pm 1, \pm 3\}$. Man prüft leicht, dass $x_1 = 1$ tatsächlich eine Nullstelle ist ($1^3 + 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 0$). Polynomdivision (zum Beispiel mit dem Horner-Schema) ergibt

$$(X^3 + X^2 - 5X + 3) : (X - 1) = X^2 + 2X - 3 =: \gamma.$$

Für jede Nullstelle $y \in \mathbb{R}$ von γ gilt nun $\alpha(y) = (y - 1)\gamma(y) = 0$, d. h. y ist auch eine Nullstelle von α. Mit der p-q-Formel $\frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q})$ für quadratische Gleichungen erhält man die Nullstellen von γ:

$$x_2 = \frac{1}{2}\big(-2 + \sqrt{4 + 12}\big) = 1, \qquad x_3 = \frac{1}{2}\big(-2 - \sqrt{4 + 12}\big) = -3.$$

Daher ist $x_1 = x_2 = 1$ eine Nullstelle von α mit algebraischer Vielfachheit 2 (eine *doppelte* Nullstelle). Außerdem *zerfällt* α in Linearfaktoren $\alpha = (X - 1)^2(X + 3)$.

[4] siehe Algebra-Skript

(b) Offensichtlich ist $\alpha(0)$ das Absolutglied von $\alpha \in K[X]$. Also ist $x = 0$ genau dann eine Nullstelle von α, wenn das Absolutglied von α verschwindet.

(c) Bekanntlich besitzt $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ keine Nullstelle. Wir konstruieren später einen „größeren“ Körper, über dem auch dieses Polynom in Linearfaktoren zerfällt (Bemerkung 11.33).

(d) Das Polynom $X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{F}_2$, denn es kommen nur 0 und 1 in Frage.

10.3 Charakteristische Polynome

Bemerkung 10.26. Im Folgenden betrachten wir Matrizen mit Einträgen in $K[X]$. Aufgrund der Rechenregeln für Polynome (Satz 10.7) überlegt man sich leicht, dass die gewohnten Rechenregeln (Lemma 5.8) für Matrizen auch in $K[X]^{n\times n}$ gelten. Schließlich kann man sogar die Definition der Determinante auf Matrizen in $K[X]^{n\times n}$ anwenden (dabei werden Matrixeinträge nur addiert und multipliziert, aber niemals dividiert). Ebenso bleiben der Determinantensatz, die Laplace-Entwicklung, die Leibniz-Formel und der Satz 9.22 über die komplementäre Matrix in dieser größeren Allgemeinheit richtig. Andererseits funktioniert der Gauß-Algorithmus in $K[X]^{n\times n}$ nicht, denn hier muss dividiert werden.

Definition 10.27. Für $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ betrachten wir die Matrix

$$X1_n - A = \begin{pmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & X - a_{nn} \end{pmatrix} \in K[X]^{n\times n}.$$

Man nennt $\chi_A := \det(X1_n - A) \in K[X]$ das *charakteristische Polynom* von A.[5]

Lemma 10.28. *Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom.*

Beweis. Für $A \in K^{n\times n}$ und $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ gilt

$$\chi_{SAS^{-1}} = \det(X1_n - SAS^{-1}) = \det(S(X1_n - A)S^{-1}) \overset{9.12}{=} \det(X1_n - A) = \chi_A. \qquad \square$$

Definition 10.29. Sei V ein Vektorraum mit Basis B. Für $f \in \mathrm{End}(V)$ definiert man $\chi_f := \chi_{B[f]_B}$. Nach Folgerung 7.27 und Lemma 10.28 hängt χ_f nicht von der Wahl von B ab. In den nachfolgenden Sätzen kann man Matrizen also durch Endomorphismen ersetzen (und umgekehrt).

Beispiel 10.30. Das charakteristische Polynom von $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ ist

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} X - 1 & -2 \\ -3 & X - 4 \end{pmatrix} = (X - 1)(X - 4) - (-2)(-3) = X^2 - 5X - 2 = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A).$$

Lemma 10.31. *Für $A \in K^{n\times n}$ gilt $\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(A)$. Insbesondere ist χ_A normiert vom Grad n.*

[5] In manchen Büchern definiert man χ_A durch $\det(A - X1_n) = (-1)^n \det(X1_n - A)$. Das macht keinen großen Unterschied, aber bringt den Nachteil, dass χ_A nicht normiert ist, wenn n ungerade ist.

Beweis. Sei $A = (a_{ij})$. Nach der Leibniz-Formel gilt

$$\begin{aligned}\chi_A = \det(X1_n - A) &= (X - a_{11})(X - a_{22}) \dots (X - a_{nn}) \\ &+ \sum_{\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}} \operatorname{sgn}(\sigma)(\delta_{1\sigma(1)}X - a_{1\sigma(1)}) \dots (\delta_{n\sigma(n)}X - a_{n\sigma(n)}).\end{aligned}$$

Für $\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}$ existiert ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $l := \sigma(k) \neq k$. Da σ injektiv ist, gilt $\sigma(l) \neq \sigma(k) = l$. Daher ist $\delta_{k\sigma(k)} = 0 = \delta_{l\sigma(l)}$ und

$$(\delta_{1\sigma(1)}X - a_{1\sigma(1)}) \dots (\delta_{n\sigma(n)}X - a_{n\sigma(n)})$$

ist ein Polynom vom Grad $\leq n - 2$. Insgesamt ist

$$\chi_A = (X - a_{11})(X - a_{22}) \dots (X - a_{nn}) + \alpha$$

mit $\deg \alpha \leq n-2$. Ausmultiplizieren zeigt $\chi_A = X^n - (a_{11} + \ldots + a_{nn})X^{n-1} + \ldots = X^n - \operatorname{tr}(A)X^{n-1} + \ldots$. Zur Berechnung des Absolutglieds setzt man $X = 0$ und erhält $\chi_A(0) \overset{10.15}{=} \det(-A) = (-1)^n \det(A)$ aus Bemerkung 9.8 (für $n = 1$ ist $\det A = \operatorname{tr} A$). □

Satz 10.32. *Die Eigenwerte von $A \in K^{n\times n}$ sind die Nullstellen von χ_A.*

Beweis. Es gilt

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda 1_n) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda 1_n) = 0 \overset{9.8}{\iff} \det(\lambda 1_n - A) = 0 \overset{10.15}{\iff} \chi_A(\lambda) = 0. \qquad \square$$

Lemma 10.33. *Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $f \in \operatorname{End}(V)$. Dann ist die geometrische Vielfachheit von λ höchstens so groß wie die algebraische Vielfachheit von λ als Nullstelle von χ_f.*

Beweis. Man ergänze eine Basis $b_1, \dots, b_e$ von $E_\lambda(f)$ zu einer Basis $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ von V. Dann gilt

$$\chi_f = \det(X1_n - {}_B[f]_B) = \det \begin{pmatrix} (X - \lambda)1_e & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Lemma 9.9 zeigt $\chi_f = (X - \lambda)^e \beta$ für ein $\beta \in K[X]$. Also ist die algebraische Vielfachheit von λ als Nullstelle von χ_f mindestens e. □

Satz 10.34. *Genau dann ist $f \in \operatorname{End}(V)$ diagonalisierbar, wenn χ_f in Linearfaktoren zerfällt und für jede Nullstelle von χ_f die algebraische Vielfachheit mit der geometrischen Vielfachheit übereinstimmt.*

Beweis. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ die verschiedenen Nullstellen von χ_f mit algebraischen Vielfachheiten $m_1, \dots, m_k$. Durch sukzessives Abspalten von Linearfaktoren erhält man ein normiertes $\alpha \in K[X]$ mit $\chi_f = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_k)^{m_k} \alpha$. Sei m_i' die geometrische Vielfachheit von λ_i als Eigenwert von f. Nach Lemma 10.33 gilt

$$\dim V = \deg \chi_f \overset{10.7}{=} m_1 + \ldots + m_k + \deg(\alpha) \geq m_1' + \ldots + m_k'$$

mit Gleichheit genau dann, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren besitzt (Satz 8.10). Dies gilt genau dann, wenn χ_f in Linearfaktoren zerfällt (d. h. $\alpha = 1$) und die algebraischen Vielfachheiten mit den geometrischen Vielfachheiten übereinstimmen (d. h. $m_i = m_i'$ für $i = 1, \dots, k$). □

Bemerkung 10.35. Zerfällt χ_A in Linearfaktoren, so gilt

$$\chi_A = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n) = X^n - (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \lambda_1 \dots \lambda_n.$$

Ein Vergleich mit Lemma 10.31 zeigt:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tr} A &= \lambda_1 + \dots + \lambda_n, \\ \det A &= \lambda_1 \dots \lambda_n, \end{aligned}}$$

d. h. die Spur ist die Summe der Eigenwerte und die Determinante ist das Produkt der Eigenwerte (sofern diese existieren). Hat man bereits $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ bestimmt, so erhält man $\lambda_n = \operatorname{tr}(A) - \lambda_1 - \dots - \lambda_{n-1}$.

Satz 10.36 (Mirsky)**.** *Sei $d_1, \dots, d_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $d_1 + \dots + d_n = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$. Dann existiert eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ mit Hauptdiagonale $d_1, \dots, d_n$ und Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.*

Beweis. Im Fall $n = 1$ erfüllt $A = (d_1) = (\lambda_1)$ die Behauptung. Sei $n \geq 2$ und $A \in K^{n \times n} \setminus K 1_n$ eine Dreiecksmatrix mit Hauptdiagonale $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Nach Beispiel 8.15 hat A Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Nach dem Satz von Fillmore ist A zu einer Matrix mit Hauptdiagonale $d_1, \dots, d_n$ ähnlich. Diese hat die gleichen Eigenwerte wie A. □

Beispiel 10.37.

(a) Wir suchen eine Matrix mit Eigenwerten $1, 1, 1$ und Hauptdiagonale $0, 0, 3$. Dafür wenden wir den Satz von Fillmore auf

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

an. Der Übergang zur Basis $\{(1,0,0), (1,1,0), (1,2,1)\}$ liefert

$$A \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Fibonacci-*Zahlen* F_k sind rekursiv definiert:

$$F_k := k \quad (k = 0, 1) \qquad F_{k+1} := F_k + F_{k-1} \quad (k \geq 1).$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_k	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Wir suchen eine explizite Formel für F_k. Für $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gilt

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} F_{k-1} \\ F_{k-2} \end{pmatrix} = \dots = A^k \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\chi_A = (X - 1)X - 1 = X^2 - X - 1$$

hat A die Eigenwerte $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\psi := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (man nennt $\varphi = 1.618\dots$ den *goldenen Schnitt*). Offenbar ist $v := (\varphi, 1)^{\mathrm{t}}$ ein Eigenvektor zu φ und $w := (\psi, 1)^{\mathrm{t}}$ ein Eigenvektor zu ψ. Es gilt

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} A^k (v - w) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^k v - \psi^k w) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} * \\ \varphi^k - \psi^k \end{pmatrix}.$$

Man erhält

$$\boxed{F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^k - \psi^k).} \qquad \text{(BINET-}\textit{Formel}^6\text{)}$$

Wegen $|\psi^k| \approx 0.6^k \to 0$ gilt $F_k \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^k$, d. h. F_k wächst exponentiell.

Lemma 10.38. *Für $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times m}$ gilt $X^n\chi_{AB} = X^m\chi_{BA}$. Insbesondere haben AB und BA die gleichen von 0 verschiedenen Eigenwerte.*

Beweis. Nach den Regeln für Blockmatrizen (Bemerkung 5.9, Lemma 9.9) und dem Determinantensatz gilt

$$\begin{aligned} X^n\chi_{AB} &= \det\left(\begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ -B & X1_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X1_m - AB & A \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ B & 1_n \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ -B & X1_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X1_m & A \\ B & 1_n \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} X1_m & A \\ 0 & X1_n - BA \end{pmatrix} = X^m\chi_{BA}. \end{aligned}$$

Jeder Eigenwert $\lambda \in K$ von AB ist eine Nullstelle von $X^n\chi_{AB} = X^m\chi_{BA}$. Im Fall $\lambda \neq 0$ muss λ eine Nullstelle von χ_{BA} sein. Dann ist λ auch ein Eigenwert von BA (und umgekehrt). □

Bemerkung 10.39. Im Fall $n = m$ gilt sogar $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ in der Situation von Lemma 10.38.

10.4 Minimalpolynome

Bemerkung 10.40. Wir haben bereits Polynome in Matrizen eingesetzt. Wir setzen nun umgekehrt Matrizen in Polynome ein. Für $\alpha = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in K[X]$ und $A \in K^{n\times n}$ definieren wir

$$\alpha(A) := \sum_{k=0}^{d} a_k A^k \in K^{n\times n}.$$

Die Regeln aus Lemma 10.15 gelten auch in dieser Allgemeinheit. Außerdem ist $\alpha(A)^{\mathrm{t}} = \alpha(A^{\mathrm{t}})$.

Satz 10.41. *Für $A \in K^{n\times n}$ existiert genau ein normiertes Polynom $\mu_A \in K[X]$ mit $\mu_A(A) = 0_n$ und $\deg \mu_A$ minimal.*

Beweis. Wegen $\dim K^{n\times n} = n^2$ (Lemma 5.4) sind die Potenzen $1_n = A^0, A, A^2, \ldots, A^{n^2}$ linear abhängig in $K^{n\times n}$. Also existieren $a_0, \ldots, a_{n^2} \in K$ (nicht alle 0) mit $\sum_{k=0}^{n^2} a_k A^k = 0$. Für $\alpha = \sum a_k X^k \in K[X]$ gilt somit $\alpha(A) = 0$. Indem man durch den führenden Koeffizienten von α teilt, kann man annehmen, dass α normiert ist. Dies zeigt, dass μ_A existiert. Sei auch $\tilde{\mu} \in K[X]$ normiert mit $\tilde{\mu}(A) = 0$ und $\deg \tilde{\mu} = \deg \mu_A$ minimal. Dann ist $(\mu_A - \tilde{\mu})(A) = \mu_A(A) - \tilde{\mu}(A) = 0$ und $\deg(\mu_A - \tilde{\mu}) < \deg \mu_A$. Die Minimalität von $\deg \mu_A$ zeigt $\mu_A - \tilde{\mu} = 0$, d. h. μ_A ist eindeutig bestimmt. □

Definition 10.42. Man nennt μ_A das *Minimalpolynom* von A.

[6] Man kann die Formel auch durch Induktion beweisen, sofern man sie zuvor erraten hat.

Beispiel 10.43. Sei $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$. Da A keine Skalarmatrix ist, gilt $\deg \mu_A \geq 2$. Wir machen den Ansatz

$$A^2 + xA + y1_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $x, y \in \mathbb{Q}$. Ein Vergleich der Matrixeinträge an Position $(1,2)$ zeigt $x = -1$. Tatsächlich gilt die Gleichung nun für $y = 2$. Daher ist $\mu_A = X^2 - X + 2$.

Lemma 10.44. *Sei $A \in K^{n\times n}$ und $\alpha \in K[X]$ mit $\alpha(A) = 0_n$. Dann gilt $\mu_A \mid \alpha$.*

Beweis. Wir dividieren mit Rest: $\alpha = \mu_A\gamma + \delta$ mit $\gamma, \delta \in K[X]$ und $\deg \delta < \deg \mu_A$. Dann ist

$$\delta(A) = (\alpha - \mu_A\gamma)(A) = \alpha(A) - \mu_A(A)\gamma(A) = 0_n.$$

Aus der Minimalität von $\deg \mu_A$ folgt $\delta = 0$ und $\mu_A \mid \alpha$. □

Lemma 10.45. *Ähnliche Matrizen haben das gleiche Minimalpolynom.*

Beweis. Sei $A \in K^{n\times n}$ mit $\mu_A = \sum a_k X^k$. Für $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ gilt

$$\mu_A(SAS^{-1}) = \sum a_k (SAS^{-1})^k = \sum a_k SA^kS^{-1} = S\Big(\sum a_k A^k\Big)S^{-1} = S\mu_A(A)S^{-1} = 0_n.$$

Aus Lemma 10.44 folgt $\mu_{SAS^{-1}} \mid \mu_A$. Da Ähnlichkeit eine symmetrische Relation ist, gilt auch $\mu_A \mid \mu_{SAS^{-1}}$. Da beide Minimalpolynome normiert sind, müssen sie gleich sein. □

Definition 10.46. Sei V ein Vektorraum mit Basis B. Für $f \in \mathrm{End}(V)$ sei wie üblich $\mu_f := \mu_{B[f]_B}$. Nach Folgerung 7.27 und Lemma 10.45 hängt μ_f nicht von der Wahl von B ab. Die folgenden Sätze über Matrizen gelten sinngemäß auch für Endomorphismen.

Bemerkung 10.47. Aus dem Beweis von Satz 10.41 erhält man $\deg \mu_A \leq n^2$. Der nächste Satz impliziert $\deg \mu_A \leq n$.

Satz 10.48 (Cayley-Hamilton)**.** *Für $A \in K^{n\times n}$ gilt $\chi_A(A) = 0_n$ und $\mu_A \mid \chi_A$.*

Beweis. Sei $B := X1_n - A \in K[X]^{n\times n}$ und $\widetilde{B} \in K[X]^{n\times n}$ die zu B komplementäre Matrix. Aus jedem Eintrag von $\widetilde{B}$ extrahieren wir den Koeffizienten von X^k und bilden daraus die Matrix $B_k \in K^{n\times n}$. Es gilt nun

$$\widetilde{B} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k X^k,$$

wobei nur endlich viele der B_k ungleich 0_n sind. Sei $\chi_A = \sum a_k X^k$. Nach Satz 9.22 gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k 1_n X^k = \chi_A 1_n = \det(B)1_n = \widetilde{B}B = \sum_{k=0}^{\infty} B_k X^k (X1_n - A) = \sum_{k=0}^{\infty} (B_{k-1} - B_k A)X^k,$$

wobei $B_{-1} := 0_n$. Ein Koeffizientenvergleich ergibt $a_k 1_n = B_{k-1} - B_k A$ für $k = 0, 1, \ldots$. Daher ist

$$\chi_A(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} (B_{k-1}A^k - B_k A^{k+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{k-1}A^k - \sum_{k=0}^{\infty} B_k A^{k+1} = 0_n.$$

Die zweite Behauptung folgt aus Lemma 10.44. □

Beispiel 10.49.

(a) Für $A \in K^{2\times 2}$ gilt $A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)1_2 = 0$ nach Lemma 10.31.

(b) Sei $A \in \mathrm{GL}(n, K)$. Nach Lemma 10.31 ist $(-1)^n \det(A)$ das Absolutglied von χ_A. Daher existiert ein normiertes Polynom $\beta \in K[X]$ mit $\chi_A - (-1)^n \det(A) = X\beta$. Wegen $\chi_A(A) = 0_n$ ist $A\beta(A) = (-1)^{n+1} \det(A)1_n$. Multiplikation mit A^{-1} zeigt

$$A^{-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\det A}\beta(A).$$

Aus Satz 9.22 folgt $\beta(A) = (-1)^{n+1}\widetilde{A}$. Speziell für $n = 2$:

$$A^{-1} \overset{\text{(a)}}{=} \frac{1}{\det A}\big(\operatorname{tr}(A)1_2 - A\big)$$

(vgl. Beispiel 9.23).

Satz 10.50. *Die Eigenwerte von $A \in K^{n\times n}$ sind die Nullstellen von μ_A, d. h. χ_A und μ_A haben die gleichen Nullstellen (nicht unbedingt mit den gleichen Vielfachheiten).*

Beweis. Nach Cayley-Hamilton ist jede Nullstelle von μ_A auch eine Nullstelle von χ_A und damit ein Eigenwert von A (Satz 10.32). Sei umgekehrt $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $v \in K^{n\times 1}$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist $A^k v = A^{k-1}\lambda v = \ldots = \lambda^k v$. Sei $\mu_A = \sum a_k X^k$. Dann gilt

$$0 = \mu_A(A)v = \sum a_k A^k v = \sum a_k \lambda^k v = \mu_A(\lambda)v.$$

Wegen $v \neq 0$ ist $\mu_A(\lambda) = 0$, d. h. λ ist eine Nullstelle von μ_A. □

Bemerkung 10.51. Wegen $\deg \mu_A \leq \deg \chi_A$ vereinfacht Satz 10.50 die Bestimmung der Eigenwerte. Andererseits ist nicht klar, wie man μ_A effizient berechnet. Der nächste Satz verbessert Folgerung 8.12.

Satz 10.52. *Genau dann ist $A \in K^{n\times n}$ diagonalisierbar, wenn μ_A in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.*

Beweis. Sei $A \in K^{n\times n}$ diagonalisierbar. Nach Lemma 10.45 können wir $A = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ annehmen. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \{d_1, \ldots, d_n\}$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A. Für $\alpha := (X-\lambda_1)\ldots(X-\lambda_k)$ gilt

$$\alpha(A) = \operatorname{diag}(\alpha(d_1), \ldots, \alpha(d_n)) = 0_n$$

und $\mu_A \mid \alpha$ nach Lemma 10.44. Andererseits sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ Eigenwerte und damit Nullstellen von μ_A. Dies zeigt $\mu_A = \alpha$ (Lemma 10.24).

Nehmen wir umgekehrt $\mu_A = (X - \lambda_1)\ldots(X - \lambda_k)$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ an. Für $i = 1, \ldots, k$ sei $\gamma_i := \prod_{j\neq i}(X - \lambda_j) \in K[X]$. Das Lagrange-Polynom (Bemerkung 10.18) zu den Paaren $(x_i, y_i) = (\lambda_i, 1)$ hat die Form $\gamma = \sum_{i=1}^k c_i\gamma_i$ mit $c_i \in K$. Da γ Grad $< k$ hat und an $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit dem konstanten Polynom 1 übereinstimmt, gilt $\gamma = 1$ nach Satz 10.17. Für $v \in K^{n\times 1}$ ist

$$(A - \lambda_i 1_n)\gamma_i(A)v = \mu_A(A)v = 0,$$

d. h. $\gamma_i(A)v \in E_{\lambda_i}(A)$. Andererseits ist

$$v = 1_n v = \gamma(A)v = c_1\gamma_1(A)v + \ldots + c_k\gamma_k(A)v.$$

Dies zeigt $K^{n\times 1} = E_{\lambda_1}(A) + \ldots + E_{\lambda_k}(A)$. Nach Bemerkung 8.6 ist A diagonalisierbar. □

Beispiel 10.53. Sei $A \in K^{n\times n}$ mit genau zwei verschiedenen Eigenwerten. Angenommen wir finden einen Vektor $v \in K^{n\times 1}$, sodass v, Av, A^2v linear unabhängig sind. Dann sind auch $1_n, A, A^2$ linear unabhängig. Dies zeigt $\deg \mu_A \geq 3$. Nach Satz 10.52 ist A nicht diagonalisierbar.

Bemerkung 10.54. Zerfällt χ_A in Linearfaktoren, so hat man Zerlegungen $\chi_A = (X-\lambda_1)^{m_1}\dots(X-\lambda_k)^{m_k}$ und $\mu_A = (X-\lambda_1)^{l_1}\dots(X-\lambda_k)^{l_k}$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1,\dots,\lambda_k$. Nach Satz 10.50 gilt $l_1,\dots,l_k \geq 1$. Da die algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts höchstens n beträgt, folgt $\chi_A \mid \mu_A^n$. Der folgende Satz liefert diese Aussage ohne Voraussetzung.

Satz 10.55. *Für $A \in K^{n\times n}$ gilt $\chi_A \mid \mu_A^n$.*

Beweis. Sei $\mu_A = \sum a_k X^k$. Für $k \geq 1$ ist

$$(X^k 1_n - A^k) = (X1_n - A)\sum_{i=1}^{k} X^{k-i}A^{i-1}.$$

Es folgt

$$\mu_A 1_n = \mu_A 1_n - \mu_A(A) = \sum_{k\geq 1} a_k(X^k 1_n - A^k) = (X1_n - A)B$$

für ein $B \in K[X]^{n\times n}$. Bildet man auf beiden Seiten die Determinante, so ergibt sich $\mu_A^n = \chi_A \det(B)$. □

11 Euklidische Geometrie

11.1 Skalarprodukte

Bemerkung 11.1. Wir betrachten in diesem Kapitel $K = \mathbb{R}$. Im Gegensatz zu beliebigen Körpern kann man $\mathbb{R}$ in positive und negative Zahlen unterteilen. Für $x \in \mathbb{R}$ sei wie üblich

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

der *Betrag* von x. Wir benutzen außerdem, dass jede nicht-negative reelle Zahl genau eine positive Quadratwurzel besitzt. Es gilt also $|x| = \sqrt{x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Definition 11.2. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

- Eine Abbildung $V \times V \to \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto [v, w]$ heißt *Skalarprodukt*[1], falls folgende Bedingungen für alle $u, v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten:
  - $[v, v] \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $v = 0$ (*positiv definit*),
  - $[v, w] = [w, v]$ (*symmetrisch*),
  - $[\lambda u + v, w] = \lambda[u, w] + [v, w]$ (*bilinear*).

  Zusammen mit einem Skalarprodukt wird V ein *euklidischer Raum*.
- Vektoren $v, w \in V$ heißen *orthogonal*, falls $[v, w] = 0$. Ggf. schreibt man $v \perp w$.
- Man nennt $|v| := \sqrt{[v, v]} \geq 0$ die *Norm* von v.[2] Im Fall $|v| = 1$ nennt man v *normiert*.

Bemerkung 11.3.

(a) Die Symmetrie des Skalarprodukts zeigt

$$[u, \lambda v + w] = [\lambda v + w, u] = \lambda[v, u] + [w, u] = \lambda[u, v] + [u, w]$$

für alle $u, v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Für ein festes $x \in V$ sind also die Abbildungen $V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto [v, x]$ und $V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto [x, v]$ linear (dies erklärt den Begriff *bilinear*). Insbesondere ist $[v, 0] = 0 = [0, v]$ für alle $v \in V$. Dennoch ist die Abbildung $V \times V \to \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto [v, w]$ (für $V \neq \{0\}$) *nicht* linear, also kein Funktional, denn $[v, v] > 0 = [0, v] + [v, 0]$ für $v \neq 0$.

[1] Die Schreibweise $[v, w]$ ist in der Literatur nicht einheitlich. Man findet auch $\langle v, w \rangle$ (Verwechslung mit Spann), $(v \mid w)$ und ähnliche.

[2] In allgemeinerem Kontext (Definition 18.48) benutzen wir $\|v\|$ anstatt $|v|$.

(b) Für $v, w \in V$ gilt

$$|v \pm w|^2 = [v, v] \pm 2[v, w] + [w, w] = |v|^2 \pm 2[v, w] + |w|^2.$$

Insbesondere gilt die *Parallelogrammgleichung*

$$|v + w|^2 + |v - w|^2 = 2|v|^2 + 2|w|^2.$$

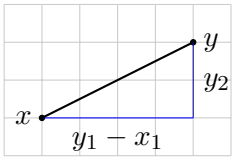
(c) Jeder Unterraum eines euklidischen Raums ist selbst ein euklidischer Raum mit dem eingeschränkten Skalarprodukt.

Beispiel 11.4.

(a) Das wichtigste Beispiel eines euklidischen Raums ist $V = \mathbb{R}^n$ mit dem *Standardskalarprodukt*

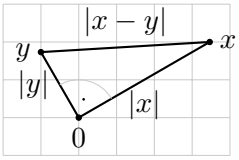
$$\boxed{[x, y] := xy^{\mathrm{t}} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i} \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

Man überprüft leicht die drei Eigenschaften (positiv definit, symmetrisch und bilinear). Im Fall $n = 1$ ist $|x| = \sqrt{x_1^2}$ der gewöhnliche Betrag (dies rechtfertigt die Verwendung der Betragsstriche). Nach dem Satz des Pythagoras[3] entspricht die Norm $|y - x|$ im $\mathbb{R}^2$ dem geometrischen Abstand zwischen x und y:



$$|y - x| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

Sind x und y orthogonal, so erhält man $|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2$ aus Bemerkung 11.3. Nach der Umkehrung vom Satz des Pythagoras bilden x und y einen rechten Winkel, d. h. sie stehen senkrecht aufeinander:



(b) Vektoren in $\mathbb{R}^n$ sind „diskrete“ Funktionen $\{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$. In der Analysis betrachtet man eine „kontinuierliche“ Variante: Die stetigen Abbildungen $[0, 1] \to \mathbb{R}$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ bilden einen (unendlich-dimensionalen) Unterraum $V \leq \mathrm{Abb}([0, 1], \mathbb{R})$ mit Skalarprodukt

$$[f, g] := \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \qquad (f, g \in V).$$

Lemma 11.5. *Sei V ein euklidischer Raum, $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) $|\lambda v| = |\lambda||v|$ (Homogenität).

(b) $|[v, w]| \leq |v||w|$ *mit Gleichheit genau dann, wenn v und w linear abhängig sind* (Cauchy-Schwarz-Ungleichung).

[3] Man könnte auch den Abstand zwischen x und y durch $|y - x|$ *definieren* und damit den Satz des Pythagoras *beweisen*.

(c) $||v| - |w|| \leq |v + w| \leq |v| + |w|$ (Dreiecksungleichung).

Beweis.

(a) $|\lambda v| = \sqrt{[\lambda v, \lambda v]} = \sqrt{\lambda^2 [v, v]} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{[v, v]} = |\lambda||v|$.

(b) O. B. d. A. sei $w \neq 0$. Sei $\lambda := \frac{[v,w]}{[w,w]}$. Nach den Eigenschaften des Skalarprodukts gilt

$$0 \leq |v - \lambda w|^2 = [v - \lambda w, v - \lambda w] = [v, v] - 2\lambda[v, w] + \lambda^2 [w, w] = |v|^2 - \frac{[v, w]^2}{|w|^2}.$$

Es folgt $[v, w]^2 \leq |v|^2 |w|^2$ und $|[v, w]| \leq |v||w|$. Gleichheit impliziert $v = \lambda w$, d. h. v und w sind linear abhängig. Sind umgekehrt v und w linear abhängig gegeben, dann existiert ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $v = \mu w$ und $|[v, w]| = |\mu||w|^2 \overset{\text{(a)}}{=} |\mu w||w| = |v||w|$.

(c) Zunächst ist

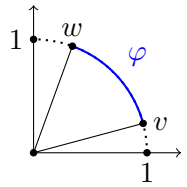
$$|v + w|^2 = [v + w, v + w] = [v, v] + 2[v, w] + [w, w] \overset{\text{(b)}}{\leq} |v|^2 + 2|v||w| + |w|^2 = (|v| + |w|)^2$$

und $|v + w| \leq |v| + |w|$. Daraus folgt $|v| = |v + w - w| \leq |v + w| + |w|$ und $|v| - |w| \leq |v + w|$. Vertauschen von v und w liefert $-(|v| - |w|) = |w| - |v| \leq |v + w|$, also $||v| - |w|| \leq |v + w|$. □

Bemerkung 11.6.

(a) Sind $v, w \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig, so bilden 0, v und $v + w$ ein Dreieck mit Seiten $|v|$, $|w|$ und $|v + w|$. Die Dreiecksungleichung besagt, dass die Summe von je zwei Seiten größer ist als die dritte Seite (der obige Beweis zeigt, dass Gleichheit nicht eintreten kann).

(b) Für normierte $v, w \in \mathbb{R}^n$ definiert man den *Winkel* φ (im Bogenmaß[4]) als die Länge des kürzesten Bogens auf dem Einheitskreis[5] zwischen v und w:



Die Länge des Halbkreisbogens (der größtmögliche Winkel) nennt man π und berechnet $\pi \approx 3.14$ (Aufgabe II.11).

(c) Der *Kosinus* von φ wird durch $\cos\varphi := [v, w]$ definiert.[6] Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung impliziert $-1 \leq \cos\varphi \leq 1$. Da v und $-w$ den Winkel $\pi - \varphi$ bilden, gilt $\cos(\pi - \varphi) = -[v, w] = -\cos\varphi$. Speziell gilt

$$\cos 0 = [e_1, e_1] = 1, \ \cos(\pi/2) = [e_1, e_2] = 0, \ \cos\pi = [e_1, -e_1] = -1.$$

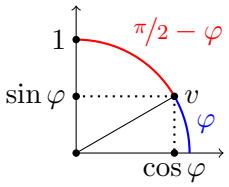
Durch $\cos(-\varphi) := \cos(\varphi)$ und $\cos(\varphi + 2k\pi) := \cos\varphi$ für $k \in \mathbb{Z}$ setzt sich cos periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort.

[4] Die Verwendung des *Gradmaß* mit $\pi \mathrel{\hat{=}} 180°$ bringt in der Mathematik keine Vorteile.
[5] in der Ebene $\langle v, w \rangle$
[6] Man kann zeigen, dass diese Definition nicht von der Wahl von v, w abhängt und mit der analytischen Definition als Potenzreihe übereinstimmt.

(d) Die „verschobene“ Funktion

$$\sin\varphi := \cos(\varphi - \pi/2) = \cos(\pi/2 - \varphi)$$

für $\varphi \in \mathbb{R}$ nennt man den *Sinus* von φ. Für einen normierten Vektor $v = (x, y)$ mit $y \geq 0$ gilt $x = [e_1, v] = \cos\varphi$ und $y = [e_2, v] = \cos(\pi/2 - \varphi) = \sin\varphi$:



11.2 Orthonormalbasen

Definition 11.7. Sei V ein n-dimensionaler euklidischer Raum. Vektoren $b_1, \ldots, b_n$ bilden eine *Orthonormalbasis* von V, falls sie normiert und paarweise orthogonal sind, d. h. $[b_i, b_j] = \delta_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq n$.

Bemerkung 11.8. Eine Orthonormalbasis $b_1, \ldots, b_n$ von V ist tatsächlich eine Basis. Dafür genügt es, die lineare Unabhängigkeit zu prüfen. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$. Dann gilt

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j [b_j, b_i] = \Big[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j, b_i\Big] = [0, b_i] = 0$$

für $i = 1, \ldots, n$.

Beispiel 11.9. Die Standardbasis $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ ist eine Orthonormalbasis bzgl. des Standardskalarprodukts. Jede Permutation einer Orthonormalbasis ist wieder eine Orthonormalbasis.

Satz 11.10 (Gram-Schmidt-Verfahren)**.** *Seien $v_1, \ldots, v_k \in V$ linear unabhängig. Wir definieren rekursiv:*

$$\boxed{b_s := v_s - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{[v_s, b_i]}{[b_i, b_i]} b_i} \qquad (s = 1, \ldots, k).$$

Dann sind $b_1, \ldots, b_k$ paarweise orthogonal mit $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle = \langle b_1, \ldots, b_k\rangle$. Folglich ist $\frac{1}{|b_1|} b_1, \ldots, \frac{1}{|b_k|} b_k$ eine Orthonormalbasis von $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$.

Beweis. Induktion nach k: Für $k = 1$ ist $b_1 = v_1 \neq 0$. Sei nun $k \geq 2$ und die Behauptung für $k - 1$ bereits bewiesen, d. h. $\langle v_1, \ldots, v_{k-1}\rangle = \langle b_1, \ldots, b_{k-1}\rangle$ und $[b_i, b_j] = 0$ für $1 \leq i < j \leq k-1$. Insbesondere sind $b_1, \ldots, b_{k-1}$ linear unabhängig. Wegen $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{[v_k, b_i]}{[b_i, b_i]} b_i \in \langle b_1, \ldots, b_{k-1}\rangle$ gilt

$$\langle v_1, \ldots, v_k\rangle = \langle b_1, \ldots, b_{k-1}, v_k\rangle = \langle b_1, \ldots, b_k\rangle.$$

Für $i = 1, \ldots, k-1$ ist außerdem

$$[b_k, b_i] = [v_k, b_i] - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{[v_k, b_j]}{[b_j, b_j]} [b_j, b_i] = [v_k, b_i] - [v_k, b_i] = 0.$$

Damit ist die erste Behauptung bewiesen. Wegen $|\frac{1}{|b_i|} b_i| = \frac{1}{|b_i|} |b_i| = 1$ folgt die zweite Behauptung. □

Folgerung 11.11. *Jeder euklidische Raum besitzt (mindestens) eine Orthonormalbasis.*

Beweis. Man wende das Gram-Schmidt-Verfahren auf eine beliebige Basis an. □

Beispiel 11.12. Seien $v_1 := (1,0,1)$, $v_2 := (0,1,1)$ und $v_3 := (-1,2,0)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^3$. Bezüglich des Standardskalarprodukts erhält man

$$\begin{aligned}
b_1 &:= v_1 = (1,0,1),\\
b_2 &:= v_2 - \frac{[v_2,b_1]}{[b_1,b_1]}b_1 = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,0,1) = \frac{1}{2}(-1,2,1),\\
b_3 &:= v_3 - \frac{[v_3,b_1]}{[b_1,b_1]}b_1 - \frac{[v_3,b_2]}{[b_2,b_2]}b_2 = (-1,2,0) + \frac{1}{2}(1,0,1) - \frac{5}{6}(-1,2,1) = \frac{1}{3}(1,1,-1).
\end{aligned}$$

Man beachte, dass Skalierungsfaktoren in dieser Rechnung keine Rolle spielen. Man kann b_3 also etwas bequemer mit $b_2 = (-1,2,1)$ ausrechnen. Nach Normierung ist $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Um die Einträge der Vektoren zu minimieren, kann es nützlich sein, zuerst den Gauß-Algorithmus anzuwenden, bevor man das Gram-Schmidt-Verfahren startet. In diesem Beispiel würde man am Ende die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ erhalten.

Definition 11.13. Sei V ein euklidischer Raum und $S \subseteq V$. Dann nennt man

$$S^\perp := \{v \in V : \forall s \in S : s \perp v\}$$

das *orthogonale Komplement* von S in V. Im Fall $S = \{s\}$ schreibt man $s^\perp := S^\perp$.

Bemerkung 11.14. Für $v, w \in S^\perp$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $[\lambda v + w, s] = \lambda[v,s] + [w,s] = 0$ für alle $s \in S$, d. h. $\lambda v + w \in S^\perp$. Daher ist $S^\perp$ ein Unterraum, selbst wenn S kein Unterraum ist. Außerdem gilt $S^\perp = \langle S\rangle^\perp$.

Lemma 11.15. *Für Unterräume U, W eines euklidischen Raums V gilt*

(a) $V = U \oplus U^\perp$ *und* $\dim V = \dim(U) + \dim(U^\perp)$.

(b) $(U^\perp)^\perp = U$.

(c) $U \subseteq W \iff W^\perp \subseteq U^\perp$.

Beweis.

(a) Für $v \in U \cap U^\perp$ gilt $|v|^2 = [v,v] = 0$ und $v = 0$. Also ist $U \cap U^\perp = \{0\}$ und $U + U^\perp = U \oplus U^\perp$. Wir können eine Basis $v_1, \ldots, v_k$ von U zu einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V ergänzen. Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert eine Orthonormalbasis $b_1, \ldots, b_n$ von V mit $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle = \langle b_1, \ldots, b_k\rangle$. Daher ist $b_{k+1}, \ldots, b_n \in U^\perp$ und $V = U \oplus U^\perp$.

(b) Nach Definition ist $U \subseteq (U^\perp)^\perp$. Nach (a) ist $\dim(U^\perp)^\perp = \dim(V) - \dim(U^\perp) = \dim U$. Also ist $U = (U^\perp)^\perp$.

(c) Nach Definition gilt

$$U \subseteq W \implies W^\perp \subseteq U^\perp \overset{\text{(b)}}{\implies} U = (U^\perp)^\perp \subseteq (W^\perp)^\perp = W.$$ □

Beispiel 11.16.

(a) In $V = \mathbb{R}^n$ lässt sich das orthogonale Komplement von $U \leq V$ bzgl. des Standardskalarprodukts mit dem Gauß-Algorithmus bestimmen: Man schreibt die Vektoren eines Erzeugendensystems von U als Zeilen in eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Jetzt ist $U^\perp$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = 0$.

(b) Für linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ sei $\langle v_1, \ldots, v_{n-1}\rangle^\perp = \langle w\rangle$. Wir bestimmen eine explizite Formel für die Koordinaten von w. Sei A die Matrix mit Zeilen $w, v_1, \ldots, v_{n-1}$. Dann ist $Aw = |w|^2 e_1$. Cramers Regel und Laplace-Entwicklung nach der i-ten Spalte zeigt

$$w_i = \frac{\det A_i}{\det A} = (-1)^{i+1}|w|^2 \frac{\det A_{1i}}{\det A}$$

für $i = 1, \ldots, n$. Skaliert man w mit dem Faktor $\frac{\det A}{|w|^2}$, so vereinfacht sich die Gleichung zu $w_i = (-1)^{i+1} \det(A_{1i})$, worin A_{1i} nicht von w abhängt. Dieses w nennt man das *Vektorprodukt* von $v_1, \ldots, v_{n-1}$ und schreibt $w = v_1 \times \ldots \times v_{n-1}$. Für linear abhängige Vektoren sei $v_1 \times \ldots \times v_{n-1} = 0$ in Übereinstimmung mit $\det A_{1i} = 0$. Im Fall $n = 2$ erhält man $(x, y)^\perp = \langle (y, -x)\rangle$. Im Fall $n = 3$ spricht man vom *Kreuzprodukt*. Hier gilt

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Die Richtung von $a \times b$ lässt sich mit der *Rechte-Hand-Regel* bestimmen: Zeigt der Daumen in Richtung a und der Zeigefinger in Richtung b, so zeigt der Mittelfinger in Richtung $a \times b$ der rechten Hand (Aufgabe II.12).

11.3 Symmetrische und orthogonale Abbildungen

Definition 11.17. Sei V ein euklidischer Raum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Man nennt f

- *symmetrisch*,[7] falls $[f(v), w] = [v, f(w)]$ für alle $v, w \in V$.
- *orthogonal*,[8] falls $[f(v), f(w)] = [v, w]$ für alle $v, w \in V$.

Bemerkung 11.18.

(a) Die Nullabbildung ist symmetrisch. Sind $f, g \in \mathrm{End}(V)$ symmetrisch und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist offenbar auch $\lambda f + g$ symmetrisch. Die symmetrischen Abbildungen bilden also einen Unterraum von $\mathrm{End}(V)$.

(b) Orthogonale Abbildungen $f \in \mathrm{End}(V)$ sind Isomorphismen, denn aus $v \in \operatorname{Ker} f$ folgt $|v|^2 = [v, v] = [f(v), f(v)] = 0$, also $v = 0$. Wegen $|f(v - w)| = |v - w|$ und

$$\frac{[f(v), f(w)]}{|f(v)||f(w)|} = \frac{[v, w]}{|v||w|}$$

erhält f Abstände und Winkel (Bemerkung 11.6). Insbesondere bildet f Orthonormalbasen auf Orthonormalbasen ab. Mit f, g sind auch $f \circ g$ und f^{-1} orthogonal. Die Menge der orthogonalen Abbildungen bildet daher eine Untergruppe $\mathrm{O}(V)$ von $\mathrm{GL}(V)$. Man nennt $\mathrm{O}(V)$ die *orthogonale Gruppe* von V.

[7] oder *selbstadjungiert*, siehe Abschnitt 13.2
[8] oder *isometrisch*

(c) Für einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von $f \in \mathrm{O}(V)$ mit Eigenvektor v gilt $|\lambda||v| = |\lambda v| = |f(v)| = |v|$, d. h. $\lambda = \pm 1$.

(d) Der folgende Satz besagt, dass sich abstandserhaltende Abbildungen als Komposition einer Translation und einer orthogonalen Abbildung schreiben lassen (vgl. Aufgabe I.25).

Satz 11.19 (Mazur-Ulam). *Sei V ein euklidischer Raum und $f \in \mathrm{Abb}(V, V)$ mit $|f(v) - f(w)| = |v - w|$ für alle $v, w \in V$. Dann existieren $x \in V$ und $g \in \mathrm{O}(V)$ mit $f(v) = g(v) + x$ für alle $v \in V$.*

Beweis. Sei $x := f(0)$ und $g(v) := f(v) - x$ für $v \in V$. Dann ist $g(0) = 0$ und $|g(v) - g(w)| = |f(v) - f(w)| = |v - w|$. Es folgt $|g(v)| = |g(v) - g(0)| = |v|$ und

$$[g(v), g(w)] = \frac{1}{2}\big(|g(v)|^2 + |g(w)|^2 - |g(v) - g(w)|^2\big) = \frac{1}{2}\big(|v|^2 + |w|^2 - |v - w|^2\big) = [v, w].$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |g(v + w) - g(v) - g(w)|^2 &= |g(v + w)|^2 - 2[g(v + w), g(v)] \pm \ldots = |v + w|^2 - 2[v + w, v] \pm \ldots \\ &= |v + w - v - w|^2 = 0 \end{aligned}$$

und analog $|g(\lambda v) - \lambda g(v)| = |\lambda v - \lambda v| = 0$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Lemma 11.20. *Sei V euklidisch mit Orthonormalbasis B, $f \in \mathrm{End}(V)$ und $A := {}_B[f]_B$. Dann gilt:*

(a) f symmetrisch $\iff$ $A^{\mathrm{t}} = A$.

(b) f orthogonal $\iff$ $A^{\mathrm{t}} = A^{-1}$.

Beweis. Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ und $A = (a_{ij})$. Dann ist $f(b_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} b_j$ für $i = 1, \ldots, n$.

(a) Ist f symmetrisch, so gilt $a_{ji} = [f(b_i), b_j] = [b_i, f(b_j)] = a_{ij}$ für $1 \le i, j \le n$. Also ist $A = A^{\mathrm{t}}$. Sei umgekehrt $A = A^{\mathrm{t}}$. Dann folgt $[f(b_i), b_j] = [b_i, f(b_j)]$ für $1 \le i, j \le n$. Für beliebige $v = \sum \lambda_i b_i$ und $w = \sum \mu_j b_j$ in V gilt

$$[f(v), w] = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j [f(b_i), b_j] = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j [b_i, f(b_j)] = [v, f(w)].$$

Also ist f symmetrisch.

(b) Ist f orthogonal, so gilt

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \Big[\sum_{k=1}^n a_{ki} b_k, \sum_{k=1}^n a_{kj} b_k\Big] = [f(b_i), f(b_j)] = [b_i, b_j] = \delta_{ij}.$$

Dies zeigt $A^{\mathrm{t}} A = 1_n$ und $A^{\mathrm{t}} = A^{-1}$. Ist umgekehrt $A^{\mathrm{t}} A = 1_n$, so gilt $[f(b_i), f(b_j)] = \delta_{ij} = [b_i, b_j]$. Wie in (a) folgt $[f(v), f(w)] = [v, w]$ für alle $v, w \in V$, d. h. f ist orthogonal. □

Bemerkung 11.21.

(a) Für einen beliebigen Körper K nennt man Matrizen $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ *orthogonal*, falls $A^{\mathrm{t}} = A^{-1}$. Man zeigt leicht, dass die orthogonalen Matrizen eine Untergruppe $\mathrm{O}(n, K)$ von $\mathrm{GL}(n, K)$ bilden. Wie üblich entspricht $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ der Gruppe $\mathrm{O}(V)$ durch Wahl einer Orthonormalbasis (so wie sich $\mathrm{GL}(n, K)$ und $\mathrm{GL}(V)$ entsprechen). Für jede orthogonale Matrix A gilt

$$\det(A)^2 \overset{9.12}{=} \det(A)\det(A^{\mathrm{t}}) = \det(AA^{\mathrm{t}}) = \det 1_n = 1$$

und $\det A = \pm 1$. Man nennt

$$\mathrm{SO}(n, K) := \mathrm{O}(n, K) \cap \mathrm{SL}(n, K) \leq \mathrm{O}(n, K) \leq \mathrm{GL}(n, K)$$

die *spezielle orthogonale Gruppe* vom Grad n über K.

(b) Die Gleichung $A^{\mathrm{t}}A = 1_n = AA^{\mathrm{t}}$ bedeutet für reelle Matrizen, dass die Spalten (bzw. Zeilen) von A eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bzgl. des Standardskalarprodukts bilden.

Beispiel 11.22.

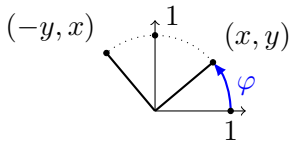
(a) Jede Permutationsmatrix ist orthogonal, denn die Zeilen bilden eine Orthonormalbasis (nämlich eine Permutation der Standardbasis).

(b) Für $A \in \mathrm{O}(2, \mathbb{R})$ gilt

$$A = \begin{pmatrix} x & \mp y \\ y & \pm x \end{pmatrix}$$

mit $x^2 + y^2 = 1 = \pm \det(A)$ (vgl. Beispiel 11.16).

- Im Fall $\det A = 1$ beschreibt A eine *Drehung* um den *orientierten* Winkel φ von e_1 nach (x, y) gegen den Uhrzeigersinn:



Im Fall $y < 0$ gilt $\varphi = 2\pi - \varphi'$ mit dem unorientierten Winkel φ'. Man erhält $\cos\varphi = \cos\varphi'$, $\sin\varphi = -\sin\varphi'$ und

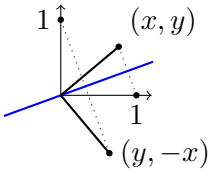
$$A = D(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Für zwei orientierte Winkel φ und ψ erhält man $D(\varphi+\psi) = D(\varphi)D(\psi)$, woraus die bekannten *Additionstheoreme* folgen:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \psi) &= \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi), \\ \sin(\varphi + \psi) &= \sin(\varphi)\cos(\psi) + \sin(\psi)\cos(\varphi). \end{aligned}$$

Offenbar besitzt $D(\varphi)$ nur dann (reelle) Eigenwerte, wenn $\varphi \in \{0, \pi\}$, d. h. $D(0) = 1_2$ und $D(\pi) = -1_2$.

- Im Fall $\det A = -1$ beschreibt A eine *Spiegelung* an der Winkelhalbierenden zwischen e_1 und (x, y):



Es gilt dann

$$A = S(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Die Spiegelachse wird von einem Eigenvektor zum Eigenwert 1 aufgespannt. Orthogonal dazu steht ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 (beachte: $\det A$ ist das Produkt der Eigenwerte). Nach Folgerung 8.12 ist $S(\varphi)$ diagonalisierbar. Tatsächlich ist

$$D(\varphi/2)^{-1} S(\varphi) D(\varphi/2) = D(-\varphi/2) S(\varphi) D(\varphi/2) = S(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für spezielle Winkel erhält man (vgl. Aufgabe II.10):

φ	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$D(\varphi)$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	-1_2
$S(\varphi)$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Damit lässt sich auch

$$D(\pi/12) = D(\pi/3 - \pi/4) = D(\pi/3) D(\pi/4)^{-1} = D(\pi/3) D(\pi/4)^{\mathrm{t}}$$

berechnen.

Bemerkung 11.23. Um zu zeigen, dass symmetrische Endomorphismen diagonalisierbar sind, müssen wir die reellen Zahlen vorübergehend verlassen.

11.4 Komplexe Zahlen

Lemma 11.24. *Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ wird durch die Multiplikation*

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd,\ ad + bc) \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

zu einem Körper.

Beweis. Als Vektorraum ist $(\mathbb{C}, +)$ bereits eine abelsche Gruppe. Die Multiplikation in $\mathbb{C}$ führen wir auf die Matrizenmultiplikation zurück.[9] Dafür betrachten wir die injektive Abbildung

$$\Gamma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad z = (a, b) \mapsto \Gamma(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

[9] Man kann die Axiome auch direkt mit der Definition nachrechnen.

Für $x, y, z \in \mathbb{C}$ gilt $\Gamma(x)+\Gamma(y) = \Gamma(x+y)$ und $\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x\cdot y)$ (nachrechnen). Aus Lemma 5.8 folgt

$$\Gamma(x(yz)) = \Gamma(x)\Gamma(yz) = \Gamma(x)(\Gamma(y)\Gamma(z)) = (\Gamma(x)\Gamma(y))\Gamma(z) = \Gamma(xy)\Gamma(z) = \Gamma((xy)z)$$

und $x(yz) = (xy)z$, da Γ injektiv ist. Analog beweist man das Distributivgesetz. Das Kommutativgesetz verifiziert man eher mit der Definition (da Matrizen im Allgemeinen nicht kommutativ sind). Wegen $\Gamma(1,0) = 1_2$ ist $(1,0)$ das Einselement in $\mathbb{C}$. Es bleibt zu zeigen, dass $z \neq 0$ invertierbar ist. Es gilt $\det(\Gamma(z)) = a^2 + b^2 > 0$ und

$$\Gamma(z)^{-1} \overset{9.23}{=} \frac{1}{\det(\Gamma(z))}\widetilde{\Gamma(z)} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \Gamma\Big(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\Big). \qquad \square$$

Definition 11.25. Man nennt $\mathbb{C}$ den Körper der *komplexen Zahlen*.

- Mittels der Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $a \mapsto (a,0)$ werden wir $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen. Die Verknüpfungen in $\mathbb{R}$ entsprechen genau denen in $\mathbb{C}$ mit den gleichen neutralen Elementen.
- Man nennt $\mathrm{i} := (0,1) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ die *imaginäre Einheit*. Es gilt $\mathrm{i}^2 = (-1,0) = -1$. Da $1, \mathrm{i}$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$ bilden, lässt sich jede komplexe Zahl eindeutig in der Form $z = a + b\mathrm{i}$ schreiben, wobei $\mathrm{Re}(z) := a \in \mathbb{R}$ der *Realteil* und $\mathrm{Im}(z) := b \in \mathbb{R}$ der *Imaginärteil* von z sind.
- Man nennt $|z| := \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \geq 0$ den *Betrag* von z (dies entspricht der Norm in $\mathbb{R}^2$).

Bemerkung 11.26. Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{C}$ kein *angeordneter* Körper, d. h. es gibt keine totale Ordnungsrelation $\leq$ auf $\mathbb{C}$ mit

$$\begin{aligned} a \leq b &\implies a + c \leq b + c, \\ a, b \geq 0 &\implies ab \geq 0 \end{aligned}$$

für alle $a, b, c \in \mathbb{C}$. Denn wäre $\mathrm{i} > 0$, so ist $-1 = \mathrm{i}^2 > 0$ und $1 = (-1)^2 > 0$. Dann erhält man den Widerspruch $0 = 1 - 1 > 0 + 0 = 0$. Ist hingegen $\mathrm{i} < 0$, so wäre $0 = \mathrm{i} - \mathrm{i} < -\mathrm{i}$ und $-1 = (-\mathrm{i})^2 > 0$. Dies führt zum selben Widerspruch.

Lemma 11.27. *Für $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ existieren paarweise verschiedene n-te Wurzeln $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \mathbb{C}$ mit $\zeta_1^n = \ldots = \zeta_n^n = z$.*

Beweis. Sei $z_0 := \frac{1}{|z|}z \in \mathbb{C}$ und $\Gamma(z_0) = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ wie im Beweis von Lemma 11.24. Wegen $a^2 + b^2 = |z_0|^2 = 1$ ist $\Gamma(z_0) = D(\varphi) \in \mathrm{O}(2,\mathbb{R})$ für einen orientierten Winkel φ mit $a = \cos\varphi$ und $b = \sin\varphi$. Wir definieren $\varphi_k := \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$ für $k = 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$D(\varphi_k)^n = D(n\varphi_k) = D(\varphi + 2k\pi) = D(\varphi) = \Gamma(z_0).$$

Die Zahlen $z_k := \cos\varphi_k + \mathrm{i}\sin\varphi_k \in \mathbb{C}$ erfüllen also $z_k^n = z_0$. Wegen $|z| > 0$ existiert $\sqrt[n]{|z|} \in \mathbb{R}_{>0}$ (Analysis). Für $\zeta_k := \sqrt[n]{|z|}z_k$ erhält man $\zeta_k^n = |z|z_0 = z$ für $k = 1, \ldots, n$. Sei nun $\zeta_k = \zeta_l$ für $1 \leq k \leq l \leq n$. Dann unterscheiden sich φ_k und φ_l nur um ein Vielfaches von 2π. Dies zeigt $2\pi(l-k) = 2\pi cn$ für ein $c \in \mathbb{N}_0$. Aus $0 \leq l - k < n$ folgt $k = l$. Daher sind die n-ten Wurzeln $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ paarweise verschieden. $\square$

Beispiel 11.28. Die (n-ten) Wurzeln aus 1 nennt man *Einheitswurzeln*. Sie entsprechen Drehungen um $2\pi k/n$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Die vierten Einheitswurzeln sind 1, i, -1, $-\mathrm{i}$.

Folgerung 11.29. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $k \geq 2$ mit $A^k = A$. Dann ist A diagonalisierbar.*

Beweis. Das Minimalpolynom μ_A teilt $X^k - X = X(X^{k-1} - 1)$ nach Lemma 10.44. Die Nullstellen von $X^k - X$ sind die $(k-1)$-ten Einheitswurzeln und 0. Nach Lemma 10.24 zerfällt μ_A in paarweise verschiedene Linearfaktoren. Die Behauptung folgt aus Satz 10.52. □

Beispiel 11.30. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $A := D(2\pi/k)$. Wegen $A^{k+1} = AA^k = AD(2\pi) = A$ ist A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, aber nicht unbedingt über $\mathbb{R}$.

Definition 11.31. Die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $a + b\mathrm{i} \mapsto a - b\mathrm{i} =: \overline{a + b\mathrm{i}}$ heißt *komplexe Konjugation*.

Lemma 11.32. *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $|z|^2 = z\overline{z}$, $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.*

Beweis. Für $z = a + b\mathrm{i}$ und $w = c + d\mathrm{i}$ gilt

$$\begin{aligned} |z|^2 &= a^2 + b^2 = (a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i}) = z\overline{z}, \\ \overline{z + w} &= a + c - (b + d)\mathrm{i} = a - b\mathrm{i} + c - d\mathrm{i} = \overline{z} + \overline{w}, \\ \overline{zw} &= ac - bd - (ad + bc)\mathrm{i} = (a - b\mathrm{i})(c - d\mathrm{i}) = \overline{z} \cdot \overline{w}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 11.33.

(a) Für Matrizen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times m}$ definieren wir $\overline{A} := (\overline{a_{ij}}) \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Für $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times k}$ gilt

$$\overline{AB} = \Big(\overline{\sum_{l=1}^{m} a_{il}b_{lj}}\Big)_{ij} \overset{11.32}{=} \Big(\sum_{l=1}^{m} \overline{a_{il}b_{lj}}\Big)_{ij} \overset{11.32}{=} \Big(\sum_{l=1}^{m} \overline{a_{il}}\,\overline{b_{lj}}\Big)_{ij} = \overline{A} \cdot \overline{B}.$$

(b) Nach Lemma 11.27 hat das Polynom $X^n - z$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle (insbesondere ist i eine Nullstelle von $X^2 + 1$).

Satz 11.34 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jedes Polynom $\alpha \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}$ besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*[10]

Beweis. Der Beweis benutzt Analysis (genauer die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$) und ist für diese Vorlesung zu schwierig. Siehe Algebra-Skript. □

Folgerung 11.35. *Jedes normierte Polynom $\alpha \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}$ zerfällt in Linearfaktoren.*[11]

Beweis. Induktion nach $d := \deg \alpha \geq 1$. Im Fall $d = 1$ ist α selbst ein Linearfaktor, da α normiert ist. Sei nun $d \geq 2$. Nach dem Fundamentalsatz besitzt α eine Nullstelle $x \in \mathbb{C}$. Nach Lemma 10.22 existiert ein $\beta \in \mathbb{C}[X]$ mit $\alpha = (X - x)\beta$ und $\deg \beta = d - 1$. Da α normiert ist, muss auch β normiert sein. Nach Induktion zerfällt β in Linearfaktoren und damit auch α. □

[10] Man sagt: $\mathbb{C}$ ist *algebraisch abgeschlossen*.
[11] vgl. Satz 15.39

Beispiel 11.36. Sei $\alpha \in \mathbb{R}[X]$ mit ungeradem Grad. Um zu zeigen, dass α eine Nullstelle hat, können wir annehmen, dass α normiert ist. Dann gilt $\lim_{x\to\pm\infty} \alpha(x) = \pm\infty$. Nach dem Zwischenwertsatz der Analysis besitzt die stetige Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \alpha(x)$ eine reelle Nullstelle. In der Praxis lässt sich eine solche Nullstelle allerdings nur näherungsweise berechnen. Sei konkret $\alpha := X^5 - 4X + 2$. Anhand des Graphen von α vermuten wir eine Nullstelle in der Nähe von $x_0 := 0.5$. Sei $\alpha' = 5X^4 - 4$ die Ableitung von α (Analysis). Beim *Newton-Verfahren* berechnet man die rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} := x_n - \frac{\alpha(x_n)}{\alpha'(x_n)} \qquad (n \geq 0),$$

also $x_1 = 0.50847\ldots$, $x_2 = 0.50849948\ldots$ usw. Ist x_0 (so wie hier) „gut“ gewählt, so konvergiert die Folge $(x_n)_n$ quadratisch gegen eine Nullstelle, d. h. mit jeder Iteration verdoppelt sich die Anzahl der korrekten Nachkommastellen (vgl. Aufgabe III.2). Tatsächlich sind bereits alle angegebenen Dezimalstellen von x_2 korrekt.

Bemerkung 11.37. Sei $x \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $\alpha = \sum a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. Wir definieren $\overline{\alpha} := \sum \overline{a_k} X^k \in \mathbb{C}[X]$. Es gilt dann

$$\overline{\alpha}(\overline{x}) = \sum \overline{a_k x^k} = \overline{\alpha(x)} = \overline{0} = 0,$$

d. h. $\overline{x}$ ist eine Nullstelle von $\overline{\alpha}$. Im Fall $\alpha \in \mathbb{R}[X]$ gilt also: $\alpha(x) = 0 \iff \alpha(\overline{x}) = 0$. Für $x \notin \mathbb{R}$ ist dann

$$(X - x)(X - \overline{x}) = X^2 - (x + \overline{x})X + x\overline{x} = X^2 - 2\mathrm{Re}(x)X + |x|^2 \in \mathbb{R}[X]$$

ein Teiler von α.

11.5 Der Hauptachsensatz

Satz 11.38 (Hauptachsensatz)**.** *Sei V ein euklidischer Raum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Genau dann ist f symmetrisch, wenn V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f besitzt. Insbesondere sind symmetrische Endomorphismen diagonalisierbar.*

Beweis. Sei B eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f. Dann ist ${}_B[f]_B$ eine Diagonalmatrix und daher symmetrisch. Nach Lemma 11.20 ist f symmetrisch.

Sei nun umgekehrt f symmetrisch. Wir argumentieren durch Induktion nach $n := \dim V$. Im Fall $n = 1$ kann jeder normierte Vektor für eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren verwendet werden. Sei also $n \geq 2$ und die Behauptung für $n - 1$ bereits bewiesen. Sei zunächst B eine beliebige Orthonormalbasis von V. Dann können wir die symmetrische Matrix $A := {}_B[f]_B$ auch als komplexe Matrix auffassen. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt $\chi_A \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}$ eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$. Also ist λ ein Eigenwert von A. Sei $v = (v_1, \ldots, v_n)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ ein entsprechender Eigenvektor. Wegen

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2 = \lambda \overline{v}^{\mathrm{t}} v = \overline{v}^{\mathrm{t}} A v = \overline{v}^{\mathrm{t}} \overline{A}^{\mathrm{t}} v = (\overline{Av})^{\mathrm{t}} v = \overline{\lambda} \overline{v}^{\mathrm{t}} v = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2$$

ist $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$. Nun ist λ auch ein Eigenwert von f und wir können einen entsprechenden Eigenvektor $b_1 \in V$ wählen. Nach Normierung ist $|b_1| = 1$. Für $U := b_1^{\perp}$ gilt $V = \langle b_1 \rangle \oplus U$ nach Lemma 11.15. Für $u \in U$ gilt

$$[f(u), b_1] = [u, f(b_1)] = \lambda [u, b_1] = 0,$$

d. h. $f(u) \in U$. Daher liegt die Einschränkung $g := f_{|U}$ in $\mathrm{End}(U)$. Offenbar ist g auch symmetrisch. Wegen $\dim U = n - 1$ besitzt U nach Induktion eine Orthonormalbasis $b_2, \ldots, b_n \in U$ aus Eigenvektoren

von g. Wegen $f(b_i) = g(b_i)$ sind $b_2, \ldots, b_n$ auch Eigenvektoren von f. Insgesamt ist $b_1, \ldots, b_n$ eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f. □

Folgerung 11.39. *Genau dann ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, wenn eine Matrix $S \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ mit $S^{\mathrm{t}}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ existiert. Ggf. sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A.*

Beweis. Ist $D := S^{\mathrm{t}}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, so gilt

$$A^{\mathrm{t}} = (SDS^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = SD^{\mathrm{t}}S^{\mathrm{t}} = SDS^{\mathrm{t}} = A,$$

d. h. A ist symmetrisch. Für die Umkehrung sei $V := \mathbb{R}^n$ und $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $[f] = A$. Sei A symmetrisch. Nach Lemma 11.20 ist f symmetrisch. Nach dem Hauptachsensatz existiert eine Orthonormalbasis B von V bestehend aus Eigenvektoren von f. Sei E die Standardbasis von V und $S := {}_E\Delta_B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Da die Spalten von S aus den Vektoren von B bestehen, gilt $S \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$. Aus Folgerung 7.27 folgt

$$S^{\mathrm{t}}AS = S^{-1}AS = {}_B[f]_B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ von f. □

Bemerkung 11.40. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ symmetrisch. Seien $v, w \in V$ Eigenvektoren von f zu verschiedenen Eigenwerten λ bzw. μ. Dann gilt $\lambda[v, w] = [f(v), w] = [v, f(w)] = \mu[v, w]$ und es folgt $v \perp w$. Merkregel: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal. Man kann die gesuchte Orthonormalbasis von V also berechnen, indem man das Gram-Schmidt-Verfahren auf jeden Eigenraum anwendet.

Beispiel 11.41. In Beispiel 8.4 hatten wir die Abbildung $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ mit symmetrischer Matrix

$$A := [f] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

untersucht. Es gilt

$$E_1(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad E_4(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(beachte: $\mathrm{tr}\, A = 6 = 1 + 1 + 4$). Das Gram-Schmidt-Verfahren für $E_1(A)$ liefert

$$b_1 := (1, 0, -1), \qquad b_2 := (0, 1, -1) - \frac{1}{2}(1, 0, -1) = \frac{1}{2}(-1, 2, -1).$$

Der Eigenvektor zum Eigenwert 4 muss nur normiert werden. Insgesamt erhält man die Orthonormalbasis $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ aus Eigenvektoren von f. Für die orthogonale Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

gilt $S^{\mathrm{t}}AS = S^{-1}AS = \mathrm{diag}(1, 1, 4)$. Man kann das Ergebnis nutzen, um Wurzeln von Matrizen zu ziehen. Für $\sqrt{A} := S\,\mathrm{diag}(1, 1, 2)S^{\mathrm{t}}$ gilt nämlich

$$\sqrt{A}^2 = S\,\mathrm{diag}(1, 1, 2)S^{\mathrm{t}}S\,\mathrm{diag}(1, 1, 2)S^{\mathrm{t}} = S\,\mathrm{diag}(1, 1, 2)^2S^{\mathrm{t}} = S\,\mathrm{diag}(1, 1, 4)S^{\mathrm{t}} = A.$$

Mehr dazu in Satz 12.46 und Satz 14.42.

Satz 11.42 (Euler)**.** *Sei V ein 3-dimensionaler euklidischer Raum und $f \in \mathrm{O}(V)$. Dann existiert eine Orthonormalbasis B von V und ein Winkel φ mit*

$$ {}_B[f]_B = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & D(\varphi) \end{pmatrix}. $$

Beweis. Da 3 ungerade ist, besitzt χ_f eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$ nach Beispiel 11.36 (oder Bemerkung 11.37). Nach Bemerkung 11.18 ist $\lambda \in \{\pm 1\}$. Sei b_1 ein entsprechender normierter Eigenvektor und $U := b_1^\perp$. Für $u \in U$ gilt

$$ [f(u), b_1] = [f(u), \lambda^2 b_1] = \lambda [f(u), f(b_1)] = \lambda [u, b_1] = 0 $$

und $f(u) \in U$. Daher liegt die Einschränkung $g := f_{|U}$ in $\mathrm{O}(U)$. Für eine Orthonormalbasis $C := \{b_2, b_3\}$ von U ist ${}_C[g]_C \in \mathrm{O}(2, \mathbb{R})$ nach Lemma 11.20. Im Fall $\det g = 1$ ist ${}_C[g]_C = D(\varphi)$ nach Beispiel 11.22 und die Behauptung folgt mit $B := \{b_1, b_2, b_3\}$. Sei nun $\det g = -1$. Nach Beispiel 11.22 ist g eine Spiegelung mit Eigenwerten 1 und -1. Da dies auch Eigenwerte von f sind, können wir λ durch $-\lambda$ ersetzen und b_1 entsprechend wählen. Anschließend ist $\det g = 1$ und die Behauptung folgt wie zuvor. □

Bemerkung 11.43. Die Matrizen in Satz 11.42 mit Determinante 1 (also von der Form $\mathrm{diag}(1, D(\varphi))$) entsprechen Drehungen um den Winkel φ, wobei die Drehachse vom ersten Basisvektor aufgespannt wird. Nach dem Determinantensatz ist die Komposition von Drehungen wieder eine Drehung (im 2-dimensionalen Raum ist dies klar wegen $D(\varphi)D(\psi) = D(\varphi + \psi)$). Achtung: Die orthogonalen Abbildungen mit Determinante -1 sind nicht unbedingt Spiegelungen. Es gibt auch sogenannte *Drehspiegelungen*, d. h. Kompositionen einer Drehung mit einer Spiegelung.

Beispiel 11.44. Während eines Fußballspiels gibt es einen Punkt auf der Oberfläche des Fußballs, der sich zu zwei verschiedenen Zeitpunkten exakt am gleichen Ort befindet. Begründung: Der Mittelpunkt des Fußballs liegt zu Beginn der ersten und zweiten Halbzeit auf dem Anstoßpunkt. Dazwischen führt der Ball mit jedem Schuss eine Drehung (und Translation) aus. Da die Komposition von Drehungen wieder eine Drehung ist, wird auch die Transformation auf dem Anstoßpunkt durch eine Drehung f beschrieben. Die Drehachse von f schneidet die Oberfläche des Balls an zwei Punkten. Diese bleiben also fest.

Definition 11.45. Sei V ein euklidischer Raum und $v \in V \setminus \{0\}$. Man nennt

$$ S_v \colon V \to V, \qquad w \mapsto w - 2\frac{[w, v]}{[v, v]} v $$

die *Spiegelung* an $v^\perp$.

Bemerkung 11.46. Für $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ ist $S_{\lambda v} = S_v$. Wir können daher annehmen, dass v normiert ist. Dann gilt

$$ S_v(w) = w - 2[w, v]v $$

für alle $w \in V$. Offenbar ist S_v linear und $S_v(w) = w$ gilt genau dann, wenn $w \in v^\perp$. Außerdem ist $S_v(v) = -v$. Geometrisch entspricht S_v also einer Spiegelung an der Hyperebene $v^\perp$. Bzgl. einer geeigneten Orthonormalbasis hat S_v die Darstellungsmatrix $\mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$ (vgl. Aufgabe II.13). Insbesondere ist S_v orthogonal und $\det S_v = -1$. Außerdem gilt $S_v \circ S_v = \mathrm{id}_V$.

Satz 11.47 (Cartan-Dieudonné)**.** *Sei V ein n-dimensionaler euklidischer Raum und $f \in \mathrm{O}(V)$. Dann ist f eine Komposition von höchstens n Spiegelungen.*

Beweis. Im Fall $f = \mathrm{id}_V$ ist f die Komposition von 0 Spiegelungen. Sei daher $f \neq \mathrm{id}_V$ und $w \in V$ mit $f(w) \neq w$. Im Fall $n = 1$ ist $f = -\mathrm{id}_V = S_w$. Sei nun $n \geq 2$ und die Behauptung für $n-1$ bereits bewiesen. Für $v := f(w) - w \neq 0$ gilt

$$[f(w) + w, v] = [f(w) + w, f(w) - w] = [f(w), f(w)] - [w, w] = 0,$$

d. h. $f(w) + w \in v^\perp$. Also ist

$$(S_v \circ f)(w) = \frac{1}{2}\Big(S_v(f(w) + w) + S_v(v)\Big) = \frac{1}{2}\big(f(w) + w - v\big) = w.$$

Sei $U := w^\perp$. Wegen $g := S_v \circ f \in \mathrm{O}(V)$ ist $g(U) = U$. Nach Induktion ist $g_{|U}$ eine Komposition von höchstens $n-1$ Spiegelungen $S_{w_1}, \ldots, S_{w_k}$ mit $w_1, \ldots, w_k \in U$. Man kann S_{w_i} mit der gleichen Formel auch als Spiegelung von V auffassen. Wegen $w \in U^\perp$ gilt $S_{w_i}(w) = w$ für $i = 1, \ldots, k$. Damit ist $f = S_v \circ g$ ein Produkt von höchstens n Spiegelungen. □

Bemerkung 11.48. Nach Bemerkung 11.46 ist $f \in \mathrm{SO}(V)$ ein Produkt einer geraden Anzahl an Spiegelungen. Insbesondere benötigt man im Fall $\dim V = 2k + 1$ nur $2k$ Spiegelungen.

12 Bilinearformen

12.1 Gram-Matrizen

Bemerkung 12.1. Wir verallgemeinern in diesem Kapitel Teile der euklidischen Geometrie auf beliebige Körper. Stets sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

Definition 12.2.

- Eine *Bilinearform* auf V ist eine Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, die in beiden Komponenten linear ist, d. h.

$$\beta(\lambda u + v, w) = \lambda\beta(u, w) + \beta(v, w),$$
$$\beta(u, \lambda v + w) = \lambda\beta(u, v) + \beta(u, w)$$

  für alle $u, v, w \in V$ und $\lambda \in K$.

- Man nennt β
  - *symmetrisch*, falls $\beta(v, w) = \beta(w, v)$ für alle $v, w \in V$ gilt.
  - *antisymmetrisch*, falls $\beta(v, w) = -\beta(w, v)$ für alle $v, w \in V$ gilt.
  - *alternierend*, falls $\beta(v, v) = 0$ für alle $v \in V$ gilt.
  - *ausgeartet*, falls $\exists v \in V \setminus \{0\} : \forall w \in V : \beta(v, w) = 0$.

Beispiel 12.3.

(a) Die triviale Bilinearform $\beta(v, w) = 0$ für alle $v, w \in V$ ist symmetrisch, antisymmetrisch und alternierend. Für $V \neq \{0\}$ ist sie ausgeartet. In der Regel interessieren wir uns für nicht-ausgeartete Bilinearformen.

(b) Ein Skalarprodukt $\beta(v, w) = [v, w]$ auf einem euklidischen Raum V ist eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform, denn für $v \in V \setminus \{0\}$ ist $[v, v] = |v|^2 > 0$.

(c) Das Kreuzprodukt $(v, w) \mapsto v \times w$ auf $\mathbb{R}^3$ ist bilinear und antisymmetrisch, aber keine Bilinearform, da es nicht nach $\mathbb{R}$ abbildet.

(d) Für $V = K^n$ und $A \in K^{n\times n}$ definiert $\beta_A(v, w) := vAw^{\mathrm{t}}$ eine Bilinearform. Dies folgt aus den Rechenregeln für Matrizen. Wir werden in Satz 12.9 sehen, dass jede Bilinearform diese Form hat.

(e) Die Wahl $A = 1_n$ in (d) führt zur symmetrischen Bilinearform

$$\beta(v, w) = vw^{\mathrm{t}} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

Im Fall $K = \mathbb{R}$ erhält man das Standardskalarprodukt.

(f) Sei $V := K^2$ und $\beta(v,w) := \det\binom{v}{w}$ für $v, w \in V$. Nach Lemma 9.5 ist β eine alternierende Bilinearform. Im Allgemeinen ist det eine *Multilinearform* (Aufgabe II.15).

Bemerkung 12.4.

(a) Jede alternierende Bilinearform β ist antisymmetrisch, denn aus

$$0 = \beta(v+w, v+w) = \beta(v,v) + \beta(v,w) + \beta(w,v) + \beta(w,w) = \beta(v,w) + \beta(w,v)$$

folgt $\beta(v,w) = -\beta(w,v)$. Für $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ gilt auch die Umkehrung, denn aus $\beta(v,v) = -\beta(v,v)$ folgt $\beta(v,v) = 0$. Für $K = \mathbb{F}_2$ ist diese Schlussweise ungültig, denn $1+1=0$. Hier ist symmetrisch und antisymmetrisch sogar gleichbedeutend. Insbesondere ist die Bilinearform $\beta(v,w) = vw^{\mathrm{t}}$ auf $V = \mathbb{F}_2^n$ (anti)symmetrisch, aber nicht alternierend. Um diesen Fall zu vermeiden, werden wir im Folgenden oft $1+1 \neq 0$ annehmen.[1]

(b) Jede symmetrische Bilinearform β definiert eine *quadratische Form* $q\colon V \to K$ durch $q(v) := \beta(v,v)$. Ist $1+1 \neq 0$, so kann man β aus q durch *Polarisierung* zurückgewinnen:

$$\beta(v,w) = \frac{1}{2}\Big(q(v+w) - q(v) - q(w)\Big) \qquad (v, w \in V).$$

Satz 12.5. *Die Menge* $\mathrm{Bil}(V)$ *aller Bilinearformen auf* V *ist Unterraum von* $\mathrm{Abb}(V \times V, K)$.

Beweis. Die Nullabbildung ist die triviale Bilinearform. Seien $\beta, \gamma \in \mathrm{Bil}(V)$ und $\lambda \in K$. Wie in Satz 7.13 zeigt man, dass $\beta+\gamma$ und $\lambda\beta$ in beiden Komponenten linear sind (allerdings ist $\mathrm{Bil}(V) \nsubseteq \mathrm{Hom}(V \times V, K)$). Dies zeigt $\beta + \gamma, \lambda\beta \in \mathrm{Bil}(V)$. □

Bemerkung 12.6. Offenbar bilden die symmetrischen (antisymmetrischen, alternierenden) Bilinearformen jeweils einen Unterraum von $\mathrm{Bil}(V)$. Satz 12.9 gibt Aufschluss über die Dimension dieser Unterräume.

Satz 12.7. *Sei* $\beta \in \mathrm{Bil}(V)$. *Für* $v \in V$ *sei* $F_v\colon V \to K$, $w \mapsto \beta(v,w)$. *Dann ist* $F\colon V \to V^*$, $v \mapsto F_v$ *ein Homomorphismus.*[2] *Genau dann ist* β *nicht-ausgeartet, wenn* F *ein Isomorphismus ist.*

Beweis. Wegen der Bilinearität von β ist $F_v \in V^*$ und F ein Homomorphismus. Offenbar ist β genau dann nicht-ausgeartet, wenn F injektiv ist. Wegen $\dim V^* = \dim V$ ist injektiv äquivalent zu bijektiv. □

Definition 12.8. Sei β eine Bilinearform auf V. Sei $B := \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V. Man nennt

$$_B[\beta]_B := \big(\beta(b_i, b_j)\big)_{i,j=1}^n \in K^{n \times n}$$

die *Gram-Matrix* von β bzgl. B. Ist $V = K^n$ und B die Standardbasis, so sei $[\beta] := {}_B[\beta]_B$.

Satz 12.9. *Sei* B *eine Basis von* V *mit* $|B| = n$. *Dann ist die Abbildung*

$$_B[.]_B\colon \mathrm{Bil}(V) \to K^{n \times n}, \qquad \beta \mapsto {}_B[\beta]_B$$

ein Isomorphismus. Für $A := {}_B[\beta]_B$ *gilt:*

(a) β *symmetrisch* $\iff$ A *symmetrisch.*

[1] Neben $\mathbb{F}_2$ gibt es viele (auch unendliche) Körper K mit $1+1=0$. Ggf. sagt man K hat *Charakteristik* 2.

[2] In der Funktionalanalysis schreibt man gern $\langle f, v\rangle = f(v)$ für $f \in V^*$ und $v \in V$, um die Bilinearität zu verdeutlichen.

(b) β *antisymmetrisch* $\iff A^{\mathrm{t}} = -A$.[3]

(c) β *nicht-ausgeartet* $\iff A$ *invertierbar.*

Beweis. Für $\beta, \gamma \in \mathrm{Bil}(V)$ und $\lambda \in K$ gilt

$$ {}_B[\lambda\beta + \gamma]_B = \big((\lambda\beta + \gamma)(b_i, b_j)\big)_{i,j} = \lambda(\beta(b_i, b_j)) + (\gamma(b_i, b_j)) = \lambda\, {}_B[\beta]_B + {}_B[\gamma]_B, $$

d. h. ${}_B[.]_B$ ist linear. Ist ${}_B[\beta]_B = 0$, so gilt

$$ \beta\Big(\sum \lambda_i b_i, \sum \mu_j b_j\Big) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \beta(b_i, b_j) = 0 $$

für alle $\lambda_i, \mu_j \in K$. Also ist $\beta = 0$ und ${}_B[.]_B$ ist injektiv. Für die Surjektivität sei $A \in K^{n\times n}$ gegeben. Aus der Linearität der Koordinatendarstellung $v \mapsto {}_B[v]$ (siehe Beweis von Satz 7.10) folgt, dass

$$ \beta(v, w) := {}_B[v] A\, {}_B[w]^{\mathrm{t}} $$

eine Bilinearform definiert. Wegen $\beta(b_i, b_j) = e_i A e_j^{\mathrm{t}} = a_{ij}$ ist ${}_B[\beta]_B = A$. Also ist ${}_B[.]_B$ ein Isomorphismus.

(a) Offenbar definiert $\beta'(v, w) := \beta(w, v)$ eine Bilinearform mit ${}_B[\beta']_B = A^{\mathrm{t}}$. Nach dem ersten Teil des Beweises gilt

$$ \beta \text{ symmetrisch} \iff \beta = \beta' \iff A = A^{\mathrm{t}}. $$

(b) Wie in (a) mit $\beta'(v, w) := -\beta(w, v)$.

(c) Sei $B^* := \{b_1^*, \ldots, b_n^*\} \in V^*$ die zu B duale Basis. Für die Abbildung F aus Satz 12.7 gilt

$$ F_{b_i}(b_j) = \beta(b_i, b_j) = a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_k^*(b_j), $$

d. h. ${}_{B^*}[F]_B = A^{\mathrm{t}}$. Nach Satz 12.7 ist β genau dann nicht-ausgeartet, wenn A^{t} (und damit A) invertierbar ist. □

Beispiel 12.10. Sei $1 + 1 \neq 0$ in K und $n := \dim V$ ungerade. Sei $\beta \in \mathrm{Bil}(V)$ antisymmetrisch mit Gram-Matrix A bzgl. einer beliebigen Basis. Nach Satz 12.9 gilt

$$ \det A = \det(A^{\mathrm{t}}) = \det(-A) \overset{9.8}{=} (-1)^n \det(A) = -\det(A) $$

und $\det A = 0$. Daher muss β ausgeartet sein.

Satz 12.11. *Seien B und C Basen von V. Für alle $\beta \in \mathrm{Bil}(V)$ gilt*

$$ \boxed{{}_C[\beta]_C = {}_B\Delta_C^{\mathrm{t}}\, {}_B[\beta]_B\, {}_B\Delta_C.} $$

Beweis. Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ und $S = (s_{ij}) = {}_B\Delta_C$. Für $1 \leq i, j \leq n$ gilt

$$ \beta(c_i, c_j) = \sum_{k,l=1}^{n} s_{ki} \beta(b_k, b_l) s_{lj} = \sum_{k=1}^{n} s_{ki} ({}_B[\beta]_B S)_{kj} = (S^{\mathrm{t}}\, {}_B[\beta]_B S)_{ij}. $$ □

[3] Man nennt A *antisymmetrisch* oder *schiefsymmetrisch*.

Definition 12.12. Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ heißen *kongruent*, falls ein $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit $B = SAS^{\mathrm{t}}$ existiert.[4]

Bemerkung 12.13.

(a) Wie in Bemerkung 7.30 zeigt man, dass die Kongruenz von Matrizen eine Äquivalenzrelation ist. Nach Satz 12.9 und Satz 12.11 bestimmt jede Bilinearform auf V eine Kongruenzklasse von Gram-Matrizen. Wir zeigen im nächsten Abschnitt, dass man Bilinearformen ähnlich wie Endomorphismen diagonalisieren kann.

(b) Nach Lemma 5.15 ist
$$\operatorname{rk} B = \operatorname{rk}((SA)S^{\mathrm{t}}) \leq \operatorname{rk}(SA) \leq \operatorname{rk} A.$$
Aus Symmetriegründen folgt $\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} A$, d. h. kongruente Matrizen haben den gleichen Rang. Das Beispiel $A = 1_1$ und $B = (2)A(2) = (4)$ zeigt andererseits, dass kongruente Matrizen im Allgemeinen weder die gleiche Spur, Determinante noch die gleichen Eigenwerte besitzen.

(c) Nach dem Hauptachsensatz ist jede symmetrische reelle Matrix kongruent und ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

12.2 Sylvesters Trägheitssatz

Definition 12.14. Sei $\beta \in \mathrm{Bil}(V)$ und $S \subseteq V$. Wie in euklidischen Räumen definieren wir das *orthogonale Komplement* von S durch
$$S^{\perp} := \{v \in V : \forall s \in S : \beta(v, s) = 0\} \leq V.$$

Bemerkung 12.15.

(a) In der Definition von $S^{\perp}$ müsste man streng genommen zwischen „links-orthogonal“ und „rechts-orthogonal“ ($\forall s \in S : \beta(s, v) = 0$) unterscheiden. In der Regel werden wir annehmen, dass β (anti)symmetrisch ist, sodass beide Versionen äquivalent sind.

(b) Genau dann ist β ausgeartet, falls $V^{\perp} \neq \{0\}$ gilt.

Satz 12.16. *Sei $\beta \in \mathrm{Bil}(V)$ nicht-ausgeartet. Für $U \leq V$ gilt* $\dim V = \dim(U) + \dim(U^{\perp})$.

Beweis. Sei $F\colon V \to V^*$, $v \mapsto F_v$ der Isomorphismus aus Satz 12.7. Dann gilt
$$F_v \in F(U^{\perp}) \iff \forall u \in U : F_v(u) = \beta(v, u) = 0 \iff F_v \in U^0,$$
d. h. $F(U^{\perp}) = U^0$. Die Behauptung folgt aus Lemma 7.44. □

Bemerkung 12.17. Achtung: Im Gegensatz zu euklidischen Räumen ist im Allgemeinen $U \cap U^{\perp} \neq \{0\}$. Für $U = \langle(1, 1)\rangle \leq V = \mathbb{F}_2^2$ mit $[\beta] = 1_2$ gilt zum Beispiel $U = U^{\perp}$.

Definition 12.18. Sei $\beta \in \mathrm{Bil}(V)$ symmetrisch. Eine Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ von V heißt *Orthogonalbasis* bzgl. β, falls $\beta(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$ gilt. Ist zusätzlich $\beta(b_i, b_i) = 1$, so nennt man B eine *Orthonormalbasis* bzgl. β.

[4] Im Gegensatz zur Ähnlichkeit führen wir kein Symbol für die Kongruenz von Matrizen ein.

Bemerkung 12.19.

(a) Offenbar ist B genau dann eine Orthogonalbasis bzw. Orthonormalbasis bzgl. β, falls ${}_B[\beta]_B$ eine Diagonalmatrix bzw. Einheitsmatrix ist.

(b) Nach Folgerung 11.11 besitzt jedes Skalarprodukt eine Orthonormalbasis.

Satz 12.20. *Sei $1+1 \neq 0$ in K. Dann besitzt jede symmetrische Bilinearform auf V eine Orthogonalbasis.*

Beweis. Sei $\beta \in \mathrm{Bil}(V)$ symmetrisch. Wir argumentieren durch Induktion nach $n := \dim V$. Im Fall $n \leq 1$ oder $\beta = 0$ ist jede Basis eine Orthogonalbasis. Sei also $n \geq 2$ und $\beta(v, w) \neq 0$ für gewisse $v, w \in V$. Im Fall $\beta(v, v) = \beta(w, w) = 0$ ist

$$\beta(v + w, v + w) = \beta(v, v) + \beta(v, w) + \beta(w, v) + \beta(w, w) = 2\beta(v, w) \neq 0$$

(beachte $1 + 1 \neq 0$). In jedem Fall existiert also ein $b_1 \in V \setminus \{0\}$ mit $\beta(b_1, b_1) \neq 0$. Sei $U := b_1^\perp$. Für alle $v \in V$ ist $v - \frac{\beta(v,b_1)}{\beta(b_1,b_1)} b_1 \in U$. Dies zeigt $V = \langle b_1 \rangle \oplus U$. Die Einschränkung von β auf $U \times U$ ist eine symmetrische Bilinearform. Nach Induktion besitzt U eine Orthogonalbasis $b_2, \ldots, b_n$. Nun ist $b_1, \ldots, b_n$ eine Orthogonalbasis von V. □

Bemerkung 12.21.

(a) Die Matrix-Version von Satz 12.20 lautet: Jede symmetrische Matrix ist zu einer Diagonalmatrix kongruent (falls $1 + 1 \neq 0$). Wir werden sehen, dass man die Diagonaleinträge speziell wählen kann.

(b) Ist $1 + 1 = 0$ in K, so wird Satz 12.20 falsch: Die Bilinearform β mit $[\beta] = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ besitzt keine Orthogonalbasis, denn $\beta(v, v) = 0$ für alle $v \in K^2$.

(c) Das Gram-Schmidt-Verfahren zur Berechnung von Orthogonalbasen funktioniert in dieser Allgemeinheit nicht immer, denn man muss durch $\beta(b_i, b_i)$ teilen, aber dieser Wert kann 0 sein. Wir modifizieren stattdessen den Gauß-Algorithmus wie folgt:

(1) Sei $A := [\beta]$. Nehmen wir induktiv an, dass die Zeilen und Spalten $1, \ldots, k-1$ von A bereits die gewünschte Diagonalgestalt haben (zu Beginn sei $k = 1$).

(2) Nehmen wir zunächst $a_{kk} \neq 0$ an. Dann kann man $a_{ik} = 0$ für $i = k + 1, \ldots, n$ erreichen, indem man wie gewohnt ein Vielfaches der k-ten Zeile auf die darunterliegenden Zeilen addiert. Dies entspricht der Multiplikation mit Elementarmatrizen $S_1, \ldots, S_{n-k}$ von links. Anschließend setze man $a_{ki} = 0$ für $i = k + 1, \ldots, n$. Dies entspricht der Multiplikation mit $S_1^\mathrm{t}, \ldots, S_{n-k}^\mathrm{t}$ von rechts (in beliebiger Reihenfolge). Insgesamt wird A zu SAS^t, wobei $S = S_1 \ldots S_{n-k}$. Wegen $(SAS^\mathrm{t})^\mathrm{t} = (S^\mathrm{t})^\mathrm{t} A^\mathrm{t} S^\mathrm{t} = SAS^\mathrm{t}$ bleibt A durch dieses Vorgehen symmetrisch. Im Fall $k = n$ sind wir fertig. Anderenfalls erhöhen wir k.

(3) Sei nun $a_{kk} = 0$. Existiert ein $l > k$ mit $a_{ll} \neq 0$, so tausche man die Zeilen k und l und anschließend die Spalten k und l. Dadurch werden a_{kk} und a_{ll} vertauscht und A bleibt symmetrisch. Man ist nun in Situation (2).

(4) Sei schließlich $a_{ii} = 0$ für $i = k, \ldots, n$. Ist $a_{ij} = 0$ für alle $k \leq i, j \leq n$, so sind wir fertig. Sei daher $a_{ij} \neq 0$ für gewisse $k \leq i < j \leq n$. Wir addieren die i-te Zeile zur j-ten Zeile und anschließend die i-te Spalte zur j-ten Spalte. Der Eintrag an Position (j, j) wird dadurch zu $2a_{ij} \neq 0$ (beachte $1 + 1 \neq 0$). Also ist man in Situation (3).

(5) Zur Bestimmung der Orthogonalbasis B führe man alle Zeilenoperationen (aber nicht die Spaltenoperationen) an der Einheitsmatrix aus. Dadurch entsteht die Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, K)$, sodass SAS^{t} eine Diagonalmatrix ist (vgl. Satz 6.17). Nach Satz 12.11 sind die Zeilen von S die Vektoren von B.

Beispiel 12.22.

$$(A|1_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Satz 12.23 (Sylvesters Trägheitssatz)**.** *Sei β eine symmetrische Bilinearform auf $V = \mathbb{R}^n$. Dann existiert eine Basis B von V mit*

$$_B[\beta]_B = \mathrm{diag}(1_r, -1_s, 0_t).$$

Die Zahlen r, s, t hängen nicht von B ab.

Beweis. Nach Satz 12.20 existiert eine Orthogonalbasis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ von V. Nach Umsortierung können wir

$$\beta(b_i, b_i) \begin{cases} > 0 & \text{für } i = 1, \ldots, r, \\ < 0 & \text{für } i = r+1, \ldots, r+s, \\ = 0 & \text{für } i = r+s+1, \ldots, r+s+t = n \end{cases}$$

annehmen. Für $i = 1, \ldots, r+s$ ersetzen wir b_i durch $\frac{1}{\sqrt{|\beta(b_i,b_i)|}} b_i$. Dann gilt $\beta(b_i, b_i) = 1$ für $i = 1, \ldots, r$ und $\beta(b_i, b_i) = -1$ für $i = r+1, \ldots, r+s$. Damit ist die Existenz von B gezeigt.

Wegen $V^\perp = \langle b_{r+s+1}, \ldots, b_n \rangle$ hängt $t = \dim V^\perp$ nicht von B ab. Sei $V_+ := \langle b_1, \ldots, b_r \rangle$. Für $v = \sum_{i=1}^r \lambda_i b_i \in V_+$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ gilt $\beta(v, v) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^2 \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $v = 0$. Sei $B' = \{b'_1, \ldots, b'_n\}$ eine weitere Basis von V mit

$$_{B'}[\beta]_{B'} = \mathrm{diag}(1_{r'}, -1_{s'}, 0_t).$$

Sei $V'_{\leq 0} := \langle b'_{r'+1}, \ldots, b'_n \rangle$. Für $v \in V_+ \cap V'_{\leq 0}$ gilt einerseits $\beta(v, v) \geq 0$ und andererseits $\beta(v, v) \leq 0$. Dies zeigt $\beta(v, v) = 0$ und $v = 0$. Also ist $V_+ \cap V'_{\leq 0} = \{0\}$ und

$$r + s' + t = \dim(V_+ \oplus V'_{\leq 0}) \leq \dim V = n = r + s + t.$$

Es folgt $s' \leq s$. Aus Symmetriegründen ist $s' = s$ und $r' = r$. □

Definition 12.24. In der Situation von Satz 12.23 nennt man $\mathrm{ind}\beta := (r, s, t)$ den *Index* von β.[5] Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert man $\mathrm{ind}A := \mathrm{ind}\beta$ durch die Bilinearform β mit $[\beta] = A$.

[5] Dieser Begriff ist in der Literatur nicht einheitlich! Manche Autoren nennen $r - s$ die *Signatur* von β. Aus Dimension, Rang und Signatur lässt sich der Index bestimmen.

Beispiel 12.25.

(a) Jedes Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ hat Index $(n, 0, 0)$.

(b) Die Matrix A aus Beispiel 12.22 hat Index $(1, 2, 0)$.

(c) Ist $\mathrm{ind}\beta = (r, s, t)$, so ist β genau dann ausgeartet, wenn $t > 0$ gilt.

(d) In der Relativitätstheorie betrachtet man den *Minkowski-Raum* $\mathbb{R}^4$ bzgl. einer Bilinearform β mit Index $(3, 1, 0)$. Die vierte Dimension beschreibt dabei die Zeit.

Satz 12.26. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit Index (r, s, t). Dann ist r die Anzahl der positiven Eigenwerte und s die Anzahl der negativen Eigenwerte von A jeweils gezählt mit (algebraischen) Vielfachheiten.*

Beweis. Nach der Matrix-Version des Hauptachsensatzes ist A zu $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ kongruent, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A sind (die algebraische Vielfachheit jedes Eigenwerts stimmt mit der geometrischen Vielfachheit überein). Man kann das Argument aus dem Beweis von Satz 12.23 auf diese Matrix anwenden. Die positiven λ_i werden dabei zu 1 transformiert und die negativen zu -1. □

Bemerkung 12.27. Zur Konstruktion einer Basis für Sylvesters Trägheitssatz startet man zunächst mit einer beliebigen Orthogonalbasis $b_1, \ldots, b_n$ bzgl. β (zum Beispiel mit dem modifizierten Gauß-Algorithmus oder dem Hauptachsensatz). Die Basisvektoren werden entsprechend der Diagonaleinträge $\lambda := \beta(b_i, b_i)$ sortiert (erst positive, dann negative, dann Nullen). Für $\lambda \neq 0$ dividiert man b_i durch $\sqrt{|\lambda|}$. Für die Matrix aus Beispiel 12.22 erhält man die Basis

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 1).$$

Folgerung 12.28. *Für symmetrische Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) A und B sind kongruent.

(2) $\mathrm{ind}A = \mathrm{ind}B$.

(3) A und B haben die gleiche Anzahl an positiven Eigenwerten und die gleiche Anzahl an negativen Eigenwerten.[6]

Beweis. Da kongruente Matrizen die gleiche Bilinearform beschreiben, gilt (1)⇒(2). Aus Satz 12.26 folgt (2)⇒(3). Gilt (3), so haben A und B den gleichen Index nach Satz 12.26. Also sind A und B kongruent, d. h. (1) gilt. □

Bemerkung 12.29.

(a) Für jedes $m \leq n$ gibt es genau $m + 1$ Kongruenzklassen von symmetrischen $n \times n$-Matrizen mit Rang m (nämlich mit Index $(i, m - i, n - m)$ für $i = 0, \ldots, m$). Daher gibt es

$$\sum_{m=0}^{n}(m + 1) = \sum_{m=1}^{n+1} m = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

symmetrische Bilinearformen auf $\mathbb{R}^n$ bis auf Basiswahl (vgl. Beispiel 1.16).

[6] Das beschreibt die *Trägheit* in Sylvesters Satz.

(b) Arbeitet man über $\mathbb{C}$ anstatt $\mathbb{R}$, so kann man stets ${}_B[\beta]_B = \operatorname{diag}(1_r, 0_t)$ erreichen. Man kann nämlich jeden Basisvektor b mit $w := \beta(b,b) \neq 0$ durch $\sqrt{w} \in \mathbb{C}$ dividieren.[7] Daher gibt es nur $n+1$ symmetrische Bilinearformen auf $\mathbb{C}^n$ bis auf Basiswahl. Wir beweisen in Satz 13.25 Sylvesters Trägheitssatz über $\mathbb{C}$ mit einem anderen Kongruenzbegriff.

Satz 12.30. *Sei V ein beliebiger K-Vektorraum. Sei $\beta \in \operatorname{Bil}(V)$ alternierend und nicht-ausgeartet. Dann existiert eine Basis B von V mit ${}_B[\beta]_B = \left(\begin{smallmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{smallmatrix}\right)$. Insbesondere ist $\dim V = 2n$ gerade.*[8]

Beweis. Induktion nach $\dim V$. Sei $b_1 \in V \setminus \{0\}$. Da β nicht-ausgeartet ist, existiert $c_1 \in V$ mit $\beta(b_1, c_1) \neq 0$. Indem man c_1 durch $\beta(b_1,c_1)^{-1}c_1$ ersetzt, erreicht man $\beta(b_1,c_1) = 1$. Sei $U := \langle b_1, c_1\rangle$. Für $v = \lambda b_1 + \mu c_1 \in U$ gilt $\beta(v,b_1) = \mu\beta(c_1,b_1) = -\mu$ und $\beta(v,c_1) = \lambda$. Dies zeigt $U \cap U^\perp = \{0\}$. Nach Satz 12.16 gilt $V = U \oplus U^\perp$. Für $u \in U^\perp$ existiert ein $v \in V$ mit $\beta(u,v) \neq 0$. Schreibt man $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in U$ und $v_2 \in U^\perp$, so folgt $\beta(u,v_2) = \beta(u,v) \neq 0$. Daher ist auch die Einschränkung β' von β auf $U^\perp \times U^\perp$ nicht-ausgeartet und alternierend. Nach Induktion besitzt $U^\perp$ eine Basis $B' = \{b_2, \dots, b_n, c_2, \dots, c_n\}$ mit

$$ {}_{B'}[\beta']_{B'} = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & 1_{n-1} \\ -1_{n-1} & 0_{n-1} \end{pmatrix}. $$

Nun ist $B = \{b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n\}$ eine Basis mit der gewünschten Eigenschaft. □

Bemerkung 12.31. Einen Vektorraum V mit einer alternierenden, nicht-ausgearteten Bilinearform nennt man einen *symplektischen Raum*. Darauf gehen wir nicht weiter ein.

12.3 Positiv definite Matrizen

Bemerkung 12.32. In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die positive Definitheit von Skalarprodukten in euklidischen Räumen. Stets sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Definition 12.33. Eine symmetrische Bilinearform $\beta \in \operatorname{Bil}(V)$ nennt man

- *positiv (semi)definit*, falls $\beta(v,v) > 0$ (bzw. $\beta(v,v) \geq 0$) für alle $v \in V \setminus \{0\}$,
- *negativ (semi)definit*, falls $\beta(v,v) < 0$ (bzw. $\beta(v,v) \leq 0$) für alle $v \in V \setminus \{0\}$,
- *indefinit*, falls $\exists v, w \in V : \beta(v,v) > 0 > \beta(w,w)$.

Diese Begriffe übertragen sich auf symmetrische Matrizen A, indem man ein β mit $[\beta] = A$ wählt.

Bemerkung 12.34.

(a) Offensichtlich ist jede positiv definite Bilinearform auch positiv semidefinit. Ist β positiv (semi)definit, so ist $-\beta$ negativ (semi)definit. Daher kann man sich in der Regel auf die positive Eigenschaft beschränken.

(b) Ist β positiv (semi)definit, so ist die dazu gehörige quadratische Form aus Bemerkung 12.4 positiv (bzw. nicht-negativ) auf $V \setminus \{0\}$.

[7] In $\mathbb{C}$ gibt es keine kanonische Wahl der Quadratwurzel.
[8] vgl. Beispiel 12.10

(c) Die Summe von positiv (semi)definiten Bilinearformen und Matrizen ist wieder positiv (semi)definit. Man kann positiv semidefinite Matrizen als mehrdimensionale Verallgemeinerung von nicht-negativen reellen Zahlen ansehen (siehe Satz 12.46, Beispiel 19.20 und Aufgabe III.11). Allerdings ist das Produkt von positiv (semi)definiten Matrizen in der Regel nicht symmetrisch.

Beispiel 12.35.

(a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$xAx^{\mathrm{t}} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2 \geq 0.$$

Im Fall $xAx^{\mathrm{t}} = 0$ ist $x_1 = 0$ und $x_i = x_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Also ist $x = 0$ und A positiv definit.

(b) In der Analysis bildet man aus den zweiten partiellen Ableitungen einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die *Hesse-Matrix* $(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, welche an lokalen Minima von f positiv semidefinit ist.

Satz 12.36. *Für jede symmetrische Bilinearform $\beta \in \mathrm{Bil}(V)$ mit Index (r, s, t) gilt*

(a) β positiv semidefinit $\iff s = 0$.

(b) β positiv definit $\iff s = t = 0$.

(c) β indefinit $\iff r, s > 0$.

Beweis. Sei B die Basis aus Sylvesters Trägheitssatz. Ist $s > 0$, so existiert ein $b \in B$ mit $\beta(b, b) = -1$. Dann kann β nicht positiv semidefinit sein. Ist $t > 0$, so existiert $b \in B$ mit $\beta(b, b) = 0$. Dann kann β nicht positiv definit sein. Ist $s = 0$ (bzw. $s = t = 0$), so gilt $\beta(b, b) \geq 0$ (bzw. $\beta(b, b) > 0$) für alle $b \in B$. Da B eine Orthogonalbasis ist, folgt leicht, dass β positiv (semi)definit ist. Genau dann ist β indefinit, falls $b, c \in B$ mit $\beta(b, b) = 1 = -\beta(c, c)$ existieren. Das bedeutet $r, s > 0$. □

Folgerung 12.37. *Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann positiv (semi)definit, wenn alle Eigenwerte von A positiv (bzw. nicht-negativ) sind.*

Beweis. Bekanntlich sind alle Eigenwerte von A reell. Die Behauptung folgt aus Satz 12.26. □

Beispiel 12.38. Für

$$A = (1 + \delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

funktioniert der Trick aus Beispiel 12.35 nicht. Wegen $\operatorname{rk}(A - 1_n) = 1$ ist 1 ein Eigenwert von A mit (geometrischer) Vielfachheit $n-1$ (vgl. Aufgabe I.28). Der fehlende Eigenwert muss $\operatorname{tr}(A) - (n-1) = 2n - n + 1 = n + 1$ sein. Daher ist A positiv definit.

Bemerkung 12.39. Da sich die Eigenwerte in der Praxis nur schwer berechnen lassen, ist es nützlich, andere Kriterien für die positive Definitheit zu kennen. Eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung ist, dass alle Diagonaleinträge positiv sind, denn $a_{ii} = e_i A e_i^{\mathrm{t}}$.

Lemma 12.40. *Genau dann ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv semidefinit, wenn eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = SS^{\mathrm{t}}$ existiert. Genau dann ist A positiv definit, wenn S invertierbar ist.*

Beweis. Sei $A = SS^{\mathrm{t}}$ für ein $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Für $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $vAv^{\mathrm{t}} = vS(vS)^{\mathrm{t}} = |vS|^2 \geq 0$. Daher ist A positiv semidefinit. Ist S invertierbar, so gilt $|vS| > 0$ für alle $v \neq 0$. Dann ist A positiv definit. Sei umgekehrt A positiv semidefinit. Nach Sylvesters Trägheitssatz und Satz 12.36 existiert ein $U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit $A = UDU^{\mathrm{t}}$, wobei $D = \operatorname{diag}(1_r, 0_t)$. Für $S = UD$ gilt $SS^{\mathrm{t}} = A$ wegen $D^2 = D$. Ist A positiv definit, so ist $S = U$ invertierbar. □

Satz 12.41 (Sylvester-Kriterium)**.** *Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $A_k := (a_{ij})_{i,j=1}^k$ für $1 \leq k \leq n$. Genau dann ist A positiv definit, wenn $\det A_k > 0$ für $k = 1, \ldots, n$ gilt.*

Beweis. Induktion nach n: Im Fall $n = 1$ ist A genau dann positiv definit, falls $\det A_1 = a_{11} > 0$. Sei nun $n \geq 2$ und $1 \leq k \leq n$. Sei A positiv definit und $v \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Für $w := (v_1, \ldots, v_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ gilt $vA_kv^{\mathrm{t}} = wAw^{\mathrm{t}} > 0$. Also ist A_k positiv definit. Nach Lemma 12.40 existiert ein $S \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ mit $A_k = SS^{\mathrm{t}}$. Es folgt $\det A_k = \det(S)^2 > 0$.

Nehmen wir umgekehrt $\det A_k > 0$ für $k = 1, \ldots, n$ an. Nach Induktion ist A_{n-1} positiv definit. Sei $\beta \in \mathrm{Bil}(\mathbb{R}^n)$ mit $[\beta] = A$. Dann ist die Einschränkung β_1 von β auf $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}$ positiv definit, denn $[\beta_1] = A_{n-1}$. Sei $b'_1, \ldots, b'_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$ eine Orthonormalbasis von β_1. Durch Anfügen einer 0 erhält man die Vektoren $b_i := (b'_i, 0) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\beta(b_i, b_j) = b_i A b_j^{\mathrm{t}} = b'_i A_{n-1} (b'_j)^{\mathrm{t}} = \delta_{ij}$$

für $i = 1, \ldots, n-1$. Sei $V_1 := \langle b_1, \ldots, b_{n-1} \rangle$. Da β auf V_1 positiv definit ist, gilt $V_1 \cap V_1^{\perp} = \{0\}$. Mit $b_n \in V_1^{\perp} \setminus \{0\}$ ist $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^n$ und

$$D := {}_B[\beta]_B = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \lambda)$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Da A und D kongruent sind, existiert ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit $D = SAS^{\mathrm{t}}$. Es folgt $\lambda = \det D = \det(S)^2 \det(A_n) > 0$. Mit D ist nun auch A positiv definit. □

Beispiel 12.42.

(a) Die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ ist genau dann positiv definit, wenn $a > 0$ und $ac > b^2$.

(b) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & . & . & -1 \\ -1 & 2 & -1 & . & . \\ . & -1 & 2 & -1 & . \\ . & . & -1 & 2 & -1 \\ -1 & . & . & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nach Beispiel 12.35 gilt $\det A_k > 0$ für $k = 1, \ldots, 4$. Da die Zeilensummen von A verschwinden, ist $(1, \ldots, 1)^{\mathrm{t}}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 0. Dies zeigt $\det A = 0$. Der Beweis von Satz 12.41 zeigt, dass A positiv semidefinit ist, aber nicht positiv definit.

Bemerkung 12.43.

(a) Man nennt $\det A_1, \ldots, \det A_n$ die *Hauptminoren* von A.

(b) Achtung: Aus $\det A_k \geq 0$ für $k = 1, \ldots, n$ folgt nicht, dass A positiv semidefinit ist (betrachte zum Beispiel $A = \operatorname{diag}(0, -1)$).

(c) Ebenso ist die negative Definitheit nicht zu $\det A_k < 0$ äquivalent. Bekanntlich ist A genau dann negativ definit, wenn $-A$ positiv definit ist. Dies ist äquivalent zu $(-1)^k \det(A_k) > 0$ für $k = 1, \ldots, n$.

Satz 12.44. *Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit charakteristischem Polynom*

$$\chi_A = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n \in \mathbb{R}[X]$$

ist genau dann positiv definit, falls die Koeffizienten von χ_A alternierende Vorzeichen haben, d. h. $a_i(-1)^i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

Beweis. Sei $a_i(-1)^i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Für $\lambda \leq 0$ gilt dann

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n\big(|\lambda|^n + |a_1||\lambda|^{n-1} + \ldots + |a_n|\big) \neq 0.$$

Also besitzt A nur positive Eigenwerte. Nach Folgerung 12.37 ist A positiv definit.

Sei umgekehrt A positiv definit mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$. Dann gilt

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) = X^n - \Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Big)X^{n-1} + \Big(\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j\Big)X^{n-2} - \ldots + (-1)^n\lambda_1\ldots\lambda_n$$

und

$$a_k(-1)^k = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_k} > 0$$

für $k = 1, \ldots, n$. □

Beispiel 12.45. Für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\chi_A = (X-2)^2(X-1) + 2 - 2(X-2) - (X-1) = X^3 - 5X^2 + 5X + 3.$$

Da die letzten beiden Koeffizienten das gleiche Vorzeichen haben, kann A nicht positiv definit sein.

Satz 12.46. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv (semi)definit und $k \in \mathbb{N}$. Dann besitzt A genau eine positiv (semi)definite k-te Wurzel $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$, d. h. $W^k = A$.*

Beweis. Nach dem Hauptachsensatz existiert ein $S \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ mit $S^{\mathrm{t}}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Da A positiv semidefinit ist, gilt $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ nach Folgerung 12.37. Nun ist

$$W := S \,\mathrm{diag}(\sqrt[k]{\lambda_1}, \ldots, \sqrt[k]{\lambda_n}) S^{\mathrm{t}}$$

positiv (semi)definit mit $W^k = A$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}[X]$ mit $\alpha(\lambda_i) = \sqrt[k]{\lambda_i}$ für $i = 1, \ldots, n$ (Interpolation). Wegen $(S^{\mathrm{t}}AS)^i = S^{\mathrm{t}}A^iS$ für $i \in \mathbb{N}$ gilt

$$\alpha(A) = S\alpha(S^{\mathrm{t}}AS)S^{\mathrm{t}} = W.$$

Sei auch $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv (semi)definit mit $B^k = A$. Wieder existiert ein $T \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ mit $T^{\mathrm{t}}BT = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n \geq 0$. Dabei sind $\mu_1^k, \ldots, \mu_n^k$ die Eigenwerte von $B^k = A$. Also existiert eine Permutationsmatrix P mit $P^{\mathrm{t}}T^{\mathrm{t}}BTP = S^{\mathrm{t}}WS$ und $P^{\mathrm{t}}T^{\mathrm{t}}ATP = S^{\mathrm{t}}AS$. Daher ist TPS^{t} mit A und mit $\alpha(A) = W$ vertauschbar. Dies zeigt $B = TPS^{\mathrm{t}}WSP^{\mathrm{t}}T^{\mathrm{t}} = W$. □

13 Unitäre Räume

13.1 Sesquilinearformen

Bemerkung 13.1. Wir entwickeln in diesem Kapitel eine Geometrie für die komplexen Zahlen. Anstelle des euklidischen Skalarprodukts tritt eine „schiefsymmetrische“ Abbildung, die nur noch in der ersten Koordinate linear ist. Aus symmetrischen bzw. orthogonalen Abbildungen werden hermitesche bzw. unitäre Abbildungen. Das Gegenstück des Hauptachsensatzes ist der Spektralsatz.

Definition 13.2. Ein *Skalarprodukt* auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $V \times V \to \mathbb{C}$, $(v, w) \mapsto [v, w]$ mit folgenden Eigenschaften ($u, v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$):

- $[v, v] \in \mathbb{R}$ und $[v, v] \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $v = 0$ (*positiv definit*),
- $[v, w] = \overline{[w, v]}$ (*hermitesch*),
- $[\lambda u + v, w] = \lambda[u, w] + [v, w]$.

Zusammen mit einem Skalarprodukt wird V ein *unitärer Raum*. Vektoren $v, w \in V$ heißen *orthogonal*, geschrieben $v \perp w$, falls $[v, w] = 0$. Man nennt $|v| := \sqrt{[v, v]} \geq 0$ die *Norm* von v. Im Fall $|v| = 1$ nennt man v *normiert*.

Beispiel 13.3. Das *Standardskalarprodukt* auf $V = \mathbb{C}^n$ ist definiert durch

$$[v, w] := v\overline{w}^{\mathrm{t}} = \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{w_i}$$

für $v, w \in V$. Dies setzt Beispiel 11.4 von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{C}^n$ fort. Man prüft leicht, dass die Eigenschaften des Skalarprodukts erfüllt sind.

Bemerkung 13.4.

(a) Für $u, v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$[u, \lambda v + w] = \overline{[\lambda v + w, u]} = \overline{\lambda[v, u] + [w, u]} = \overline{\lambda}[u, v] + [u, w],$$

d. h. das Skalarprodukt ist in der zweiten Komponente nicht linear. Man spricht daher von einer *Sesquilinearform*.[1]

(b) Die meisten der in Abschnitt 11.1 bewiesenen Sätze hängen nicht wesentlich von der Bilinearität des Skalarprodukts ab und können daher problemlos übertragen werden.

Lemma 13.5. *Sei V ein unitärer Raum, $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

(a) $|\lambda v| = |\lambda||v|$ (Homogenität).

[1] *sesqui* ist lateinisch für eineinhalb.

(b) $|[v,w]| \leq |v||w|$ *mit Gleichheit genau dann, wenn* v *und* w *linear abhängig sind* (Cauchy-Schwarz-Ungleichung).

(c) $||v| - |w|| \leq |v+w| \leq |v| + |w|$ (Dreiecksungleichung).

Beweis.

(a) $|\lambda v| = \sqrt{[\lambda v, \lambda v]} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}[v,v]} = \sqrt{|\lambda|^2}\sqrt{[v,v]} = |\lambda||v|$.

(b) O. B. d. A. sei $w \neq 0$ und $\lambda := \frac{[v,w]}{[w,w]}$. Wegen $\overline{\lambda} = \frac{[w,v]}{[w,w]}$ gilt

$$0 \leq |v - \lambda w|^2 = [v - \lambda w, v - \lambda w] = [v,v] - \lambda[w,v] - \overline{\lambda}[v,w] + |\lambda|^2[w,w] = |v|^2 - \frac{|[v,w]|^2}{|w|^2}.$$

Es folgt $|[v,w]|^2 \leq |v|^2|w|^2$ und $|[v,w]| \leq |v||w|$. Gleichheit impliziert $v = \lambda w$, d. h. v und w sind linear abhängig. Sind umgekehrt v und w linear abhängig gegeben, dann existiert ein $\mu \in \mathbb{C}$ mit $v = \mu w$ und $|[v,w]| = |\mu||w|^2 \overset{\text{(a)}}{=} |\mu w||w| = |v||w|$.

(c) Sei $[v,w] = a + b\mathrm{i}$. Dann gilt

$$[v,w] + [w,v] = [v,w] + \overline{[v,w]} = 2a \leq 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2|[v,w]|.$$

Es folgt

$$|v+w|^2 = [v+w, v+w] \leq [v,v] + 2|[v,w]| + [w,w] \overset{\text{(b)}}{\leq} |v|^2 + 2|v||w| + |w|^2 = (|v| + |w|)^2$$

und $|v+w| \leq |v| + |w|$. Also ist $|v| = |v + w - w| \leq |v+w| + |w|$ und $|v| - |w| \leq |v+w|$. Vertauschen von v und w liefert $-(|v| - |w|) = |w| - |v| \leq |v+w|$, d. h. $||v| - |w|| \leq |v+w|$. □

Bemerkung 13.6. Sei V ein unitärer Raum.

(a) Eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ von V heißt *Orthonormalbasis*, falls $[b_i, b_j] = \delta_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq n$ gilt. Das Gram-Schmidt-Verfahren zur Berechnung einer Orthonormalbasis funktioniert unverändert für unitäre Räume. Insbesondere besitzt jeder unitäre Raum eine Orthonormalbasis.

(b) Für $U \leq V$ definiert man wie üblich $U^\perp := \{v \in V : \forall u \in U : u \perp v\} \leq V$. Die Regeln aus Lemma 11.15

- $V = U \oplus U^\perp$,
- $(U^\perp)^\perp = U$,
- $U \subseteq W \iff W^\perp \subseteq U^\perp$,

gelten auch für unitäre Räume.

13.2 Adjungierte Abbildungen

Satz 13.7. *Sei V ein unitärer Raum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann existiert genau ein $f^* \in \mathrm{End}(V)$ mit $[f(v), w] = [v, f^*(w)]$ für alle $v, w \in V$.*

Beweis. Sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Orthonormalbasis von V. Wir definieren $f^* \in \mathrm{End}(V)$ durch

$$f^*(b_j) := \sum_{i=1}^{n} [b_j, f(b_i)] b_i$$

für $j = 1, \ldots, n$. Für $v = \sum \lambda_i b_i$ und $w = \sum \mu_j b_j$ gilt

$$[f(v), w] = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_j} [f(b_i), b_j] = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_j} [b_i, [b_j, f(b_i)] b_i] = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_j} [b_i, f^*(b_j)] = [v, f^*(w)].$$

Sei auch $f_1 \in \mathrm{End}(V)$ mit $[f(v), w] = [v, f_1(w)]$ für alle $v, w \in V$. Dann ist $[v, f^*(w) - f_1(w)] = 0$. Für $v := f^*(w) - f_1(w)$ ergibt sich $f^*(w) = f_1(w)$ für alle $w \in V$. Dies zeigt $f_1 = f^*$. □

Definition 13.8. In der Situation von Satz 13.7 nennt man f^* die zu f *adjungierte* Abbildung.

Bemerkung 13.9.

(a) Für $v, w \in V$ gilt $[v, f(w)] = \overline{[f(w), v]} = \overline{[w, f^*(v)]} = [f^*(v), w]$. Insbesondere ist $(f^*)^* = f$.

(b) Für $f, g \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $(\lambda f + g)^* = \overline{\lambda} f^* + g^*$.

(c) Achtung: Wir benutzen für die adjungierte Abbildung von f die gleiche Bezeichnung wie für die zu f duale Abbildung. Obwohl die duale Abbildung in $\mathrm{End}(V^*)$ liegt, besteht ein enger Zusammenhang (Aufgabe II.19).

Definition 13.10. Sei V ein unitärer Raum. Man nennt $f \in \mathrm{End}(V)$

- *hermitesch*, falls $f = f^*$, d. h. $[f(v), w] = [v, f(w)]$ für alle $v, w \in V$.
- *unitär*, falls $[f(v), f(w)] = [v, w]$ für alle $v, w \in V$.
- *normal*, falls $f \circ f^* = f^* \circ f$.

Bemerkung 13.11.

(a) Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ hermitesch. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von f mit Eigenvektor $v \in V$. Dann gilt

$$\lambda |v|^2 = [\lambda v, v] = [f(v), v] = [v, f(v)] = [v, \lambda v] = \overline{\lambda} |v|^2$$

und $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$.

(b) Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ unitär. Für $v \in \mathrm{Ker}\, f$ ist $|v|^2 = [v, v] = [f(v), f(v)] = 0$, d. h. $v = 0$. Daher ist f ein Isomorphismus. Wegen $[f(v), w] = [v, f^{-1}(w)]$ für alle $v, w \in V$ folgt außerdem $f^* = f^{-1}$. Sind $f, g \in \mathrm{End}(V)$ unitär, so auch $f \circ g$ und f^{-1}. Daher bilden die unitären Abbildungen eine Untergruppe $\mathrm{U}(V)$ von $\mathrm{GL}(V)$. Man nennt $\mathrm{U}(V)$ die *unitäre Gruppe* von V.

(c) Sei λ ein Eigenwert einer unitären Abbildung f mit Eigenvektor $v \in V$. Dann gilt $|\lambda|^2 |v|^2 = [\lambda v, \lambda v] = [f(v), f(v)] = [v, v] = |v|^2$ und $|\lambda| = 1$.

(d) Für normale $f \in \mathrm{End}(V)$ und $v \in V$ gilt

$$|f^*(v)|^2 = [f^*(v), f^*(v)] = [f(f^*(v)), v] = [f^*(f(v)), v] = [f(v), f(v)] = |f(v)|^2,$$

also $|f^*(v)| = |f(v)|$.

(e) Hermitesche und unitäre Abbildungen sind offenbar normal.

Definition 13.12. Für $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ sei $A^* := \overline{A}^{\mathrm{t}} = \overline{A^{\mathrm{t}}}$ die zu A *adjungierte* Matrix. Für $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ benutzen wir die Abkürzung $A^{-*} := (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Lemma 13.13. *Sei V unitär mit Orthonormalbasis B und $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt ${}_B[f^*]_B = {}_B[f]_B^*$.*

Beweis. Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, $f(b_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} b_j$ und $f^*(b_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji}^* b_j$ für $i = 1, \ldots, n$. Die Behauptung folgt aus

$$\overline{a_{ji}^*} = [b_j, f^*(b_i)] = [f(b_j), b_i] = a_{ij}. \qquad \square$$

Folgerung 13.14. *Sei V unitär mit Orthonormalbasis B, $f \in \mathrm{End}(V)$ und $A := {}_B[f]_B$. Dann gilt*

(a) f hermitesch $\iff A^* = A \iff A^{\mathrm{t}} = \overline{A}$.

(b) f unitär $\iff A^* = A^{-1} \iff A^{\mathrm{t}} = \overline{A}^{-1}$.

(c) f normal $\iff A^*A = AA^* \iff A^{\mathrm{t}}\overline{A} = \overline{A}A^{\mathrm{t}}$.

Beweis. Es gilt

$$f \text{ hermitesch} \iff f^* = f \overset{13.13}{\iff} A^* = A \iff \overline{A^*} = \overline{A} \iff A^{\mathrm{t}} = \overline{A}.$$

Die anderen Aussagen beweist man analog. $\square$

Definition 13.15. Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt

- *hermitesch*, falls $A^* = A$.
- *unitär*, falls $A^* = A^{-1}$.
- *normal*, falls $AA^* = A^*A$.

Beispiel 13.16.

(a) Hermitesche und unitäre Matrizen sind normal. Diagonalmatrizen sind normal, aber nicht unbedingt hermitesch oder unitär.

(b) Reelle Matrizen sind genau dann hermitesch (bzw. unitär), wenn sie symmetrisch (bzw. orthogonal) sind.

(c) Invertieren, Transponieren und Komplex-Konjugieren sind miteinander vertauschbare Operatoren auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ (vgl. Bemerkung 5.9). Ist A hermitesch (bzw. unitär, normal), so auch $\overline{A}$, A^{t} und A^* (nachrechnen).

Bemerkung 13.17. Die unitären Matrizen bilden eine Untergruppe $\mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, die wie üblich $\mathrm{U}(V)$ entspricht. Für $A \in \mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ gilt $|\det A|^2 = \det(A)\overline{\det(A)} = \det(A^{\mathrm{t}}\overline{A}) = 1$. Nach Bemerkung 13.11 haben auch alle Eigenwerte von A den Betrag 1. Man nennt

$$\mathrm{SU}(n,\mathbb{C}) := \mathrm{U}(n,\mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) \leq \mathrm{U}(n,\mathbb{C})$$

die *spezielle unitäre Gruppe* vom Grad n.

13.3 Der Spektralsatz

Satz 13.18 (Spektralsatz[2])**.** *Sei V unitär und $f \in \mathrm{End}(V)$.Genau dann ist f normal, wenn V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f besitzt. Insbesondere sind normale Endomorphismen diagonalisierbar.*

Beweis. Sei B eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f. Dann ist $A := {}_B[f]_B$ eine Diagonalmatrix. Sicher ist A^* auch eine Diagonalmatrix. Insbesondere sind A und A^* vertauschbar. Nach Folgerung 13.14 ist f normal.

Sei umgekehrt f normal. Wir argumentieren durch Induktion nach $n := \dim V$. Im Fall $n = 1$ liefert jeder normierte Vektor eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Sei $n \geq 2$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt f einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ mit Eigenvektor $b_1 \in V$. O. B. d. A. sei $|b_1| = 1$. Mit f ist auch $g := f - \lambda \mathrm{id}_V$ normal (nachrechnen). Aus Bemerkung 13.11 folgt

$$|f^*(b_1) - \overline{\lambda} b_1| = |g^*(b_1)| = |g(b_1)| = 0,$$

d. h. b_1 ist ein Eigenvektor von f^* zum Eigenwert $\overline{\lambda}$. Für $U := \langle b_1 \rangle$ gilt $V = U \oplus U^\perp$. Für $u \in U^\perp$ ist $[f(u), b_1] = [u, f^*(b_1)] = \lambda[u, b_1] = 0$, also $f(u) \in U^\perp$ und analog $f^*(u) \in U^\perp$. Daher ist die Einschränkung von f auf $U^\perp$ ein normaler Endomorphismus. Nach Induktion existiert eine Orthonormalbasis $b_2, \ldots, b_n$ von $U^\perp$ aus Eigenvektoren von f. Nun ist $b_1, \ldots, b_n$ eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f. □

Bemerkung 13.19. Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, so liefert der Spektralsatz ein $S \in \mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ mit $S^*AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Im Gegensatz zum Hauptachsensatz erhält man nicht, dass S orthogonal (also reell) ist.

Folgerung 13.20. *Sei V unitär und $f \in \mathrm{End}(V)$ normal mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

(a) f hermitesch $\iff$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

(b) f unitär $\iff$ $|\lambda_1| = \ldots = |\lambda_n| = 1$.

Beweis. Nach dem Spektralsatz existiert eine Orthonormalbasis B von V mit $D := {}_B[f]_B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Nach Folgerung 13.14 ist f genau dann hermitesch (bzw. unitär), wenn $\overline{D} = D^{\mathrm{t}} = D$ (bzw. $1_n = D\overline{D} = \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2)$) gilt. Dies zeigt die Behauptung. □

[2]Die Menge der Eigenwerte von $f \in \mathrm{End}(V)$ nennt man das *Spektrum* von f.

Bemerkung 13.21. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ normal. Seien $v, w \in V$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten λ bzw. μ. Wie im Beweis des Spektralsatzes ist w ein Eigenvektor von f^* zum Eigenwert $\overline{\mu}$. Aus

$$\lambda[v,w] = [f(v),w] = [v,f^*(w)] = [v,\overline{\mu}w] = \mu[v,w]$$

folgt $[v,w] = 0$. Daher sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal (wie bei symmetrischen Matrizen, siehe Bemerkung 11.40). Die Orthonormalbasis im Spektralsatz lässt sich also wie beim Hauptachsensatz mit dem Gram-Schmidt-Verfahren bestimmen.

Beispiel 13.22. Für

$$A := \begin{pmatrix} 5\mathrm{i} & -4 & 2 \\ 4 & 5\mathrm{i} & 2\mathrm{i} \\ -2 & 2\mathrm{i} & 8\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

berechnet man

$$\chi_A = (X-5\mathrm{i})^2(X-8\mathrm{i}) - 32\mathrm{i} + 8(X-5\mathrm{i}) + 16(X-8\mathrm{i}) = X^3 - 18\mathrm{i}X^2 - 81X = X(X-9\mathrm{i})^2.$$

Wegen

$$A \sim \begin{pmatrix} 5\mathrm{i} & -4 & 2 \\ 0 & {}^{9\mathrm{i}}\!/_5 & {}^{18\mathrm{i}}\!/_5 \\ 0 & {}^{18\mathrm{i}}\!/_5 & {}^{36\mathrm{i}}\!/_5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5\mathrm{i} & -4 & 2 \\ 0 & {}^{9\mathrm{i}}\!/_5 & {}^{18\mathrm{i}}\!/_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $(2\mathrm{i}, -2, 1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 0. Nach Normierung sei $b_1 := \frac{1}{3}(2\mathrm{i}, -2, 1)$. Der Eigenraum zum Eigenwert $9\mathrm{i}$ wird durch $c_2 := (0,1,2)$ und $c_3 := (\mathrm{i}, 1, 0)$ aufgespannt. Wir stellen fest, dass diese Vektoren orthogonal zu b_1 sind. Daher muss A normal sein. Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert:

$$\begin{aligned} b_2 &:= \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2), \\ c_3' &:= c_3 - [c_3, b_2]b_2 = (\mathrm{i}, {}^4\!/_5, -{}^2\!/_5), \\ b_3 &:= \frac{1}{3\sqrt{5}}(5\mathrm{i}, 4, -2). \end{aligned}$$

Nun ist $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A.

Satz 13.23 (Schur-Zerlegung)**.** *Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert ein $S \in \mathrm{U}(n,\mathbb{C})$, sodass S^*AS eine Dreiecksmatrix ist. Genau dann ist A normal, wenn S^*AS eine Diagonalmatrix ist.*

Beweis. O. B. d. A. sei $n \geq 2$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $v \in \mathbb{C}^n$ ein normierter Eigenvektor zu λ. Wir ergänzen v mit Gram-Schmidt zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$. Nach Wechsel zu dieser Basis gilt $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1 \end{smallmatrix}\right)$ mit $A_1 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$. Induktiv existiert ein $S_1 \in \mathrm{U}(n-1,\mathbb{C})$, sodass $S_1^*A_1S_1$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Jetzt ist $S := \mathrm{diag}(1, S_1) \in \mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ und S^*AS ist eine obere Dreiecksmatrix. Eine untere Dreiecksmatrix erhält man, indem man A^{t} in eine obere Dreiecksmatrix transformiert und anschließend transponiert.

Ist A normal, so ist $D := (d_{ij}) = S^*AS$ eine normale obere Dreiecksmatrix. Wegen

$$\sum_{j\leq i} |d_{ji}|^2 = (D^*D)_{ii} = (DD^*)_{ii} = \sum_{j\geq i} |d_{ij}|^2$$

ist induktiv $d_{ij} = 0$ für $j > i$ und $i = 1, \ldots, n$. Dies zeigt, dass D eine Diagonalmatrix ist. Ist umgekehrt D eine Diagonalmatrix, so ist A nach dem Spektralsatz normal. □

Beispiel 13.24. Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

hat offenbar den Eigenvektor e_3 zum Eigenwert 1. Übergang zur Orthonormalbasis $\{e_3, e_2, e_1\}$ ergibt

$$A \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ im Beweis von Satz 13.23 hat den Eigenvektor $(1+\mathrm{i}, -1)$ zum Eigenwert i. Orthogonal dazu steht $(1, 1-\mathrm{i})$. Nach Normierung erhält man

$$A \approx \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 1 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & -1 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (2+2\mathrm{i})/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} \\ 0 & \mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Satz 13.25 (Trägheitssatz für hermitesche Matrizen)**.** *Für jede hermitesche Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ mit*

$$S^* A S = \mathrm{diag}(1_r, -1_s, 0_t).$$

Die Zahlen r, s, t sind eindeutig bestimmt.

Beweis. Nach dem Spektralsatz können wir $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ annehmen. Nach Folgerung 13.20 sind die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A reell. Sei o. B. d. A. $\lambda_1, \ldots, \lambda_r > 0$, $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_{r+s} < 0$ und $\lambda_{r+s+1} = \ldots = \lambda_n = 0$. Die Gleichung gilt nun mit

$$S := \mathrm{diag}\big(\sqrt{|\lambda_1|}^{-1}, \ldots, \sqrt{|\lambda_{r+s}|}^{-1}, 1_t\big) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Mit $\mathrm{rk}\, A = r + s$ ist t eindeutig bestimmt. Für alle $v \in \langle e_1, \ldots, e_r\rangle \setminus \{0\}$ gilt $vAv^* > 0$. Sei umgekehrt $U \leq \mathbb{C}^n$ mit $uAu^* > 0$ für alle $u \in U \setminus \{0\}$. Für $u \in U \cap \langle e_{r+1}, \ldots, e_n\rangle$ gilt einerseits $uAu^* \geq 0$ und andererseits $uAu^* \leq 0$. Dies zeigt $u = 0$ und $U \cap \langle e_{r+1}, \ldots, e_n\rangle = \{0\}$. Es folgt $\dim U \leq r$. Somit ist r die maximale Dimension eines Unterraums $U \leq \mathbb{C}^n$ mit $uAu^* > 0$ für alle $u \in U \setminus \{0\}$. Auf diese Weise hängt r nicht von der Wahl von S ab. Nun ist auch $s = n - r - t$ eindeutig bestimmt. □

Beispiel 13.26. Die Zahlen r, s, t in Satz 13.25 kann man mit dem modifizierten Gauß-Verfahren aus Bemerkung 12.21 bestimmen (beachte: $1 + 1 \neq 0$ in $\mathbb{C}$). Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
(A|1_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \mathrm{i} & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \mathrm{i} & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mathrm{i}-1 & \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & -2\mathrm{i}-1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2\mathrm{i}-1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2\mathrm{i}-1 & 0 & \mathrm{i} & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2-3\mathrm{i} & 1 & 2\mathrm{i}-1 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (2-3\mathrm{i})/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & (2\mathrm{i}-1)/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
(r, s, t) &= (2, 1, 0), \qquad S^* = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 2-3\mathrm{i} & 1 & 2\mathrm{i}-1 \\ -2\sqrt{5} & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Bemerkung 13.27. Der Satz von Mirsky gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Matrizen mit vorgegebenen Eigenwerten und Hauptdiagonalelementen (deren Summe muss gleich sein). Für hermitesche Matrizen gelten stärkere Einschränkungen an diese Zahlen.

Lemma 13.28. *Seien $\lambda_1 \geq d \geq \lambda_2$ reell. Dann existiert ein $S \in \mathrm{O}(2,\mathbb{R})$, sodass $S^{\mathrm{t}} \operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2)S$ den ersten Eintrag d hat.*

Beweis. Im Fall $\lambda_1 = \lambda_2$ ist $d = \lambda_1$ und $S := 1_2$ erfüllt die Behauptung. Sei also $\lambda_1 > \lambda_2$. Dann ist

$$S = (s_{ij}) := \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}} \begin{pmatrix} \sqrt{d-\lambda_2} & -\sqrt{\lambda_1 - d} \\ \sqrt{\lambda_1 - d} & \sqrt{d-\lambda_2} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2,\mathbb{R}).$$

Für $A = (a_{ij}) := S^{\mathrm{t}} \operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2)S$ gilt

$$a_{11} = \lambda_1 s_{11}^2 + \lambda_2 s_{21}^2 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\big((d-\lambda_2)\lambda_1 + (\lambda_1 - d)\lambda_2\big) = d. \qquad \square$$

Satz 13.29 (Schur-Horn)**.**

(a) Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch mit Hauptdiagonale $d_1 \geq \ldots \geq d_n$ und Eigenwerten $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$, so gilt

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$$

für $k = 1,\ldots,n$ mit Gleichheit im Fall $k = n$.

(b) Sind reelle Zahlen $d_1 \geq \ldots \geq d_n$ und $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ mit $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ für $k = 1,\ldots,n$ und $\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ gegeben, so existiert eine reelle symmetrische Matrix mit Hauptdiagonale $d_1,\ldots,d_n$ und Eigenwerten $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

Beweis (Chan-Li).

(a) Nach dem Spektralsatz existiert eine unitäre Matrix $S := (s_{ij})$ mit

$$A = (a_{ij}) = S^* \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)S.$$

Für $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = \sum_{i=1}^{k} a_{ii} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} \overline{s_{ji}} s_{ji} \lambda_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{k} |s_{ji}|^2. \tag{13.1}$$

Da S unitär ist, gilt $t_j := \sum_{i=1}^{k} |s_{ji}|^2 \leq 1$ mit Gleichheit, falls $k = n$. Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} t_j &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} |s_{ji}|^2 = k, \\ \sum_{i=1}^{k}(d_i - \lambda_i) &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j t_j - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j + \lambda_k \overbrace{\big(k - \sum_{i=1}^{n} t_i\big)}^{=0} \\ &= \sum_{j=1}^{k} \underbrace{(\lambda_j - \lambda_k)}_{\geq 0} \underbrace{(t_j - 1)}_{\leq 0} + \sum_{i=k+1}^{n} t_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_k)}_{\leq 0} \leq 0. \end{aligned}$$

Also ist $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ und $\sum_{i=1}^{n} d_i = \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

(b) Induktion nach n: Im Fall $n = 1$ erfüllt $A := (d_1) = (\lambda_1)$ die Behauptung. Sei $n \geq 2$. Wegen

$$\lambda_1 \geq d_1 \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq \lambda_n$$

existiert ein k mit $\lambda_k \geq d_1 \geq \lambda_{k+1}$. Nach Lemma 13.28 existiert ein $T \in \mathrm{O}(2,\mathbb{R})$, sodass $T^{\mathrm{t}} \operatorname{diag}(\lambda_k, \lambda_{k+1}) T$ Hauptdiagonale (d_1, λ') hat, wobei $\lambda' := \lambda_k + \lambda_{k+1} - d_1$ nach (a). Für

$$S_1 := \operatorname{diag}(1_{k-1}, T, 1_{n-k-1}) P \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$$

mit der Permutationsmatrix $P := P^{\mathrm{t}}_{(1,\dots,k)}$ gilt

$$A := S_1^{\mathrm{t}} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) S_1 = \begin{pmatrix} d_1 & * \\ * & \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) \end{pmatrix},$$

wobei

$$(\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) := (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda', \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_n).$$

Wegen $\lambda_k \geq \lambda' \geq \lambda_{k+1} \geq \lambda_{k+2}$ und $\sum_{i=2}^{l} d_i \leq \sum_{i=1}^{l-1} \mu_i$ existiert nach Induktion ein $U \in \mathrm{O}(n-1,\mathbb{R})$, sodass $U^{\mathrm{t}} \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) U$ Hauptdiagonale $(d_2, \dots, d_n)$ besitzt. Für $S := S_1 \operatorname{diag}(1, U) \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ hat

$$S^{\mathrm{t}} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U^{\mathrm{t}} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$$

Hauptdiagonale $(d_1, \dots, d_n)$ und Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. □

Beispiel 13.30. Wir konstruieren eine symmetrische Matrix mit Eigenwerten $6, 6, 0$ und Hauptdiagonale $5, 5, 2$. Mit den Bezeichnungen aus dem obigen Beweis ist $k = 2$, $\lambda' = 1$ und $(\mu_1, \mu_2) = (6, 1)$. Lemma 13.28 liefert

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -1 \\ 1 & \sqrt{5} \end{pmatrix}, \qquad U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für $S = \operatorname{diag}(1, T) P_{(1,2)} \operatorname{diag}(1, U)$ erhält man

$$\begin{aligned} S^{\mathrm{t}} \operatorname{diag}(6,6,0) S &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & . & . \\ . & 2 & 1 \\ . & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & 1 & . \\ 1 & . & . \\ . & . & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & . & . \\ . & 5 & -\sqrt{5} \\ . & -\sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} . & 1 & . \\ 1 & . & . \\ . & . & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & . & . \\ . & 2 & -1 \\ . & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & . & . \\ . & 2 & 1 \\ . & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & . & -\sqrt{5} \\ . & 6 & . \\ -\sqrt{5} & . & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & . & . \\ . & 2 & -1 \\ . & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

14 Die Jordan-Normalform

14.1 Haupträume

Bemerkung 14.1. Nach Satz 10.34 gibt es zwei Gründe, warum ein Endomorphismus nicht diagonalisierbar ist:

- Das charakteristische Polynom zerfällt nicht in Linearfaktoren.
- Die Eigenräume sind zu „klein“, d. h. die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts ist kleiner als die entsprechende algebraische Vielfachheit.

Über $\mathbb{C}$ tritt das erste Problem nach dem Fundamentalsatz der Algebra nicht auf. Um das zweite Problem zu umgehen, ersetzen wir Eigenräume durch größere Unterräume. Im Folgenden sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

Definition 14.2. Sei $f \in \operatorname{End}(V)$. Ein Unterraum $U \leq V$ heißt *f-invariant*, falls $f(U) \subseteq U$ gilt.

Beispiel 14.3. Für $f \in \operatorname{End}(V)$ sind $\operatorname{Ker} f$ und $f(V)$ stets f-invariante Unterräume, denn $f(\operatorname{Ker}(f)) = \{0\} \subseteq \operatorname{Ker} f$ und $f(f(V)) \subseteq f(V)$.

Bemerkung 14.4. Sei $U \leq V$ ein f-invarianter Unterraum.

(a) Offenbar ist $g := f_{|U} \in \operatorname{End}(U)$ und $\mu_f(g) = 0$. Aus Lemma 10.44 folgt $\mu_g \mid \mu_f$.

(b) Für $v, w \in V$ gilt

$$v + U = w + U \implies v - w \in U \implies f(v) - f(w) = f(v - w) \in U \implies f(v) + U = f(w) + U.$$

Daher ist $\overline{f} \colon V/U \to V/U$, $v + U \mapsto f(v) + U$ ein wohldefinierter Endomorphismus. Wegen $\mu_f(\overline{f}) = \overline{\mu_f(f)} = 0$ ist $\mu_{\overline{f}} \mid \mu_f$.

(c) Sei B_1 eine Basis von U und $B = B_1 \dot\cup B_2$ eine Basis von V. Dann $\overline{B}_2 := \{b + U : b \in B_2\}$ eine Basis von V/U (siehe Beweis von Satz 4.23). Außerdem ist ${}_B[f]_B = \left(\begin{smallmatrix} A & C \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right)$, wobei $A = {}_{B_1}[f_{|U}]_{B_1}$ und $D = {}_{\overline{B}_2}[\overline{f}]_{\overline{B}_2}$. Besitzt U ein f-invariantes Komplement W (d. h. $V = U \oplus W$), so kann man $C = 0$ durch geeignete Basiswahl erreichen. Wir versuchen daher V in möglichst kleine f-invariante Unterräume zu zerlegen.

Definition 14.5. Man nennt $f \in \operatorname{End}(V)$ *trigonalisierbar*, falls eine Basis B von V existiert, sodass ${}_B[f]_B$ eine Dreiecksmatrix ist. Analog heißt $A \in K^{n \times n}$ *trigonalisierbar*, falls A zu einer Dreiecksmatrix ähnlich ist.

Bemerkung 14.6. Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V, sodass ${}_B[f]_B$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Dann ist ${}_{B'}[f]_{B'}$ mit $B' = \{b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1\}$ eine untere Dreiecksmatrix. Man muss in Definition 14.5 also nicht spezifizieren, ob man obere oder untere Dreiecksmatrizen betrachtet (vgl. Satz 15.25).

Beispiel 14.7. Nach der Schur-Zerlegung ist jede komplexe quadratische Matrix trigonalisierbar. Der nächste Satz erweitert Satz 10.52.

Satz 14.8. *Eine Abbildung $f \in \mathrm{End}(V)$ ist genau dann trigonalisierbar, wenn μ_f (oder χ_f) in Linearfaktoren zerfällt.*

Beweis. Ist ${}_B[f]_B$ (für eine Basis B von V) eine Dreiecksmatrix mit Diagonale $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so zerfällt $\chi_f = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n)$ in Linearfaktoren. Nach Cayley-Hamilton und Lemma 10.24 zerfällt auch μ_f in Linearfaktoren.

Nehmen wir umgekehrt an, dass μ_f in Linearfaktoren zerfällt. O. B. d. A. sei $V \neq \{0\}$. Nach Satz 10.50 existiert ein Eigenvektor $v \in V$ von f. Offenbar ist $U := \langle v \rangle$ f-invariant. Sei $\overline{V} := V/U$ und $\overline{f}$ wie in Bemerkung 14.4. Dann ist $\mu_{\overline{f}} \mid \mu_f$. Nach Lemma 10.24 zerfällt auch $\mu_{\overline{f}}$ in Linearfaktoren. Durch Induktion nach $\dim V$ erhalten wir eine Basis $\overline{B} = \{\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_{n-1}}\}$ von $\overline{V}$, sodass ${}_{\overline{B}}[\overline{f}]_{\overline{B}}$ eine untere Dreiecksmatrix ist. Wir wählen $b_i \in \overline{b_i}$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Dann gilt $f(b_i) \in \langle b_i, \ldots, b_{n-1}, v \rangle$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Daher ist $B := \{b_1, \ldots, b_{n-1}, v\}$ eine Basis von V, sodass ${}_B[f]_B$ eine untere Dreiecksmatrix ist. □

Lemma 14.9. *Sei $f \in \mathrm{End}(V)$.*

(a) Ist $U \leq V$ f-invariant, so ist $U^0 \leq V^*$ f^*-invariant.

(b) Ist $U \leq V^*$ f^*-invariant, so ist $U_0 \leq V$ f-invariant.

Beweis. Die dualen Komplemente U^0, U_0 und die duale Abbildung f^* wurden in Abschnitt 7.3 definiert.

(a) Sei $\gamma \in U^0$. Für alle $u \in U$ gilt $f^*(\gamma)(u) = \gamma(f(u)) = 0$, d. h. $f^*(\gamma) \in U^0$.

(b) Sei $v \in U_0$. Für alle $\gamma \in U$ gilt $\gamma(f(v)) = f^*(\gamma)(v) = 0$, d. h. $f(v) \in U_0$. □

Lemma 14.10. *Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ diagonalisierbar und $U \leq V$ ein f-invarianter Unterraum. Dann ist auch die Einschränkung $f_{|U}$ diagonalisierbar.*

Beweis. Für das Minimalpolynom μ_1 von $f_{|U}$ gilt $\mu_1 \mid \mu_f$ nach Bemerkung 14.4. Nach Satz 10.52 zerfällt μ_f in paarweise verschiedene Linearfaktoren. Nach Lemma 10.24 gilt dies auch für μ_1. □

Lemma 14.11 (Simultane Diagonalisierung)**.** *Seien $f, g \in \mathrm{End}(V)$ diagonalisierbar. Genau dann gilt $f \circ g = g \circ f$, wenn f und g* simultan *diagonalisierbar sind, d. h. es existiert eine Basis B von V, sodass ${}_B[f]_B$ und ${}_B[g]_B$ Diagonalmatrizen sind.*

Beweis. Sei B eine Basis von V, sodass $D_f := {}_B[f]_B$ und $D_g := {}_B[g]_B$ Diagonalmatrizen sind. Aus $D_f D_g = D_g D_f$ folgt dann $f \circ g = g \circ f$. Sei umgekehrt $f \circ g = g \circ f$. Für die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ von f gilt $V = E_{\lambda_1}(f) \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k}(f)$, da f diagonalisierbar ist. Für $v \in U := E_{\lambda_i}(f)$ gilt

$$f(g(v)) = g(f(v)) = \lambda_i g(v)$$

und $g(v) \in U$. Daher ist U ein g-invarianter Unterraum. Nach Lemma 14.10 ist $g_{|U}$ diagonalisierbar. Man kann also eine Basis von V wählen, die aus gemeinsamen Eigenvektoren von f und g besteht. □

Lemma 14.12 (Simultane Trigonalisierung)**.** *Seien $f, g \in \mathrm{End}(V)$ vertauschbar und trigonalisierbar. Dann sind f und g* simultan *trigonalisierbar, d. h. es existiert eine Basis B von V, sodass ${}_B[f]_B$ und ${}_B[g]_B$ untere Dreiecksmatrizen sind.*

Beweis. O. B. d. A. sei $V \neq \{0\}$. Nach Satz 14.8 besitzt f einen Eigenwert $\lambda \in K$. Wie im Beweis von Lemma 14.11 ist $U := E_\lambda(f)$ ein g-invarianter Unterraum. Das Minimalpolynom von $g_{|U}$ teilt μ_g und zerfällt daher in Linearfaktoren. Also existiert ein Eigenvektor $u \in U$ von g. Nun ist $W := \langle u \rangle$ sowohl f-invariant als auch g-invariant. Sei $\overline{V} := V/W$, $\overline{f} \in \mathrm{End}(\overline{V})$ und $\overline{g} \in \mathrm{End}(\overline{V})$ wie im Beweis von Satz 14.8. Wegen $\mu_{\overline{f}} \mid \mu_f$ und $\mu_{\overline{g}} \mid \mu_g$ kann man induktiv annehmen, dass $\overline{f}$ und $\overline{g}$ simultan trigonalisierbar sind. Die Behauptung folgt nun wie im Beweis von Satz 14.8. □

Beispiel 14.13. Im Gegensatz zur simultanen Diagonalisierung ist die Umkehrung von Lemma 14.12 falsch: $\mathrm{diag}(1,0)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sind trivialerweise trigonalisierbar, aber nicht vertauschbar.

Definition 14.14. Sei $\dim V = n$ und $f \in \mathrm{End}(V)$ mit Eigenwert $\lambda \in K$. Man nennt

$$H_\lambda(f) := \mathrm{Ker}\big((f - \lambda \,\mathrm{id}_V)^n\big) \leq V$$

den *Hauptraum* von f zu λ. Ist λ Eigenwert einer Matrix $A \in K^{n\times n}$, so definiert man analog $H_\lambda(A) := \mathrm{Ker}\big((A - \lambda 1_n)^n\big)$.

Beispiel 14.15. Sei $f \in \mathrm{End}(K^2)$ mit $A := [f] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $E_1(f) = \langle e_1 \rangle$. Wegen $(A - 1_2)^2 = 0$ ist $H_1(f) = K^2$, d. h. der Hauptraum ist größer als der Eigenraum.

Bemerkung 14.16. Für $v \in E_\lambda(f)$ gilt

$$(f - \lambda \,\mathrm{id}_V)^n(v) = (f - \lambda \,\mathrm{id}_V)^{n-1}\big((f - \lambda \,\mathrm{id}_V)(v)\big) = (f - \lambda \,\mathrm{id}_V)^{n-1}(0) = 0.$$

Dies zeigt $E_\lambda(f) \subseteq H_\lambda(f)$. Offenbar ist f mit $f - \lambda \,\mathrm{id}$ und $(f - \lambda \,\mathrm{id})^n$ vertauschbar. Für $v \in H_\lambda(f)$ gilt daher

$$(f - \lambda \,\mathrm{id}_V)^n(f(v)) = \big((f - \lambda \,\mathrm{id}_V)^n \circ f\big)(v) = f\big((f - \lambda \,\mathrm{id}_V)^n(v)\big) = f(0) = 0.$$

Also ist $f(v) \in H_\lambda(f)$ und $H_\lambda(f)$ ist f-invariant. Wir zeigen als Nächstes, dass $H_\lambda(f)$ ein f-invariantes Komplement besitzt.

Lemma 14.17 (Fitting)**.** *Sei $\dim V = n$ und $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann ist*

$$\boxed{V = f^n(V) \oplus \mathrm{Ker}(f^n)}$$

eine Zerlegung in f-invariante Unterräume. Für $m \geq n$ ist $\mathrm{Ker}(f^m) = \mathrm{Ker}(f^n)$.

Beweis. Für $v \in \mathrm{Ker}(f^k)$ gilt $f^{k+1}(v) = f(f^k(v)) = f(0) = 0$. Dies zeigt $\mathrm{Ker}\, f \leq \mathrm{Ker}(f^2) \leq \ldots$. Da die Dimension dieser Unterräume durch n beschränkt ist, existiert ein $k \leq n$ mit $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1})$. Für $v \in \mathrm{Ker}(f^{k+2})$ gilt $f^{k+1}(f(v)) = f^{k+2}(v) = 0$, also $f(v) \in \mathrm{Ker}(f^{k+1}) = \mathrm{Ker}(f^k)$. Dies zeigt $f^{k+1}(v) = 0$ und $v \in \mathrm{Ker}(f^{k+1})$. Induktiv erhält man

$$\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1}) = \ldots = \mathrm{Ker}(f^n) = \mathrm{Ker}(f^{n+1}) = \ldots.$$

Für $v \in \mathrm{Ker}(f^n) \cap f^n(V)$ existiert ein $w \in V$ mit $v = f^n(w)$. Wegen $f^{2n}(w) = f^n(v) = 0$ ist $w \in \mathrm{Ker}(f^{2n}) = \mathrm{Ker}(f^n)$ und es folgt $v = f^n(w) = 0$. Also ist $\mathrm{Ker}(f^n) \cap f^n(V) = \{0\}$. Der Homomorphiesatz zeigt $V = \mathrm{Ker}(f^n) \oplus f^n(V)$. Wegen $f(\mathrm{Ker}(f^n)) \subseteq \mathrm{Ker}(f^{n-1}) \subseteq \mathrm{Ker}(f^n)$ und $f(f^n(V)) = f^n(f(V)) \subseteq f^n(V)$ sind beide Unterräume f-invariant. □

Bemerkung 14.18. Seien $\lambda, \lambda' \in K$ verschiedene Eigenwerte von $f \in \mathrm{End}(V)$. Für $U := H_\lambda(f) \cap H_{\lambda'}(f)$ gilt

$$(f - \lambda \,\mathrm{id})^n(U) = \{0\} = (f - \lambda' \,\mathrm{id})^n(U).$$

Das Minimalpolynom der Einschränkung $g := f_{|U} \in \mathrm{End}(U)$ teilt daher $(X - \lambda)^n$ und $(X - \lambda')^n$ nach Lemma 10.44. Aus Lemma 10.24 folgt $\mu_g = 1$ und $U = \{0\}$.

Satz 14.19 (Hauptraumzerlegung)**.** *Sei $f \in \mathrm{End}(V)$, sodass μ_f in Linearfaktoren zerfällt. Dann gilt*

$$V = H_{\lambda_1}(f) \oplus \ldots \oplus H_{\lambda_k}(f)$$

für die verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ von f.

Beweis. Wir argumentieren durch Induktion nach $n := \dim V$. Der Fall $n = 1$ ist trivial. Sei also $n \geq 2$ und die Behauptung für kleinere n bereits bewiesen. Da μ_f in Linearfaktoren zerfällt, besitzt f einen Eigenwert $\lambda = \lambda_1 \in K$ nach Satz 10.50. Für $g := f - \lambda \,\mathrm{id}_V$ gilt

$$V = g^n(V) \oplus \mathrm{Ker}(g^n) = g^n(V) \oplus H_\lambda(f)$$

nach Fitting. Für $U := g^n(V)$ gilt $f(U) = (g + \lambda \,\mathrm{id})(U) \subseteq g(U) + U \subseteq U$, d. h. U ist f-invariant. Sei $h := f_{|U} \in \mathrm{End}(U)$ und $d := \dim U$. Nach Bemerkung 14.4 ist $\mu_h \mid \mu_f$ und μ_h zerfällt in Linearfaktoren (Lemma 10.24). Wegen $\dim H_\lambda(f) \geq \dim E_\lambda(f) \geq 1$ ist $k < n$. Nach Induktion gilt daher

$$U = H_{\lambda_2}(h) \oplus \ldots \oplus H_{\lambda_k}(h)$$

für die verschiedenen Eigenwerte $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ von h. Wegen $E_{\lambda_i}(h) \subseteq E_{\lambda_i}(f)$ sind $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ auch Eigenwerte von f. Wegen $E_{\lambda_i}(h) \cap H_\lambda(f) \leq U \cap H_\lambda(f) = \{0\}$ ist $\lambda \neq \lambda_i$ für $i = 2, \ldots, k$. Sei umgekehrt $\mu \neq \lambda$ ein Eigenwert von f. Wie üblich ist $H_\mu(f)$ g-invariant. Wegen

$$\mathrm{Ker}(g) \cap H_\mu(f) = E_\lambda(f) \cap H_\mu(f) \leq H_\lambda(f) \cap H_\mu(f) \overset{14.18}{=} \{0\}$$

ist die Einschränkung von g auf $H_\mu(f)$ injektiv, also auch surjektiv. Es folgt

$$H_\mu(f) = g^n(H_\mu(f)) = U \cap H_\mu(f) = \mathrm{Ker}\big((h - \lambda_i \,\mathrm{id}_U)^n\big) \overset{14.17}{=} \mathrm{Ker}\big((h - \mu \,\mathrm{id}_U)^d\big) = H_\mu(h).$$

Wegen $E_\mu(f) \leq U$ ist μ ein Eigenwert von h, d. h. $\mu = \lambda_i$ für ein $i \geq 2$. Insgesamt erhält man

$$V = H_\lambda(f) \oplus U = H_\lambda(f) \oplus H_{\lambda_2}(h) \oplus \ldots \oplus H_{\lambda_k}(h) = H_{\lambda_1}(f) \oplus \ldots \oplus H_{\lambda_k}(f). \qquad \square$$

Bemerkung 14.20. Zerfällt μ_f in paarweise verschiedene Linearfaktoren, so ist f diagonalisierbar (Satz 10.52). Die Hauptraumzerlegung ist dann genau die Zerlegung in Eigenräume, denn $E_\lambda(f) \subseteq H_\lambda(f)$.

Beispiel 14.21. Sei

$$A := \begin{pmatrix} . & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & . \\ 1 & 1 & . & 1 \\ . & . & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{4\times 4}.$$

Da 0 und 1 die einzig möglichen Eigenwerte sind, berechnen wir probeweise

$$A^2 = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & 1 & . & . \\ 1 & . & 1 & . \\ 1 & 1 & 1 & . \end{pmatrix}, \qquad (A - 1_4)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & . & 1 & . \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ . & . & 1 & . \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man sieht $(0,0,0,1), (1,0,1,0) \in H_0(A)$ und $(0,1,1,0), (0,1,0,1) \in H_1(A)$. Aus Dimensionsgründen folgt

$$\mathbb{F}_2^4 = H_0(A) \oplus H_1(A) = \langle (0,0,0,1), (1,0,1,0) \rangle \oplus \langle (0,1,1,0), (0,1,0,1) \rangle.$$

14.2 Jordanblöcke

Bemerkung 14.22. Nach der Hauptraumzerlegung interessieren wir uns für Basen von Haupträumen.

Definition 14.23. Für $\lambda \in K$ und $n \geq 1$ nennt man

$$J_n(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

einen *Jordanblock* zum Eigenwert λ.[1]

Bemerkung 14.24. Offenbar hat $A := J_n(\lambda)$ das charakteristische Polynom $\chi_A = (X - \lambda)^n$, d. h. λ hat algebraische Vielfachheit n. Andererseits hat λ geometrische Vielfachheit $\dim E_\lambda(A) = 1$. Somit ist A besonders weit davon entfernt diagonalisierbar zu sein (Satz 10.34). Nach Cayley-Hamilton ist $\mu_A \mid \chi_A$. Wegen

$$(A - \lambda 1_n)^{n-1} e_1 = J_n(0)^{n-1} e_1 = J_n(0)^{n-2} e_2 = \ldots = e_n \neq 0$$

gilt $\mu_A = \chi_A$.

Definition 14.25. Man nennt $f \in \mathrm{End}(V)$ (bzw. $A \in K^{n \times n}$) *nilpotent*, falls $f^m = f \circ \ldots \circ f = 0$ (bzw. $A^m = 0_n$) für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel 14.26. Sei A eine strikte (obere oder untere) Dreiecksmatrix. Dann ist $\chi_A = X^n$. Nach Cayley-Hamilton ist $A^n = \chi_A(A) = 0_n$. Also ist A nilpotent. Insbesondere sind Jordanblöcke zum Eigenwert 0 nilpotent.

Bemerkung 14.27. Ist $A \in K^{n \times n}$ nilpotent, so ist $\mu_A \mid X^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Wegen $\deg \mu_A \leq n$ ist $\mu_A \mid X^n$ und $A^n = 0$. Der folgende Satz liefert ein kanonisches Repräsentantensystem für die Ähnlichkeitsklassen von nilpotenten Matrizen. Die Anzahl der Ähnlichkeitsklassen ist die Anzahl $p(n)$ der *Partitionen* von n, d. h. Zerlegungen der Form $n = n_1 + \ldots + n_k$ mit $n_1 \geq \ldots \geq n_k \geq 1$. Zum Beispiel gilt $p(5) = 7$, denn

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Man kennt keine einfache Formel für $p(n)$.

Satz 14.28. *Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent. Dann existiert eine Basis B von V, sodass*

$$_B[f]_B = \mathrm{diag}(J_{n_1}(0), \ldots, J_{n_s}(0)).$$

Die Zahlen $n_1 \geq \ldots \geq n_s \geq 1$ sind durch die Gleichungen

$$\boxed{\left|\{1 \leq i \leq s : n_i \geq k\}\right| = \mathrm{rk}(f^{k-1}) - \mathrm{rk}(f^k)} \qquad (k \in \mathbb{N}) \tag{14.1}$$

eindeutig bestimmt. Insbesondere ist $s = \dim \mathrm{Ker}(f)$.

[1] In manchen Büchern benutzt man $J_n(\lambda)^{\mathrm{t}}$. Das macht keinen wesentlichen Unterschied (Bemerkung 14.45).

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $f^m = 0 \neq f^{m-1}$. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $f(\operatorname{Ker}(f^k)) \subseteq \operatorname{Ker}(f^{k-1})$. Nach Folgerung 4.16 existieren Unterräume $U_1, \ldots, U_m$ mit

$$\begin{aligned} V = \operatorname{Ker}(f^m) &= \operatorname{Ker}(f^{m-1}) \oplus U_1, \\ \operatorname{Ker}(f^{m-1}) &= \big(\operatorname{Ker}(f^{m-2}) + f(U_1)\big) \oplus U_2, \\ &\vdots \\ \operatorname{Ker} f &= \big(f^{m-1}(U_1) + \ldots + f(U_{m-1})\big) \oplus U_m. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass alle Summen direkt sind. Dies ist für die erste Summe gegeben. Sei induktiv bereits gezeigt:

$$\operatorname{Ker}(f^{m-k+1}) = \operatorname{Ker}(f^{m-k}) \oplus f^{k-1}(U_1) \oplus f^{k-2}(U_2) \oplus \ldots \oplus f(U_{k-1}) \oplus U_k. \tag{14.2}$$

Sei $w + f^k(u_1) + \ldots + f(u_k) = 0$ mit $w \in \operatorname{Ker}(f^{m-k-1})$ und $u_i \in U_i$ für $i = 1, \ldots, k$. Dann folgt

$$\begin{aligned} f^{m-k}\big(f^{k-1}(u_1) + \ldots + u_k\big) &= f^{m-k-1}\big(f^k(u_1) + \ldots + f(u_k)\big) \\ &= f^{m-k-1}\big(w + f^k(u_1) + \ldots + f(u_k)\big) = f^{m-k-1}(0) = 0 \end{aligned}$$

und

$$f^{k-1}(u_1) + \ldots + u_k \in \operatorname{Ker}(f^{m-k}) \cap \big(f^{k-1}(U_1) \oplus \ldots \oplus f(U_{k-1}) \oplus U_k\big) \overset{(14.2)}{=} \{0\}.$$

Dies zeigt $f^{k-1}(u_1) = \ldots = u_k = 0$ (Lemma 8.9) und es folgt $w = 0$. Also ist

$$\operatorname{Ker}(f^{m-k}) = \operatorname{Ker}(f^{m-k-1}) \oplus f^k(U_1) \oplus f^{k-1}(U_2) \oplus \ldots \oplus f(U_k) \oplus U_{k+1}$$

wie gewünscht.

Insgesamt ist

$$V = U_1 \oplus f(U_1) \oplus \ldots \oplus f^{m-1}(U_1) \oplus U_2 \oplus f(U_2) \oplus \ldots \oplus f^{m-2}(U_2) \oplus \ldots \oplus U_m.$$

Sei $b_{i1}, \ldots, b_{ik_i}$ eine Basis von U_i für $i = 1, \ldots, m$ (der Fall $U_i = \{0\}$ mit $k_i = 0$ ist zugelassen). Wegen $\operatorname{Ker}(f^j) \cap U_i = \{0\}$ ist die Einschränkung $f^j_{|U_i}$ für $j = 1, \ldots, m-i$ injektiv (Lemma 7.7). Insbesondere ist $f^j(b_{i1}), \ldots, f^j(b_{ik_i})$ eine Basis von $f^j(U_i)$. Also ist

$$B := \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{k_i} \big\{b_{ij}, f(b_{ij}), \ldots, f^{m-i}(b_{ij})\big\}$$

eine Basis von V. Wegen $U_i \subseteq \operatorname{Ker}(f^{m-i+1})$ ist $f^{m-i+1}(b_{ij}) = 0$. Somit entsprechen die Elemente $b_{ij}, f(b_{ij}), \ldots, f^{m-i}(b_{ij})$ dem Jordanblock $J_{m-i+1}(0)$ in ${}_B[f]_B$. Insgesamt hat ${}_B[f]_B$ nun die gewünschte Form. Außerdem ist

$$\begin{aligned} k_1 + \ldots + k_l \;&=\; \dim\big(f^{l-1}(U_1) \oplus f^{l-2}(U_2) \oplus \ldots \oplus U_l\big) = \dim \operatorname{Ker}(f^{m-l+1}) - \dim \operatorname{Ker}(f^{m-l}) \\ &\overset{7.12}{=} \operatorname{rk}(f^{m-l}) - \operatorname{rk}(f^{m-l+1}) \end{aligned}$$

die Anzahl der Jordanblöcke $J_{n_i}(0)$ mit $n_i \geq m - l + 1$. Indem man $m - l + 1$ durch k ersetzt, folgt (14.1). Die letzte Behauptung erhält man mit $k = 1$ in (14.1). □

Bemerkung 14.29. In der Situation von Satz 14.28 gilt

$$\big|\{1 \leq i \leq s : n_i = k\}\big| = \big|\{1 \leq i \leq s : n_i \geq k\}\big| - \big|\{1 \leq i \leq s : n_i \geq k+1\}\big|$$

$$= \operatorname{rk}(f^{k-1}) + \operatorname{rk}(f^{k+1}) - 2\operatorname{rk}(f^k)$$

für $k \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $\operatorname{rk}(f^{k-1}) - \operatorname{rk}(f^k) \geq \operatorname{rk}(f^k) - \operatorname{rk}(f^{k+1}) \geq 0$, d. h. der Abfall der Folge $\operatorname{rk} f$, $\operatorname{rk}(f^2), \ldots$ kann höchstens kleiner werden.[2]

Beispiel 14.30. Sei $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^5)$ mit

$$A := [f] = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = 0.$$

Also ist $\operatorname{rk}(f^2) = 1$. Wie im Beweis von Satz 14.28 können wir $b_1 := e_1 \notin \operatorname{Ker}(f^2)$ und $U_1 := \langle b_1 \rangle$ mit $\mathbb{R}^5 = \operatorname{Ker}(f^2) \oplus \langle b_1 \rangle$ wählen. Weiter ist

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker}(f) \oplus f(U_1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Mit $b_2 := e_3 \in \operatorname{Ker}(f^2) \setminus \big(\operatorname{Ker}(f) \oplus f(U_1)\big)$ und $U_2 := \langle b_2 \rangle$ gilt $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f) \oplus f(U_1) \oplus U_2$. Schließlich ist $\operatorname{Ker} f = f^2(U_1) \oplus f(U_2)$ (also $U_3 := \{0\}$). Bezüglich der Basis $B := \{b_1, f(b_1), f^2(b_1), b_2, f(b_2)\}$ hat f die Darstellungsmatrix $\operatorname{diag}\big(J_3(0), J_2(0)\big)$.

Satz 14.31. *Sei $f \in \operatorname{End}(V)$, sodass μ_f in Linearfaktoren zerfällt. Dann existiert eine Basis B von V mit*

$$_B[f]_B = \operatorname{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), \ldots, J_{n_s}(\lambda_s)), \qquad \text{(JORDAN-Normalform)}$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in K$ die Eigenwerte von f sind (möglicherweise mit Wiederholungen). Die Jordanblöcke $J_{n_i}(\lambda_i)$ sind bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien $\rho_1, \ldots, \rho_k \in K$ die verschiedenen Eigenwerte von f und $H_i := H_{\rho_i}(f)$ für $i = 1, \ldots, k$. Nach der Hauptraumzerlegung gilt $V = H_1 \oplus \ldots \oplus H_k$. Für $g_i := (f - \rho_i \operatorname{id}_V)_{|H_i}$ gilt $g_i^n = 0$, wobei $n := \dim V$. Nach Satz 14.28 existiert eine Basis B_i von H_i mit

$$_{B_i}[g_i]_{B_i} = \operatorname{diag}\big(J_{m_1}(0), \ldots, J_{m_{t_i}}(0)\big).$$

[2] Eine Zahlenfolge mit dieser Eigenschaft nennt man *konvex*.

Nach Satz 7.18 ist

$$\begin{aligned}{}_{B_i}[f_{|H_i}]_{B_i} &= {}_{B_i}[g_i + \rho_i \operatorname{id}_{H_i}]_{B_i} = {}_{B_i}[g_i]_{B_i} + \rho_i {}_{B_i}[\operatorname{id}_{H_i}]_{B_i} = \operatorname{diag}\big(J_{m_1}(0), \ldots, J_{m_{t_i}}(0)\big) + \rho_i 1_{\dim H_i} \\ &= \operatorname{diag}\big(J_{m_1}(\rho_i), \ldots, J_{m_{t_i}}(\rho_i)\big).\end{aligned}$$

Also ist $B := B_1 \cup \ldots \cup B_k$ eine geeignete Basis (ρ_i tritt in $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ genau t_i-mal auf). Für ein fest gewähltes Paar (n_i, λ_i) ergibt sich die Anzahl der Blöcke $J_{n_i}(\lambda_i)$ aus Bemerkung 14.29 angewendet auf g_i. □

Folgerung 14.32. *Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ besitzt eine Jordan-Normalform (genauer: A ist zu einer Jordan-Normalform ähnlich).*

Beweis. Nach Folgerung 11.35 zerfällt μ_A in Linearfaktoren. □

Bemerkung 14.33.

(a) Da man die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ in der Regel nicht sinnvoll ordnen kann (vgl. Bemerkung 11.26), gibt es im Gegensatz zu Satz 14.28 keine kanonische Reihenfolge der Jordanblöcke. Man kann jedoch die *lexikografische* Ordnung

$$x <_l y \iff \operatorname{Re}(x) < \operatorname{Re}(y) \vee \big(\operatorname{Re}(x) = \operatorname{Re}(y) \wedge \operatorname{Im}(x) < \operatorname{Im}(y)\big)$$

auf $\mathbb{C}$ definieren und die Jordanblöcke zunächst nach Größe und dann nach Eigenwert bzgl. $<_l$ sortieren. Im Folgenden sprechen wir etwas ungenau von *der* Jordan-Normalform von f.

(b) Sei $A \in K^{n\times n}$. In Satz 15.39 konstruieren wir einen Körper $L \supseteq K$, sodass μ_A in $L[X]$ in Linearfaktoren zerfällt. Man kann dann A als Matrix in $L^{n\times n}$ auffassen und dort die Jordan-Normalform bestimmen.

Beispiel 14.34. Sei $f \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^3)$ mit

$$A := [f] = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -5-\mathrm{i} & -\mathrm{i} & -1 \\ -9 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Durch Laplace-Entwicklung nach der zweiten Spalte erhält man

$$\chi_f = \chi_A = (X+\mathrm{i})\big((X-5)(X+1)+9\big) = (X+\mathrm{i})(X^2-4X+4) = (X+\mathrm{i})(X-2)^2.$$

Also sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -\mathrm{i}$ die Eigenwerte von f. Offensichtlich ist $b_3 := e_2$ ein Eigenvektor zu λ_2. Wegen

$$A - 2\cdot 1_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -5-\mathrm{i} & -2-\mathrm{i} & -1 \\ -9 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -5-\mathrm{i} & -2-\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\operatorname{rk}(f - 2\operatorname{id}) = 2$, d. h. $\lambda_1 = 2$ hat geometrische Vielfachheit 1. Also ist f nicht diagonalisierbar und die Jordan-Normalform von f muss $\operatorname{diag}\big(J_2(2), J_1(-\mathrm{i})\big)$ sein. Wegen

$$(A - 2\cdot 1_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3+4\mathrm{i} & 3+4\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

können wir $b_1 := e_3 \in \operatorname{Ker}\big((f - 2\,\mathrm{id})^2\big) \setminus \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$ wie in Beispiel 14.30 wählen. Für

$$b_2 := (f - 2\,\mathrm{id})(b_1) = (1, -1, -3)$$

gilt $f(b_1) = 2b_1 + b_2$ und $f(b_2) = (f - 2\,\mathrm{id})(b_2) + 2b_2 = 2b_2$. Für die Basis $B := \{b_1, b_2, b_3\}$ erhält man

$${}_B[f]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\big(J_2(2), J_1(-\mathrm{i})\big).$$

14.3 Anwendungen

Satz 14.35. *Sei $J := \operatorname{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), \ldots, J_{n_t}(\lambda_t))$ die Jordan-Normalform von $A \in K^{n\times n}$. Seien $\rho_1, \ldots, \rho_k$ die verschiedenen Eigenwerte von A. Für $i = 1, \ldots, k$ seien a_i, m_i und s_i die Anzahl, das Maximum und die Summe der n_j mit $\lambda_j = \rho_i$. Dann ist a_i die geometrische Vielfachheit von ρ_i und*

$$\chi_A = (X - \rho_1)^{s_1} \ldots (X - \rho_k)^{s_k}, \qquad \mu_A = (X - \rho_1)^{m_1} \ldots (X - \rho_k)^{m_k}.$$

Insbesondere ist A genau dann diagonalisierbar, wenn J eine Diagonalmatrix ist.

Beweis. Man sieht leicht $\operatorname{rk}(J - \rho_i 1_n) = n - a_i$, d. h. a_i ist die geometrische Vielfachheit von ρ_i (vgl. Satz 14.28). Da J eine untere Dreiecksmatrix ist, ist s_i die algebraische Vielfachheit von ρ_i. Da μ_A nicht von der Basiswahl abhängt, gilt

$$0 = \mu_A(J) = \operatorname{diag}\big(\mu_A(J_{n_1}(\lambda_1)), \ldots, \mu_A(J_{n_t}(\lambda_t))\big).$$

Aus Bemerkung 14.24 folgt $\mu_A = (X - \rho_1)^{m_1} \ldots (X - \rho_k)^{m_k}$. Die letzte Behauptung gilt nach Satz 10.52. □

Beispiel 14.36. Für $A = \operatorname{diag}(J_3(1), J_2(1), J_4(\mathrm{i}))$ gilt $\chi_A = (X-1)^5(X-\mathrm{i})^4$ und $\mu_A = (X-1)^3(X-\mathrm{i})^4$.

Folgerung 14.37. *Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Im Fall $n \leq 3$ gilt*

$$A \approx B \iff \chi_A = \chi_B,\ \mu_A = \mu_B.$$

Im Fall $n \leq 6$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $A \approx B$.

(2) $\chi_A = \chi_B$, $\mu_A = \mu_B$ und die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A stimmen mit denen von B überein.

Beweis. Bekanntlich impliziert $A \approx B$ die jeweils andere Aussage. Sei nun $n \leq 3$, $\chi_A = \chi_B$ und $\mu_A = \mu_B$. Dann haben A und B die gleichen Eigenwerte mit den gleichen algebraischen Vielfachheiten. Sei λ ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit $r \leq 3$. Für die entsprechenden Größen der Jordanblöcke $n_1 \geq \ldots \geq n_k$ von A gilt $r = n_1 + \ldots + n_k$. Da n_1 durch μ_A festgelegt ist, sind auch k und $n_2, \ldots, n_k$ durch r eindeutig bestimmt. Also haben A und B die gleiche Jordan-Normalform. Es folgt $A \approx B$.

Sei jetzt $n \leq 6$ und (2) erfüllt. Neben r und n_1 ist nun auch die geometrische Vielfachheit k von λ gegeben. Also ist zu zeigen, dass eine Partition von $r \leq 6$ durch ihren größten Teil n_1 und die Anzahl der Teile k eindeutig bestimmt ist. Für $n_1 \leq 2$ ist die Anzahl der Einsen und Zweien offensichtlich durch r und k bestimmt (sogar für alle $r \in \mathbb{N}$). Für $n_1 \geq 3$ ist $(n_2, \ldots, n_k)$ eine Partition von $r - n_1 \leq 3$ in $k - 1$ Teile. Dafür gibt es nur eine Möglichkeit. □

Beispiel 14.38. Die Matrizen

$$\operatorname{diag}(J_2(0), J_2(0)) \not\approx \operatorname{diag}(J_2(0), J_1(0), J_1(0)),$$
$$\operatorname{diag}(J_3(0), J_2(0), J_2(0)) \not\approx \operatorname{diag}(J_3(0), J_3(0), J_1(0))$$

zeigen, dass man Folgerung 14.37 nicht auf $n = 4$ bzw. $n = 7$ erweitern kann.

Satz 14.39. *Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist genau dann nilpotent, wenn $\operatorname{tr}(A^k) = 0$ für $k = 1, \ldots, n$ gilt.*

Beweis. O. B. d. A. sei A in Jordan-Normalform mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{C}$. Sei m_i die algebraische Vielfachheit von λ_i. Da A^k eine untere Dreiecksmatrix ist, erhält man

$$\operatorname{tr}(A^k) = m_1\lambda_1^k + \ldots + m_s\lambda_s^k$$

für $k \in \mathbb{N}$. Ist A nilpotent, so gilt $s = 1$, $\lambda_1 = 0$ und $\operatorname{tr}(A^k) = 0$ für $k \in \mathbb{N}$.

Sei umgekehrt $\operatorname{tr}(A^k) = m_1\lambda_1^k + \ldots + m_s\lambda_s^k = 0$ für $k = 1, \ldots, n$. Nehmen wir indirekt an, dass A nicht nilpotent ist. O. B. d. A. sei $\lambda_i \neq 0$ für $i = 1, \ldots, s$. Dann ist $(m_1, \ldots, m_s)^{\mathrm{t}}$ eine Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix $V = (\lambda_j^i) \in \mathbb{C}^{s\times s}$. Nach Vandermonde ist allerdings $\det V = \lambda_1 \ldots \lambda_s \det(\lambda_j^{i-1}) \neq 0$. Widerspruch. □

Bemerkung 14.40. Satz 14.39 gilt nicht über beliebigen Körpern. Zum Beispiel ist $\operatorname{tr}(1_2^k) = \operatorname{tr} 1_2 = 0$ in $\mathbb{F}_2$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Lemma 14.41. *Für $\lambda \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$J_n(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & & & & 0 \\ k\lambda^{k-1} & \ddots & & & \\ \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \binom{k}{n-1}\lambda^{k-n+1} & \cdots & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & k\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{pmatrix},$$

wobei $\binom{k}{l} = \frac{k(k-1)\ldots(k-l+1)}{l!}$ für $l = 1, \ldots, n-1$.

Beweis. Im Fall $\lambda = 0$ sieht man leicht:

$$J_n(0)^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, J_n(0)^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, J_n(0)^n = 0.$$

Der allgemeine Fall folgt aus der binomischen Formel[3]

$$J_n(\lambda)^k = (\lambda 1_n + J_n(0))^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda^{k-l} J_n(0)^l.$$ □

[3]Die Formel ist anwendbar, da 1_n und $J_n(0)$ vertauschbar sind.

Satz 14.42. *Für $k \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ existiert ein $W \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $W^k = A$.*

Beweis. Wegen $(SWS^{-1})^k = SW^kS^{-1}$ für $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ können wir annehmen, dass A eine Jordan-Normalform ist. Es genügt eine k-te Wurzel für jeden Jordanblock zu konstruieren. Sei also $A = J_n(\lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Da A invertierbar ist, gilt $\lambda \neq 0$. Nach Lemma 11.27 existiert ein $\mu \in \mathbb{C}$ mit $\mu^k = \lambda$. Sei $J := J_n(\mu)$. Nach Lemma 14.41 besitzt J^k direkt unterhalb der Hauptdiagonale Einträge $k\mu^{k-1} \neq 0$. Also ist $\mu^k = \lambda$ der einzige Eigenwert von J^k und die geometrische Vielfachheit beträgt 1. Nach Satz 14.35 ist A die Jordan-Normalform von J^k. Insbesondere ist $A \approx J^k$. □

Beispiel 14.43.

(a) Der Beweis zeigt $J_n(1)^k \approx J_n(1)$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$. Wir suchen eine dritte Wurzel von $J_3(1)$. Für

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

gilt

$$S^{-1}J_3(1)^3S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/9 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} = J_3(1).$$

Für

$$W := S^{-1}J_3(1)S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/9 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ -1/9 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt $W^3 = J_3(1)$. In Satz 15.35 bestimmen wir die Anzahl der k-ten Wurzeln von $J_n(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ und $n, k \in \mathbb{N}$.

(b) Die nilpotente Matrix $J_2(0)$ besitzt keine Quadratwurzel, denn für $A \in K^{2\times 2}$ mit $A^2 = J_2(0)$ wäre $A^4 = 0$ und damit $A^2 = 0$ (Bemerkung 14.27). Andererseits besitzt 0_2 mit $\lambda J_2(0)$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ unendlich viele Wurzeln.

(c) Man rechnet leicht nach, dass auch $J_2(1) \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$ keine Quadratwurzel besitzt.

Satz 14.44. *Für alle $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt $A \approx A^{\mathrm{t}}$.*

Beweis. Wie üblich können wir $A = J_n(\lambda)$ annehmen. Da λ der einzige Eigenwert von A^{t} ist und die geometrische Vielfachheit 1 beträgt, ist A die Jordan-Normalform von A^{t}. □

Bemerkung 14.45. Man kann Satz 14.44 auch direkt nachrechnen:

$$\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}^{(-1)} J_n(\lambda) \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & \lambda \\ & & \iddots & 1 \\ & \iddots & \iddots & \\ \lambda & 1 & & 0 \end{pmatrix} = J_n(\lambda)^{\mathrm{t}}.$$

In Satz 15.25 beweisen wir Satz 14.44 über beliebigen Körpern.

15 Die Frobenius-Normalform

15.1 Irreduzible Polynome

Bemerkung 15.1. Wir konstruieren in diesem Kapitel eine Normalform für Endomorphismen, die im Gegensatz zur Jordan-Normalform über jedem Körper existiert. Da im Allgemeinen nicht jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt, kann man nicht erwarten, dass die Normalform eine Dreiecksmatrix ist (Satz 14.8). Dennoch erzielen wir die gleiche Anzahl an Nulleinträgen wie in der Jordan-Normalform. Die Grundidee ist, das Minimalpolynom in möglichst „kleine“ Polynome zu faktorisieren. Wie immer sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

Definition 15.2.

- Ein normiertes Polynom $\alpha \in K[X] \setminus K$ heißt *irreduzibel*, falls es keine Faktorisierung $\alpha = \beta\gamma$ mit $\beta, \gamma \in K[X] \setminus K$ gibt (vgl. Primzahl).
- Wir nennen $\alpha, \beta \in K[X]$ *teilerfremd*, falls jeder gemeinsame Teiler von α und β konstant ist, also in K liegt.

Beispiel 15.3.

(a) Normierte Polynome vom Grad 1 sind irreduzibel, denn $\deg(\alpha\beta) = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$ für $\alpha, \beta \in K[X]$. In $\mathbb{C}[X]$ hat umgekehrt jedes irreduzible Polynom Grad 1 nach dem Fundamentalsatz der Algebra und Lemma 10.22. Im Allgemeinen sind normierte Polynome vom Grad 2 oder 3 genau dann irreduzibel, wenn sie keine Nullstelle besitzen. Zum Beispiel ist $X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ irreduzibel.

(b) Das Polynom $X^2 - 2$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$, aber nicht in $\mathbb{R}[X]$, denn $X^2 - 2 = (X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2})$. Analog ist $X^2 + 1$ irreduzibel in $\mathbb{R}[X]$, aber nicht in $\mathbb{C}[X]$ wegen $X^2 + 1 = (X + \mathrm{i})(X - \mathrm{i})$.

(c) Zwei verschiedene irreduzible Polynome sind teilerfremd. Ist $\gamma \in K[X] \setminus K$ ein gemeinsamer Teiler von α und β, so ist auch jeder irreduzible Teiler von γ ein gemeinsamer Teiler von α und β. Also sind α und β genau dann teilerfremd, wenn sie keine irreduziblen gemeinsamen Teiler haben.

Satz 15.4 (Euklidischer Algorithmus)**.** *Seien $\alpha, \beta \in K[X]$ mit $\deg \alpha \geq \deg \beta \geq 0$. Der folgende Algorithmus bestimmt, ob α und β teilerfremd sind:*

(1) Setze $\alpha_0 := \alpha$, $\alpha_1 := \beta$ und $i := 1$.

(2) Wiederhole:

- *Division mit Rest: $\alpha_{i-1} = \alpha_i \gamma_i + \alpha_{i+1}$ mit $\deg \alpha_{i+1} < \deg \alpha_i$.*
- *Gilt $\alpha_{i+1} = 0$, so breche ab.*
- *Erhöhe i um 1.*

(3) Genau dann sind α und β teilerfremd, wenn $\alpha_i \in K$ gilt.

Beweis. Wegen $\alpha_{i-1} = \alpha_i\gamma_i + \alpha_{i+1}$ haben α_{i-1} und α_i die gleichen gemeinsamen Teiler wie α_i und α_{i+1} für $i = 1, 2, \ldots$. Da $\deg \alpha_i$ in jeder Iteration kleiner wird, muss der Algorithmus nach endlich vielen Schritten abbrechen. Am Ende gilt $\alpha_{i+1} = 0 \neq \alpha_i$, d. h. die gemeinsamen Teiler von α und β sind die Teiler von α_i. □

Beispiel 15.5. Sei $\alpha = X^5 + X^4 + X^3 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ und $\beta = X^4 + X^3 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$. Es gilt

$$\begin{aligned} X^5 + X^4 + X^3 + 1 &= (X^4 + X^3 + X + 1)X + X^3 + X^2 + X + 1 && \Longrightarrow \alpha_2 = X^3 + X^2 + X + 1, \\ X^4 + X^3 + X + 1 &= (X^3 + X^2 + X + 1)X + X^2 + 1 && \Longrightarrow \alpha_3 = X^2 + 1 \notin \mathbb{F}_2, \\ X^3 + X^2 + X + 1 &= (X^2 + 1)(X + 1) && \Longrightarrow \alpha_4 = 0. \end{aligned}$$

Also ist $X^2 + 1$ ein gemeinsamer Teiler von α und β.

Lemma 15.6 (Bézout)**.** *Sind $\alpha, \beta \in K[X]$ teilerfremd, so existieren $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in K[X]$ mit $\alpha\tilde{\alpha} + \beta\tilde{\beta} = 1$.*

Beweis. Nach Voraussetzung sind α und β nicht beide 0. Also existieren $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in K[X]$, sodass $\rho := \alpha\tilde{\alpha} + \beta\tilde{\beta} \neq 0$ minimalen Grad hat. Division mit Rest liefert $\gamma, \delta \in K[X]$ mit $\alpha = \gamma\rho + \delta$ und $\deg \delta < \deg \rho$. Also ist

$$\delta = \alpha - \gamma\rho = \alpha - \gamma\alpha\tilde{\alpha} - \gamma\beta\tilde{\beta} = \alpha(1 - \gamma\tilde{\alpha}) - \beta(\gamma\tilde{\beta}).$$

Die Wahl von ρ zeigt $\delta = 0$. Es folgt $\rho \mid \alpha$. Analog ergibt sich $\rho \mid \beta$. Da α und β teilerfremd sind, ist $\rho \in K^\times$. Nach Normierung kann man $\rho = 1$ annehmen. □

Bemerkung 15.7. Die Polynome $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ in Lemma 15.6 lassen sich berechnen, indem man den euklidischen Algorithmus rückwärts liest

$$\alpha_i = \alpha_{i-2} - \alpha_{i-1}\gamma_{i-1} = \alpha_{i-2} - (\alpha_{i-3} - \alpha_{i-2}\gamma_{i-2})\gamma_{i-1} = \alpha_{i-2}(1 + \gamma_{i-2}\gamma_{i-1}) - \alpha_{i-3}\gamma_{i-1} = \ldots$$

und durch α_i teilt.

Beispiel 15.8. Sei $\alpha := X^3 + X^2 + 1$ und $\beta := X^2 - X$ in $\mathbb{Q}[X]$. Der euklidische Algorithmus liefert

$$\begin{aligned} X^3 + X^2 + 1 &= (X^2 - X)(X + 2) + 2X + 1 \\ X^2 - X &= (2X + 1)\frac{1}{4}(2X - 3) + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} &= \beta - \frac{1}{4}(2X + 1)(2X - 3) = \beta - \frac{1}{4}\Big(\alpha - \beta(X + 2)\Big)(2X - 3) \\ &= -\frac{1}{4}(2X - 3)\alpha + \frac{1}{4}\Big(4 + (X + 2)(2X - 3)\Big)\beta \end{aligned}$$

und

$$-\frac{1}{3}(2X - 3)\alpha + \frac{1}{3}(2X^2 + X - 2)\beta = 1.$$

Satz 15.9 (Primfaktorzerlegung in $K[X]$)**.** *Jedes normierte Polynom in $K[X] \setminus K$ ist ein Produkt von irreduziblen Faktoren, die bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.*

Beweis. Sei $\alpha \in K[X]$ normiert. Induktion nach $d := \deg \alpha$. Ist α irreduzibel (zum Beispiel $d = 1$), so sind wir fertig. Anderenfalls ist $\alpha = \beta\gamma$ mit $\deg \beta, \deg \gamma < d$. Wir können annehmen, dass β und γ normiert sind. Nach Induktion sind β und γ Produkte von irreduziblen Faktoren und daher auch α.

Sei nun $\alpha = \sigma_1 \dots \sigma_n = \tau_1 \dots \tau_m$ mit irreduziblen Polynomen $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau_1, \dots, \tau_m \in K[X]$. Induktion nach m. Im Fall $m = 1$ ist $n = 1$ und $\sigma_1 = \tau_1$. Sei jetzt $m \geq 2$. Im Fall $\sigma_1 \neq \tau_1$ sind σ_1 und τ_1 teilerfremd. Nach Bézout existieren $\tilde{\sigma}, \tilde{\tau} \in K[X]$ mit $\sigma_1\tilde{\sigma} + \tau_1\tilde{\tau} = 1$. Es folgt

$$\sigma_1(\tilde{\sigma}\tau_2 \dots \tau_m + \sigma_2 \dots \sigma_n\tilde{\tau}) = \tau_2 \dots \tau_m.$$

Induktiv erhält man $\sigma_1 = \tau_i$ für ein $i \in \{1, \dots, m\}$. Dann ist $\sigma_2 \dots \sigma_n = \tau_1 \dots \tau_{i-1}\tau_{i+1} \dots \tau_m$ und Induktion liefert $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} = \{\tau_1, \dots, \tau_m\}$. □

Beispiel 15.10. Wie bei natürlichen Zahlen werden wir in der Primfaktorzerlegung von Polynomen gleiche irreduzible Faktoren in Potenzen zusammenfassen. Zum Beispiel ist

$$X^6 + X^5 - X^4 - X^3 = X^3(X + 1)^2(X - 1).$$

Im Gegensatz zur Primfaktorzerlegung von Zahlen kennt man effiziente Algorithmen zur Faktorisierung in $\mathbb{Q}[X]$.

Folgerung 15.11. *Seien $\alpha, \beta \in K[X]$ und γ ein irreduzibler Teiler von $\alpha\beta$. Dann gilt $\gamma \mid \alpha$ oder $\gamma \mid \beta$.*

Beweis. Wegen $\gamma \mid \alpha\beta$ muss γ in der Primfaktorzerlegung von $\alpha\beta$ auftauchen. Diese Primfaktorzerlegung erhält man, indem man die Primfaktorzerlegungen von α und β zusammenfasst. Also muss γ in der Zerlegung von α oder β auftreten. □

Satz 15.12 (Primärzerlegung)**.** *Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ und $\mu_f = \gamma_1^{a_1} \dots \gamma_k^{a_k}$ die Primfaktorzerlegung von μ_f in $K[X]$. Dann ist*

$$V = \mathrm{Ker}\big(\gamma_1^{a_1}(f)\big) \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}\big(\gamma_k^{a_k}(f)\big)$$

eine Zerlegung in f-invariante Unterräume. Außerdem ist $\gamma_i^{a_i}$ das Minimalpolynom der Einschränkung von f auf $\mathrm{Ker}\big(\gamma_i^{a_i}(f)\big)$ für $i = 1, \dots, k$.

Beweis. Für $1 \leq i \leq k$ sei $V_i := \mathrm{Ker}(\gamma_i^{a_i}(f))$. Für $v \in V_i$ gilt

$$\gamma_i^{a_i}(f)(f(v)) = f(\gamma_i^{a_i}(f)(v)) = f(0) = 0,$$

d. h. $f(v) \in V_i$. Also ist V_i f-invariant. Zum Nachweis der direkten Zerlegung argumentieren wir durch Induktion nach k. Für $k = 1$ ist $V_1 = \mathrm{Ker}(\mu_f(f)) = \mathrm{Ker}\, 0 = V$. Sei also $k \geq 2$. Die Polynome $\alpha := \gamma_1^{a_1}$ und $\beta := \gamma_2^{a_2} \dots \gamma_k^{a_k}$ sind teilerfremd, da sie keinen irreduziblen gemeinsamen Teiler haben. Nach Bézout existieren $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in K[X]$ mit $\alpha\tilde{\alpha} + \beta\tilde{\beta} = 1$. Sei $V_\beta := \mathrm{Ker}(\beta(f))$. Wegen $(\alpha\beta)(f) = 0 = (\beta\alpha)(f)$ ist $\beta(f)(V) \subseteq V_1$ und $\alpha(f)(V) \subseteq V_\beta$. Es folgt

$$V = \mathrm{id}(V) = (\alpha\tilde{\alpha} + \beta\tilde{\beta})(f)(V) \subseteq \alpha(f)(V) + \beta(f)(V) \subseteq V_\beta + V_1.$$

Für $v \in V_1 \cap V_\beta$ ist andererseits

$$v = (\alpha\tilde{\alpha} + \beta\tilde{\beta})(f)(v) = \tilde{\alpha}(f)\big(\alpha(f)(v)\big) + \tilde{\beta}(f)\big(\beta(f)(v)\big) = 0.$$

Dies zeigt $V = V_1 \oplus V_\beta$.

Das Minimalpolynom α_1 der Einschränkung $f_{|V_1}$ teilt α, denn $\alpha(f)(V_1) = 0$. Insbesondere gilt $\deg \alpha_1 \leq \deg \alpha$. Genauso ist β durch das Minimalpolynom β_1 von $f_\beta := f_{|V_\beta}$ teilbar. Wegen $V = V_1 \oplus V_\beta$ gilt andererseits $(\alpha_1\beta_1)(f) = 0$ und $\mu_f \mid \alpha_1\beta_1$. Aus

$$\deg(\alpha) + \deg(\beta) = \deg \mu_f \leq \deg(\alpha_1\beta_1) = \deg(\alpha_1) + \deg(\beta_1)$$

folgt $\alpha_1 = \alpha$ sowie $\beta_1 = \beta$. Wir können nun die Induktionsvoraussetzung auf $f_\beta \in \mathrm{End}(V_\beta)$ anwenden. Für $i = 2, \ldots, k$ gilt $\mathrm{Ker}(\gamma_i^{a_i}(f_\beta)) = V_i \cap V_\beta = V_i$. Dies zeigt

$$V_\beta = V_2 \oplus \ldots \oplus V_k.$$

Die Behauptung folgt aus Lemma 8.9. □

Bemerkung 15.13. Nehmen wir an, dass μ_f in Linearfaktoren zerfällt, d. h. es gilt $\gamma_i = X - \lambda_i$ für $i = 1, \ldots, k$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von f sind. Wegen

$$\mathrm{Ker}(\gamma_i^{a_i}(f)) = \mathrm{Ker}\big((f - \lambda_i \,\mathrm{id})^{a_i}\big) \subseteq \mathrm{Ker}\big((f - \lambda_i \,\mathrm{id})^{n}\big) = H_{\lambda_i}(f)$$

stimmt die Primärzerlegung mit der Hauptraumzerlegung aus Satz 14.19 überein (wobei $n = \dim V$).

Definition 15.14. Für $v \in V$ und $f \in \mathrm{End}(V)$ nennt man $U := \langle f^i(v) : i \in \mathbb{N}_0 \rangle \leq V$ einen *zyklischen* Unterraum. Offenbar ist U f-invariant. Wir bezeichnen das Minimalpolynom von $f_{|U}$ mit μ_v.

Bemerkung 15.15. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ und $v \in V \setminus \{0\}$. Sei $d \in \mathbb{N}$ minimal, sodass $v, f(v), \ldots, f^d(v)$ linear abhängig sind. Dann existieren $a_0, \ldots, a_{d-1} \in K$ mit $f^d(v) + a_{d-1}f^{d-1}(v) + \ldots + a_1 f(v) + a_0 v = 0$. Sei $\alpha := X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \ldots + a_0 \in K[X]$. Dann gilt

$$\alpha(f)(f^i(v)) = f^i(\alpha(f)(v)) = f^i(0) = 0$$

für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Also ist $\mu_v \mid \alpha$. Da $v, f(v), \ldots, f^{d-1}(v)$ linear unabhängig sind, gilt andererseits $\deg \mu_v \geq d$. Dies zeigt $\mu_v = \alpha$.

Lemma 15.16. *Für $f \in \mathrm{End}(V)$ existiert ein $v \in V$ mit $\mu_v = \mu_f$.*

Beweis. Sei $V_i := \mathrm{Ker}(\gamma_i^{a_i}(f))$ für $i = 1, \ldots, k$ wie in Satz 15.12. Für $v \in V_i$ ist $\langle f^j(v) : j \in \mathbb{N}_0 \rangle \subseteq V_i$. Daher ist μ_v ein Teiler von $\gamma_i^{a_i}$. Nach der eindeutigen Primfaktorzerlegung gilt $\mu_v = \gamma_i^{b_i}$ für ein $b_i \leq a_i$. Da $\gamma_i^{a_i}$ das Minimalpolynom von $f_{|V_i}$ ist, muss ein $v_i \in V_i$ mit $\mu_{v_i} = \gamma_i^{a_i}$ existieren. Wir setzen $v := v_1 + \ldots + v_k$. Da V_i f-invariant ist, gilt $\mu_v(f)(v_i) = 0$ für $i = 1, \ldots, k$. Dies zeigt $\gamma_i^{a_i} = \mu_{v_i} \mid \mu_v$ und es folgt $\mu_v = \mu_f$. □

15.2 Begleitmatrizen

Bemerkung 15.17. Wir definieren das Gegenstück zu Jordanblöcken über beliebigen Körpern.

Definition 15.18. Für $\alpha := X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \in K[X] \setminus K$ nennt man

$$B(\alpha) := \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

die *Begleitmatrix* von α.

Beispiel 15.19. Offenbar ist $B(X^n) = J_n(0)$ ein Jordanblock und $B(X^n - 1) = P_\sigma$ die Permutationsmatrix des n-Zyklus $\sigma = (1, \ldots, n)$.

Lemma 15.20. *Sei $\alpha \in K[X] \setminus K$ normiert und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(a) $\chi_{B(\alpha)} = \mu_{B(\alpha)} = \alpha$.

(b) $\alpha(B(\alpha^k)) \approx \operatorname{diag}\big(J_k(0), \ldots, J_k(0)\big)$.

Beweis. Sei $\alpha = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$.

(a) Sei $B := B(\alpha)$. Für $i = 1, \ldots, n-1$ gilt $Be_i = e_{i+1}$. Daher ist $e_1, Be_1, \ldots, B^{n-1}e_1$ die Standardbasis von K^n und $\deg \mu_B \geq \deg \mu_{e_1} \geq n$. Andererseits gilt

$$\alpha(B)e_i = B^{i-1}\alpha(B)e_1 = B^{i-1}(Be_n + a_{n-1}e_n + \ldots + a_1e_2 + a_0e_1) = 0$$

für $i = 1, \ldots, n$. Dies zeigt $\mu_B \mid \alpha$. Insgesamt ist $\mu_B = \alpha$. Nach Cayley-Hamilton ist $\chi_B = \mu_B$ wegen $\deg \chi_B = n$.

(b) Sei $d := \deg(\alpha^k) = k \deg(\alpha) = kn$. Für $A := B(\alpha^k)$ und $N := \alpha(A)$ gilt $N^k = \alpha^k(A) = 0$ nach (a). Nach Satz 14.28 besitzt N eine Jordan-Normalform J bestehend aus Blöcken der Form $J_l(0)$ mit $l \leq k$. Wie in (a) gilt $e_{i+1} = Ae_i$ für $i = 1, \ldots, d-1$. Daher sind die Vektoren

$$Ne_i = A^n e_i + a_{n-1}A^{n-1}e_i + \ldots + a_0 e_i \in e_{n+i} + \langle e_1, \ldots, e_{n+i-1} \rangle$$

für $i = 1, \ldots, d-n$ linear unabhängig. Dies zeigt $\operatorname{rk} N \geq d - n$ und $\dim \operatorname{Ker}(N) \leq n$ nach dem Homomorphiesatz. Somit besitzt J höchstens n Jordanblöcke. Diese müssen folglich alle die Größe $k \times k$ haben. □

Satz 15.21. *Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ mit $\chi_f = \mu_f$. Dann existiert eine Basis C von V mit ${}_C[f]_C = B(\mu_f)$.*

Beweis. Sei $n := \dim V$. Nach Lemma 15.16 existiert ein $v \in V$ mit $\mu_f = \mu_v$. Für $U := \langle f^i(v) : i \in \mathbb{N}_0 \rangle \leq V$ gilt

$$n = \deg \chi_f = \deg \mu_f = \deg \mu_v \leq \dim U.$$

Also ist $U = V$. Nach Bemerkung 15.15 ist $C := \{v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\}$ eine Basis von V und ${}_C[f]_C = B(\mu_f)$. □

Satz 15.22. *Für jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ gilt:*

(a) Es existieren eindeutig bestimmte normierte Polynome $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K[X] \setminus K$ mit $\alpha_k \mid \alpha_{k-1} \mid \ldots \mid \alpha_1$ und

$$A \approx \operatorname{diag}\big(B(\alpha_1), \ldots, B(\alpha_k)\big). \qquad \text{(FROBENIUS-Normalform}^1\text{)}$$

Dabei ist $\mu_A = \alpha_1$ und $\chi_A = \alpha_1 \ldots \alpha_k$.

(b) Es existieren irreduzible Polynome $\gamma_1, \ldots, \gamma_s \in K[X]$ und $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{N}$ mit

$$A \approx \operatorname{diag}\big(B(\gamma_1^{a_1}), \ldots, B(\gamma_s^{a_s})\big). \qquad \text{(WEIERSTRASS-Normalform)}$$

Dabei sind die Potenzen $\gamma_1^{a_1}, \ldots, \gamma_s^{a_s}$ bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt und $\chi_A = \gamma_1^{a_1} \ldots \gamma_s^{a_s}$.

[1] Im Englischen: *rational canonical form*

Beweis (Jacob).
Schritt 1: Existenz der Frobenius-Normalform.
Sei $V := K^n$ und $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $[f] = A$. Nach Lemma 15.16 existiert $v \in V$ mit $\alpha_1 := \mu_v = \mu_f$. Sei $d := \deg \alpha_1$ und

$$U := \langle f^i(v) : i \in \mathbb{N}_0 \rangle \leq V.$$

Nach Bemerkung 15.15 ist $B(\alpha_1)$ die Darstellungsmatrix von $f_{|U}$ bzgl. $\{b_i := f^{i-1}(v) : i = 1, \ldots, d\}$. Im Fall $U = V$ sind wir fertig. Sei also $U < V$. Wir ergänzen die b_i zu einer Basis $b_1, \ldots, b_n$ von V. Sei $b_1^*, \ldots, b_n^*$ die duale Basis von V^* und $f^* \in \mathrm{End}(V^*)$ die zu f duale Abbildung. Nach Lemma 14.9 ist $U^0 \leq V^*$ f^*-invariant. Der zyklische Unterraum

$$L := \langle (f^*)^i(b_d^*) : i \in \mathbb{N}_0 \rangle \leq V^*$$

ist ebenfalls f^*-invariant. Wegen $[f^*] = A^{\mathrm{t}}$ (Satz 7.50) ist $\mu_{b_d^*} \mid \mu_{f^*} = \mu_f$. Insbesondere ist $\dim L \leq d$. Nach Bemerkung 7.51 gilt $(f^*)^i = (f^i)^*$ für $i \in \mathbb{N}_0$. Sei

$$v^* := \Big(\sum_{i=1}^{t} \lambda_i f^{i-1}\Big)^*(b_d^*) = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i (f^*)^{i-1}(b_d^*) \in L$$

mit $t \leq d$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_t \in K$ und $\lambda_t \neq 0$. Dann gilt

$$v^*(b_{d-t+1}) = b_d^*\Big(\sum_{i=1}^{t} \lambda_i f^{i-1}(b_{d-t+1})\Big) = b_d^*(\lambda_t b_d) = \lambda_t \neq 0$$

und $v^* \neq 0$. Daher ist $\{(f^*)^i(b_d^*) : i = 0, \ldots, d-1\}$ eine Basis von L und $L \cap U^0 = \{0\}$. Aus $\dim U^0 = n - \dim(U) = n - d$ folgt $V^* = L \oplus U^0$. Nach Lemma 7.44 ist

$$V = L_0 \oplus U,$$

wobei L_0 nach Lemma 14.9 f-invariant ist. Das Minimalpolynom von $g := f_{|L_0}$ teilt α_1. Durch Induktion nach n besitzt g eine Frobenius-Normalform $\mathrm{diag}(B(\alpha_2), \ldots, B(\alpha_k))$ mit $\alpha_k \mid \alpha_{k-1} \mid \ldots \mid \alpha_2 = \mu_g \mid \alpha_1$. Insgesamt existiert eine Frobenius-Normalform für f. Aus der Blockdiagonalform und Lemma 15.20 ergibt sich $\chi_A = \alpha_1 \ldots \alpha_k$.

Schritt 2: Existenz und Eindeutigkeit der Weierstraß-Normalform.
Sei $\mu_f = \gamma_1^{c_1} \ldots \gamma_l^{c_l}$ die Primfaktorzerlegung, $V_i := \mathrm{Ker}(\gamma_i^{c_i}(f))$ und $f_i := f_{|V_i}$ für $i = 1, \ldots, l$. Nach der Primärzerlegung ist

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_l$$

und $\mu_{f_i} = \gamma_i^{c_i}$. Eine Frobenius-Normalform von f_i hat somit die Form $\mathrm{diag}(B(\gamma_i^{a_1}), \ldots, B(\gamma_i^{a_t}))$ mit $c_i = a_1 \geq \ldots \geq a_t \geq 1$. Daraus erhält man eine Weierstraß-Normalform für f. Nach Lemma 15.20 ist

$$\mathrm{diag}\big(\underbrace{J_{a_1}(0), \ldots, J_{a_1}(0)}_{\deg \gamma_i}, \ldots, \underbrace{J_{a_t}(0), \ldots, J_{a_t}(0)}_{\deg \gamma_i}\big)$$

die Jordan-Normalform von $\gamma_i(f_i)$. Daher sind die Zahlen $a_1, \ldots, a_t$ eindeutig bestimmt. Sei umgekehrt $B(\rho)$ mit $\rho \in K[X]$ ein Block einer beliebigen Weierstraß-Normalform W von f. Dann existiert ein f-invarianter Unterraum $U \leq V$, sodass ρ das Minimalpolynom von $f_{|U}$ ist. Es folgt $\rho \mid \mu_f$. Nach Folgerung 15.11 ist $\rho \mid \gamma_i^{c_i}$ für ein i und $U \leq V_i$. Die entsprechenden Blöcke von W liefern also auch eine Weierstraß-Normalform von f_i. Da die Zahlen $a_1, \ldots, a_t$ eindeutig bestimmt sind, ist die Weierstraß-Normalform von f ebenfalls eindeutig bestimmt (bis auf Reihenfolge der Blöcke).

Schritt 3: Eindeutigkeit der Frobenius-Normalform.
Wir betrachten schließlich die f-invariante Zerlegung $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$ einer Frobenius-Normalform

von f wie oben. Sei $\alpha_i = \gamma_1^{a_{i1}} \dots \gamma_l^{a_{il}}$ die Zerlegung des Minimalpolynoms von $f_i := f_{|U_i}$ mit $a_{ij} \geq 0$. In der Weierstraß-Normalform von f_i müssen dann die Blöcke $B(\gamma_j^{a_{ij}})$ mit $a_{ij} > 0$ auftreten (anderenfalls wäre μ_{f_i} „zu klein“). Wegen $\chi_{f_i} = \alpha_i$ (Lemma 15.20) können keine weiteren Blöcke auftreten. Zusammen ergeben diese $B(\gamma_j^{a_{ij}})$ die eindeutige Weierstraß-Normalform von f. Aus $\alpha_k \mid \dots \mid \alpha_1$ folgt $a_{1j} \geq \dots \geq a_{kj}$ für $j = 1, \dots, l$. Auf diese Weise kann man die $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ aus der Weierstraß-Normalform zurückgewinnen (siehe Beispiel 15.24). □

Bemerkung 15.23.

(a) Im Gegensatz zur Jordan-Normalform sind die Blöcke $B(\alpha_i)$ der Frobenius-Normalform in einer festen Reihenfolge. Außerdem hängt die Frobenius-Normalform nicht von der Faktorisierung des Minimalpolynoms ab. Insbesondere verändert sich die Frobenius-Normalform nicht, wenn man K durch einen größeren Körper ersetzt (zum Beispiel $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$).

(b) Die Polynome $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ in der Frobenius-Normalform lassen sich alternativ durch die Folge $\beta_1 := \alpha_1/\alpha_2$, $\beta_2 := \alpha_2/\alpha_3, \dots, \beta_k := \alpha_k$ beschreiben. Sind umgekehrt beliebige normierte Polynome $\beta_1, \dots, \beta_k \in K[X]$ mit $\beta_k \notin K$ gegeben, so erhält man die Frobenius-Normalform

$$\operatorname{diag}\big(B(\beta_1 \dots \beta_k), B(\beta_2 \dots \beta_k), \dots, B(\beta_k)\big) \in K^{n \times n}$$

mit

$$n = \deg(\beta_1) + 2\deg(\beta_2) + \dots + k\deg(\beta_k).$$

Auf diese Weise lassen sich die Ähnlichkeitsklassen von Matrizen systematisch aufzählen. Möchte man nur invertierbare Matrizen zählen, so müssen alle β_i ein Absolutglied $\neq 0$ haben (anderenfalls wäre X ein Teiler des charakteristischen Polynoms).

(c) Ist $q := |K| < \infty$, so gibt es genau q^d normierte Polynome vom Grad $d \geq 0$. Unter diesen haben $q^d - q^{d-1}$ ein Absolutglied $\neq 0$, falls $d \geq 1$. Sei $n = 4$. Mit den Bezeichnungen aus (b) gibt es folgende Möglichkeiten:

$\deg\beta_1$	$\deg\beta_2$	$\deg\beta_3$	$\deg\beta_4$	Anzahl	invertierbar
0	0	0	1	q	$q-1$
1	0	1		q^2	$(q-1)^2$
2	1			q^3	$(q^2-q)(q-1)$
0	2			q^2	q^2-q
4				q^4	q^4-q^3

Insgesamt gibt es $q^4 + q^3 + 2q^2 + q$ Ähnlichkeitsklassen von Matrizen in $K^{4\times 4}$. Davon bestehen $q^4 - q$ aus invertierbaren Matrizen.

(d) Ist A nilpotent, so stimmen Jordan-, Frobenius- und Weierstraß-Normalform überein.

(e) Ein Nachteil der Frobenius-Normalform ist, dass man Begleitmatrizen weniger leicht multiplizieren kann als Jordanblöcke. Ein weiterer Nachteil ist, dass die Frobenius-Normalform F nur dann eine Diagonalmatrix ist, wenn $A = F$ eine Skalarmatrix ist (beachte $\deg\mu_A = \deg\alpha_1 = 1$). Man kann am ersten Block $B(\alpha_1)$ jedoch erkennen, ob A diagonalisierbar ist (Satz 10.52).

(f) Man beachte, dass die irreduziblen Polynome γ_i in der Weierstraß-Normalform nicht unbedingt verschieden sind. Da diese Polynome aus der Primfaktorzerlegung der α_i entstehen, hängt die Weierstraß-Normalform, im Gegensatz zur Frobenius-Normalform, von K ab (in einem größeren Körper zerfallen die γ_i möglicherweise). Genau dann ist A diagonalisierbar, wenn die Weierstraß-Normalform eine Diagonalmatrix ist. In diesem Fall stimmt die Weierstraß-Normalform also mit der Jordan-Normalform überein.

Beispiel 15.24.

(a) Seien $\alpha, \beta, \gamma \in K[X]$ irreduzibel und paarweise verschieden. Die Umrechnung zwischen Frobenius- und Weierstraß-Normalform geht wie folgt:

$$\operatorname{diag}\big(B(\alpha^2\beta^3\gamma), B(\alpha^2\beta^2), B(\alpha)\big) \approx \operatorname{diag}\big(B(\alpha), B(\alpha^2), B(\alpha^2), B(\beta^2), B(\beta^3), B(\gamma)\big).$$

(b) Die Berechnung der Frobenius-/Weierstraß-Normalform (von Hand) ist naturgemäß sehr aufwendig. Unser Beweis von Lemma 15.16 ist zum Beispiel nicht konstruktiv, aber es gibt entsprechende Algorithmen.[2] Oft kann man Ad-hoc-Argumente benutzen. Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 30 & -4 & -15 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

hat das charakteristische Polynom

$$\chi_A = \big((X-7)(X+4)+30\big)(X-1) = (X^2-3X+2)(X-1) = (X-1)^2(X-2).$$

Wegen

$$(A - 1_3)(A - 2\cdot 1_3) = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -3 \\ 30 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 30 & -6 & -15 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

ist $\mu_A = (X-1)(X-2)$. Also ist

$$\begin{pmatrix} B(\mu_A) & 0 \\ 0 & B(X-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Frobenius-Normalform von A. Die Weierstraß-Normalform ist hingegen $\operatorname{diag}(1,1,2)$.

(c) Wir beschreiben die Ähnlichkeitsklassen von Matrizen in $\mathbb{F}_2^{3\times 3}$ mit der Folge $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ aus Bemerkung 15.23:

$$\begin{array}{ccc} (1,1,X) = 0_3, & (1,1,X+1) = 1_3, & (X,X), \\ (X,X+1) \approx \operatorname{diag}(1,1,0), & (X+1,X) \approx \operatorname{diag}(1,0,0), & (X+1,X+1) = P_{(1,2)}, \\ (X^3) = J_3(0), & (X^3+1) = P_{(1,2,3)}, & (X^3+X), \\ (X^3+X+1), & (X^3+X^2), & (X^3+X^2+1), \\ (X^3+X^2+X), & (X^3+X^2+X+1). & \end{array}$$

Also gibt es genau 14 Ähnlichkeitsklassen, von denen sechs zu invertierbaren Matrizen gehören (welche?).

Satz 15.25. *Für alle $A \in K^{n\times n}$ gilt $A \approx A^{\mathrm{t}}$.*

Beweis. Nach der Frobenius-Normalform kann man $A = B(\alpha)$ für ein normiertes Polynom $\alpha \in K[X]\setminus K$ annehmen. Nach Lemma 15.20 und Aufgabe II.4 gilt $\chi_{A^{\mathrm{t}}} = \chi_A = \mu_A = \mu_{A^{\mathrm{t}}}$. Nach Satz 15.21 ist $A^{\mathrm{t}} \approx A$. □

Bemerkung 15.26. Einen direkten Beweis von Satz 15.25 findet man in Aufgabe II.32.

[2] siehe [M. Geck, *On Jacob's construction of the rational canonical form of a matrix*, Electron. J. Linear Algebra 36 (2020), 177–182]

15.3 Zentralisatoren

Definition 15.27. Für $f \in \operatorname{End}(V)$ und $A \in K^{n\times n}$ sei

$$\begin{aligned}\mathrm{C}(f) &:= \{g \in \operatorname{End}(V) : f \circ g = g \circ f\} \subseteq \operatorname{End}(V),\\ \mathrm{C}(A) &:= \{B \in K^{n\times n} : AB = BA\} \subseteq K^{n\times n}\end{aligned}$$

der *Zentralisator* von f bzw. A.

Bemerkung 15.28. Offenbar sind Zentralisatoren Unterräume. Für $C, D \in \mathrm{C}(A)$ ist außerdem $CD \in \mathrm{C}(A)$. Für $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ gilt $\mathrm{C}(SAS^{-1}) = S\,\mathrm{C}(A)S^{-1}$. Daher ist $\dim \mathrm{C}(A)$ eine Invariante der Ähnlichkeitsklasse von A. Es gilt

$$\{\alpha(A) : \alpha \in K[X]\} = \langle A^i : i \in \mathbb{N}_0\rangle \subseteq \mathrm{C}(A).$$

Wir untersuchen, wann Gleichheit gilt.

Beispiel 15.29.

(a) Sei $A \in K^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix. Nach Permutation der Basisvektoren können wir $A = \operatorname{diag}(\lambda_1 1_{d_1}, \dots, \lambda_k 1_{d_k})$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ annehmen. Nach Aufgabe I.16 gilt $\mathrm{C}(A) = \{\operatorname{diag}(A_1, \dots, A_k) : \forall i : A_i \in K^{d_i\times d_i}\}$. Insbesondere ist $\dim \mathrm{C}(A) = \sum_{i=1}^k d_i^2$. Dies wird in Aufgabe II.34 und Bemerkung 15.33 verallgemeinert.

(b) Sei $A \in K^{d\times d}$ und $D := \operatorname{diag}(A, \dots, A) \in K^{dk\times dk}$. Sei $B = (B_{ij}) \in K^{dk\times dk}$ mit Blöcken $B_{ij} \in K^{d\times d}$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} AB_{11} & \cdots & AB_{1k}\\ \vdots & & \vdots\\ AB_{k1} & \cdots & AB_{kk}\end{pmatrix} = DB = BD = \begin{pmatrix} B_{11}A & \cdots & B_{1k}A\\ \vdots & & \vdots\\ B_{k1}A & \cdots & B_{kk}A\end{pmatrix} \iff \forall i, j : B_{ij} \in \mathrm{C}(A).$$

Insbesondere ist $\dim \mathrm{C}(D) = k^2 \dim \mathrm{C}(A)$.

(c) Nach Aufgabe II.27 gilt $\dim \mathrm{C}(J_n(\lambda)) = n$ für alle $\lambda \in K$. Dies wird in Folgerung 15.34 verallgemeinert.

Lemma 15.30. *Seien V, W Vektorräume und $f \in \operatorname{End}(V)$, $g \in \operatorname{End}(W)$ mit $\chi_f = \mu_f \mid \chi_g = \mu_g$. Dann ist*

$$H := \big\{h \in \operatorname{Hom}(V, W) : h \circ f = g \circ h\big\}$$

ein Vektorraum mit $\dim H = \dim V$.

Beweis. Sei $d := \dim V$ und $e := \dim W$. Wegen $\chi_f = \mu_f$ und $\chi_g = \mu_g$ existieren $v \in V$ und $w \in W$ mit

$$V = \langle f^i(v) : i = 0, \dots, d-1\rangle, \qquad W = \langle g^i(w) : i = 0, \dots, e-1\rangle.$$

Sei $h \in H$. Dann existiert genau ein Polynom $\alpha \in K[X]$ mit $h(v) = \alpha(g)(w)$ und $\deg \alpha < e$. Für $i = 1, \dots, d-1$ folgt $h(f^i(v)) = g^i(h(v))$. Also ist h durch α eindeutig bestimmt. Nach Lemma 10.15 ist die Abbildung $H \to K[X]$, $h \mapsto \alpha$ linear und injektiv. Wegen

$$0 = h\big(\mu_f(f)(v)\big) = \mu_f(g)(h(v)) = \mu_f(g)\big(\alpha(g)(w)\big) = (\alpha\mu_f)(g)(w)$$

gilt außerdem $\mu_g \mid \alpha\mu_f$, d. h. $\tau := \frac{\mu_g}{\mu_f} \mid \alpha$. Sei $P_d \subseteq K[X]$ der Vektorraum aller Polynome vom Grad $< d$. Wegen $\deg(\alpha/\tau) = \deg(\alpha) + d - e < d$ ist

$$\Gamma\colon H \to P_d, \qquad h \mapsto \alpha/\tau$$

eine injektive lineare Abbildung.

Sei umgekehrt $\beta \in P_d$ gegeben und $\alpha := \beta\tau$. Dann gilt $\mu_g \mid \alpha\mu_f$. Wir definieren $h \in \operatorname{Hom}(V, W)$ durch $h(v) = \alpha(g)(w)$ und $h(f^i(v)) = g^i(h(v))$ für $i = 1, \dots, d-1$. Für $i = 0, \dots, d-2$ gilt dann

$$(h \circ f)(f^i(v)) = g^{i+1}(h(v)) = g(g^i(h(v))) = (g \circ h)(f^i(v)).$$

Sei $\mu_f = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \ldots + a_0$. Wegen $\mu_f(f) = 0$ gilt

$$\begin{aligned}(h \circ f)(f^{d-1}(v)) = h(f^d(v)) &= h\big(-a_{d-1}f^{d-1}(v) - \ldots - a_0 v\big) = -a_{d-1}g^{d-1}(h(v)) - \ldots - a_0 h(v)\\ &= g^d(h(v)) - \mu_f(g)(h(v)) = g^d(h(v)) - (\mu_f\alpha)(g)(w) = g^d(h(v)) = (g \circ h)(f^{d-1}(v)).\end{aligned}$$

Dies zeigt $h \in H$ mit $\Gamma(h) = \beta$. Also ist Γ ein Isomorphismus und $\dim H = \dim P_d = d = \dim V$. □

Beispiel 15.31. Sei $V = K$ und $f = \lambda \operatorname{id}_V$ für ein $\lambda \in K$. Für $h \in H$ gilt $\lambda h(1) = h(f(1)) = g(h(1))$, d. h. $h(1)$ ist ein Eigenvektor von g zum Eigenwert λ. Außerdem ist $H \to E_\lambda(g)$, $h \mapsto h(1)$ ein Isomorphismus. Wegen $\dim H = 1$ hat λ geometrische Vielfachheit 1. Das kann man natürlich auch direkt aus der Bedingung $\chi_f = X - \lambda \mid \chi_g = \mu_g$ ableiten.

Satz 15.32 (Frobenius)**.** *Sei $A \in K^{n\times n}$ mit Frobenius-Normalform $\operatorname{diag}(B(\alpha_1), \dots, B(\alpha_k))$. Dann gilt*

$$\boxed{\dim \mathrm{C}(A) = \sum_{i=1}^{k} (2i-1)\deg(\alpha_i).}$$

Insbesondere ist $\dim \mathrm{C}(A) \geq n$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\chi_A = \mu_A$.

Beweis. Sei $d_i := \deg \alpha_i$ und $A_i := B(\alpha_i) \in K^{d_i \times d_i}$ für $i = 1, \dots, k$. Nach Bemerkung 15.28 können wir $A = \operatorname{diag}(A_1, \dots, A_k)$ annehmen. Sei $C = (C_{ij}) \in K^{n\times n}$ eine Blockmatrix mit $C_{ij} \in K^{d_i \times d_j}$ für $1 \leq i, j \leq k$. Dann gilt

$$C \in \mathrm{C}(A) \iff CA = AC \iff \forall i, j : C_{ij}A_j = A_iC_{ij}.$$

Für $i \leq j$ gilt $\chi_{A_j} = \mu_{A_j} = \alpha_j \mid \alpha_i = \chi_{A_i} = \mu_{A_i}$ nach Lemma 15.20. Nach Lemma 15.30 gibt es d_j linear unabhängige Möglichkeiten für die Wahl von C_{ij}. Im Fall $i > j$ können wir

$$C_{ij}^{\mathrm{t}} A_i^{\mathrm{t}} = (A_iC_{ij})^{\mathrm{t}} = (C_{ij}A_j)^{\mathrm{t}} = A_j^{\mathrm{t}} C_{ij}^{\mathrm{t}}$$

betrachten. Wegen $\chi_{A_i^{\mathrm{t}}} = \alpha_i = \mu_{A_i^{\mathrm{t}}}$ (Aufgabe II.4) gibt es d_i linear unabhängige Möglichkeiten für C_{ij}^{t} (und damit auch für C_{ij}). Da die Blöcke C_{ij} in C unabhängig voneinander gewählt werden können, erhält man

$$\dim \mathrm{C}(A) = \sum_{i,j=1}^{k} d_{\max\{i,j\}} = d_1 + 3d_2 + 5d_3 + \ldots + (2k-1)d_k \geq d_1 + \ldots + d_k = n$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $k = 1$, d. h. $\mu_A = \alpha_1 = \chi_A$ (Satz 15.22). □

Bemerkung 15.33. In Bemerkung 15.23 haben wir die Frobenius-Normalform durch die Polynome $\beta_1 := \alpha_1/\alpha_2$, $\beta_2 := \alpha_2/\alpha_3, \ldots, \beta_k := \alpha_k$ beschrieben. Es gilt $\deg \alpha_i = \deg(\beta_i \beta_{i+1} \ldots \beta_k) = \sum_{j=i}^{k} \deg \beta_j$ und $\sum_{i=1}^{m}(2i-1) = m^2$ nach Aufgabe I.4. Dies zeigt

$$\boxed{\dim \mathrm{C}(A) = \sum_{l=1}^{k} l^2 \deg(\beta_l).}$$

Folgerung 15.34. *Sei $A \in K^{n\times n}$ mit $\chi_A = \mu_A$. Dann gilt $\mathrm{C}(A) = \langle A^i : i = 0, \ldots, n-1\rangle$.*

Beweis. Aus $\deg \mu_A = \deg \chi_A = n$ folgt $\dim \mathrm{C}(A) \geq \dim\langle A^i : i \in \mathbb{N}_0\rangle = n$. Nach Frobenius ist andererseits $\dim \mathrm{C}(A) = n$. □

Satz 15.35. *Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ mit genau e paarweise verschiedenen Eigenwerten und $\chi_A = \mu_A$. Für $k \in \mathbb{N}$ existieren genau k^e Matrizen $W \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $W^k = A$.*

Beweis. O. B. d. A. sei $A = \mathrm{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), \ldots, J_{n_s}(\lambda_s))$ in Jordan-Normalform. Nach Satz 14.35 sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ paarweise verschieden, d. h. $s = e$. Jedes $W \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $W^k = A$ ist mit A vertauschbar. Nach Folgerung 15.34 ist W ein Polynom in A und hat daher die Form $W = \mathrm{diag}(W_1, \ldots, W_e)$ mit $W_i^k = J_{n_i}(\lambda_i)$ für $i = 1, \ldots, e$. Wir können daher $e = 1$ und $\lambda := \lambda_1$ annehmen. Nach Satz 14.42 existiert zumindest ein W mit $W^k = A$. Für jede k-te Einheitswurzel $\zeta \in \mathbb{C}$ gilt auch $(\zeta W)^k = A$. Nach Lemma 11.27 existieren also mindestens k Wurzeln von A.

Sei umgekehrt $W \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $W^k = A$. Als Polynom in A ist W eine untere Dreiecksmatrix mit Hauptdiagonale $(\omega, \ldots, \omega)$, wobei $\omega^k = \lambda$. Mit A ist auch W invertierbar. Sei auch $Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine k-te Wurzel aus A mit Hauptdiagonale $(\omega, \ldots, \omega)$. Dann ist $S := W^{-1}Y$ eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Hauptdiagonale. Da W und Y als Polynome in A vertauschbar sind, gilt $S^k = W^{-k}Y^k = 1_n$. Nach Folgerung 11.29 ist S diagonalisierbar. Da 1 der einzige Eigenwert von S ist, folgt $S \approx 1_n$, d. h. $S = 1_n$ und $W = Y$. Folglich ist W durch seine Hauptdiagonale eindeutig bestimmt. Es kann also höchstens k Wurzeln von A geben. □

15.4 Zerfällungskörper

Satz 15.36 (Schurs Lemma)**.** *Sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Genau dann ist χ_f irreduzibel, wenn $\{0\}$ und V die einzigen f-invarianten Unterräume sind.*

Beweis. Seien $\{0\}$ und V die einzigen f-invarianten Unterräume von V. Nach der Frobenius-Normalform ist $\chi_f = \mu_f$. Sei γ ein irreduzibler Teiler von μ_f. Dann ist $U := \mathrm{Ker}(\gamma(f)) \leq V$ ein f-invarianter Unterraum. Für $v \in V$ mit $\mu_v = \mu_f$ (Lemma 15.16) gilt $0 \neq \frac{\mu_f}{\gamma}(f)(v) \in U$. Dies zeigt $U = V$ und $\chi_f = \mu_f = \gamma$ ist irreduzibel.

Sei umgekehrt χ_f irreduzibel und $\{0\} \neq U \leq V$ f-invariant. Wir ergänzen eine Basis B_1 von U zu einer Basis B von V. Dann gilt

$$_B[f]_B = \begin{pmatrix} {}_{B_1}[f_{|U}]_{B_1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt $\chi_{f_{|U}} \mid \chi_f$ und $\chi_{f_{|U}} = \chi_f$. Es folgt $U = V$. □

Satz 15.37. *Für jedes irreduzible Polynom $\gamma \in K[X]$ ist $L := \mathrm{C}(B(\gamma))$ ein Körper mit $\dim_K L = \deg \gamma$.*

Beweis. Sei $n := \deg \gamma$, $V = K^n$ und $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $A := B(\gamma) = [f]$. Nach Lemma 15.20 ist $\chi_f = \mu_f = \gamma$. Nach Folgerung 15.34 ist $L = \langle A^i : i \in \mathbb{N}_0 \rangle \subseteq K^{n\times n}$. Insbesondere ist die (Matrizen-) Multiplikation in L kommutativ. Für $g \in \mathrm{C}(f) \setminus \{0\}$ ist $\operatorname{Ker} g \leq V$ wie üblich ein f-invarianter Unterraum. Nach Schurs Lemma gilt $\operatorname{Ker} g = \{0\}$ und $g \in \mathrm{GL}(V)$. Mit g ist auch $g^{-1} \in \mathrm{C}(f)$. Also besitzt jedes Element in $L \setminus \{0_n\}$ ein Inverses bzgl. Multiplikation. Die verbleibenden Körperaxiome für $\mathrm{C}(A)$ folgen aus den Rechenregeln in $K^{n\times n}$. Nach Folgerung 15.34 ist $\dim L = n$. □

Beispiel 15.38.

(a) Bekanntlich ist $\gamma := X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ irreduzibel. Sei $A := B(\gamma) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Nach Satz 15.37 ist $\mathrm{C}(A) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ ein Körper. Tatsächlich stimmt $\mathrm{C}(A)$ mit der Konstruktion von $\mathbb{C}$ im Beweis von Lemma 11.24 überein.

(b) Für $\gamma = X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ ist $\mathrm{C}(B(\gamma)) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ der Körper aus Aufgabe I.15.

(c) Für $\gamma := X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ ist

$$\mathrm{C}(B(\gamma)) = \left\{ 0_2, 1_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ein Körper mit vier Elementen.

Satz 15.39. *Für jedes normierte Polynom $\alpha \in K[X]$ existiert ein Körper $L \supseteq K$, sodass α in $L[X]$ in Linearfaktoren zerfällt.*

Beweis. Im Fall $\deg \alpha = 1$ ist α selbst ein Linearfaktor. Sei also $\deg \alpha \geq 2$. Sei γ ein irreduzibler Teiler von α mit $d := \deg \gamma$. Nach Satz 15.37 ist $L_1 := \mathrm{C}(B(\gamma))$ ein Körper. Wir können K mit den Skalarmatrizen $\{\lambda 1_d \in L_1 : \lambda \in K\}$ identifizieren (die Rechenregeln für Skalarmatrizen entsprechen denen in K). Für $x := B(\gamma) \in L_1$ gilt $\gamma(x) = 0$, d. h. x ist eine Nullstelle von γ. Nach Lemma 10.22 gilt $\alpha = (X - x)\beta$ für ein $\beta \in L_1[X]$ mit $\deg \beta = \deg(\alpha) - 1$. Durch Induktion nach $\deg \alpha$ existiert ein Körper $L \supseteq L_1$, in dem β in Linearfaktoren zerfällt. Offenbar zerfällt auch α in $L[X]$ in Linearfaktoren. □

Definition 15.40. In der Situation von Satz 15.39 nennt man L einen *Zerfällungskörper* von α (nicht eindeutig bestimmt).

16 Die Jordan-Chevalley-Zerlegung

16.1 Der chinesische Restsatz

Bemerkung 16.1. In diesem Abschnitt zerlegen wir quadratische Matrizen in einen diagonalisierbaren Anteil (über einem Zerfällungskörper) und einen nilpotenten Anteil.

Definition 16.2. Seien $\alpha, \beta, \delta \in K[X]$ mit $\delta \neq 0$. Wir sagen, α ist *kongruent* zu β *modulo* δ, falls $\delta \mid \alpha - \beta$. Ggf. schreiben wir $\alpha \equiv \beta \pmod{\delta}$.

Lemma 16.3. *Die Kongruenz modulo $\delta \in K[X] \setminus \{0\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $K[X]$. Für $\alpha_i, \beta_i \in K[X]$ mit $\alpha_i \equiv \beta_i \pmod{\delta}$ $(i = 1, 2)$ gilt $\alpha_1 + \alpha_2 \equiv \beta_1 + \beta_2 \pmod{\delta}$ und $\alpha_1\alpha_2 \equiv \beta_1\beta_2 \pmod{\delta}$.*

Beweis. Wegen $\delta \mid 0 = \alpha - \alpha$ ist $\alpha \equiv \alpha \pmod{\delta}$. Aus $\alpha \equiv \beta \pmod{\delta}$ folgt $\beta \equiv \alpha \pmod{\delta}$. Sei nun $\alpha \equiv \beta \pmod{\delta}$ und $\beta \equiv \gamma \pmod{\delta}$. Dann gilt $\delta \mid (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) = \alpha - \gamma$ und $\alpha \equiv \gamma \pmod{\delta}$. Daher ist $\equiv$ eine Äquivalenzrelation. Aus $\alpha_i \equiv \beta_i \pmod{\delta}$ folgt

$$\begin{aligned} &\delta \mid (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2), \\ &\delta \mid (\alpha_1 - \beta_1)\alpha_2 + (\alpha_2 - \beta_2)\beta_1 = \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2. \end{aligned}$$

Dies zeigt die zweite Behauptung. □

Beispiel 16.4.

(a) Für $\delta \in K^\times$ ist $\alpha \equiv \beta \pmod{\delta}$ für alle $\alpha, \beta \in K[X]$, d. h. $\equiv$ ist die triviale Relation.

(b) Es gilt $\alpha \equiv \beta \pmod{X}$ genau dann, wenn α und β das gleiche Absolutglied haben.

(c) Für alle $\alpha \in K[X]$ existiert ein $\beta \in K[X]$ mit $\alpha \equiv \beta \pmod{\delta}$ und $\deg \beta < \deg \delta$. Dies ergibt sich aus der Division mit Rest.

(d) Lemma 16.3 vereinfacht viele Teilbarkeitsbetrachtungen: Um zu prüfen, ob

$$\alpha = (X^2 + X + 2)^4 + (X^5 - 1)(X^3 + X + 10) \in \mathbb{Q}[X]$$

durch $\delta = X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ teilbar ist, kann man jeden Term einzeln modulo δ reduzieren. Wegen

$$\begin{aligned} X^2 + X + 2 &= X(X + 1) + 2 \equiv 2 \pmod{\delta}, \\ X^5 - 1 &= (X + 1)(X^4 - X^3 + X^2 - X + 1) - 2 \equiv -2 \pmod{\delta}, \\ X^3 + X + 10 &= (X + 1)(X^2 - X + 2) + 8 \equiv 8 \pmod{\delta} \end{aligned}$$

gilt $\alpha \equiv 2^4 + (-2)8 \equiv 0 \pmod{\delta}$, d. h. $\delta \mid \alpha$.

Satz 16.5 (Chinesischer Restsatz)**.** *Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K[X]\backslash\{0\}$ paarweise teilerfremd und $\beta_1, \dots, \beta_n \in K[X]$ beliebig. Dann existiert ein $\gamma \in K[X]$ mit $\gamma \equiv \beta_i \pmod{\alpha_i}$ für $i = 1, \dots, n$.*

Beweis. Für $i = 1, \dots, n$ sei $\alpha_i' := \prod_{j \neq i} \alpha_j$. Nach Folgerung 15.11 muss jeder irreduzible Teiler von α_i' ein α_j mit $j \neq i$ teilen. Da α_i und α_j teilerfremd sind, müssen auch α_i und α_i' teilerfremd sein. Nach Bézout existieren $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in K[X]$ mit $\alpha_i'\gamma_i \equiv 1 \pmod{\alpha_i}$. Sei

$$\gamma := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'\beta_i\gamma_i.$$

Dann gilt $\gamma \equiv \alpha_i'\beta_i\gamma_i \equiv \beta_i \pmod{\alpha_i}$ für $i = 1, \dots, n$. □

Bemerkung 16.6. Mit γ erfüllt auch $\gamma + \rho \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$ für alle $\rho \in K[X]$ die Kongruenzen aus dem chinesischen Restsatz. Daher gibt es unendlich viele Lösungen.

Beispiel 16.7. Da die Polynome $X^2 - 2, X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ keine gemeinsamen Nullstellen haben, sind sie teilerfremd. Gesucht sei $\gamma \in \mathbb{Q}[X]$ mit

$$\gamma \equiv X \pmod{X^2 - 2}, \qquad \gamma \equiv 3 \pmod{X^2 + 1}.$$

Bézout liefert $\frac{1}{3}(X^2 + 1) \equiv 1 \pmod{X^2 - 2}$ und $-\frac{1}{3}(X^2 - 2) \equiv 1 \pmod{X^2 + 1}$ (im Zweifel muss man den euklidischen Algorithmus bemühen). Wie im Beweis von Satz 16.5 ist

$$\gamma = \frac{1}{3}(X^2 + 1)X - \frac{1}{3}(X^2 - 2)3 = \frac{1}{3}X^3 - X^2 + \frac{1}{3}X + 2$$

eine Lösung der Kongruenzen.

Definition 16.8.

- Für $\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in K[X]$ definieren wir die (formale) *Ableitung*

$$\alpha' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k X^{k-1}$$

  von α wie in der Analysis.

- Ein irreduzibles Polynom α heißt *separabel*, wenn $\alpha' \neq 0$. Ein beliebiges Polynom α heißt *separabel*, wenn alle irreduziblen Teiler von α separabel sind (das Gegenteil ist *inseparabel*).

Beispiel 16.9.

(a) Die konstanten Polynome sind separabel, da sie keine irreduziblen Teiler haben.

(b) Ist die Abbildung $\mathbb{N} \to K$, $n \mapsto n \cdot 1_K$ injektiv, so gilt $\alpha' \neq 0$ für alle $\alpha \in K[X] \setminus K$. Insbesondere ist jedes Polynom in $\mathbb{C}[X]$ separabel.

(c) Über endlichen Körpern ist die Bedingung $\alpha' \neq 0$ weniger offensichtlich. Zum Beispiel gilt $(X^2)' = 0$ in $\mathbb{F}_2[X]$. Sei allgemein $\alpha = \sum a_k X^k \in \mathbb{F}_2[X]$ mit $\alpha' = \sum k a_k X^{k-1} = 0$. Für ungerade k folgt $a_k X^{k-1} = k a_k X^{k-1} = 0$, also $a_k = 0$. Dies zeigt

$$\alpha = a_0 + a_2 X^2 + \ldots + a_{2n} X^{2n}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$. Wegen $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x + y$ in $\mathbb{F}_2$ erhält man induktiv

$$\alpha = (a_0 + a_2 X + \ldots + a_{2n} X^n)^2.$$

Insbesondere ist α reduzibel (d. h. nicht irreduzibel). Damit ist jedes Polynom in $\mathbb{F}_2[X]$ separabel.

(d) Man konstruiert $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$, indem man Brüche einführt. Auf die gleiche Weise kann man den Körper der *rationalen Funktionen*

$$K(X) := \Big\{ \frac{\alpha}{\beta} : \alpha, \beta \in K[X], \beta \neq 0 \Big\}$$

aus $K[X]$ gewinnen, indem man Brüche von Polynomen einführt. Sei speziell $K := \mathbb{F}_2(X)$. Man kann zeigen, dass $\alpha := Y^2 + X \in K[Y]$ irreduzibel und inseparabel ist.

Lemma 16.10. *Für $\alpha, \beta \in K[X]$ gilt*

$$(\alpha + \beta)' = \alpha' + \beta', \qquad \text{(Summenregel)}$$
$$(\alpha\beta)' = \alpha'\beta + \alpha\beta'. \qquad \text{(Produktregel)}$$

Beweis. Für $\alpha = \sum a_k X^k$ und $\beta = \sum b_k X^k$ ist

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)' &= \Big(\sum (a_k + b_k) X^k\Big)' = \sum k(a_k + b_k) X^{k-1} \\ &= \sum k a_k X^{k-1} + \sum k b_k X^{k-1} = \alpha' + \beta'.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)' &= \Big(\sum_{k,l=0}^{\infty} a_k b_l X^{k+l}\Big)' = \sum_{k,l} a_k b_l \big(X^{k+l}\big)' = \sum_{k,l} (k+l) a_k b_l X^{k+l-1} \\ &= \sum_{k,l} k a_k b_l X^{k-1+l} + \sum_{k,l} l a_k b_l X^{l-1+k} = \alpha'\beta + \alpha\beta'.\end{aligned}$$

□

Lemma 16.11. *Sei $\gamma \in K[X]$ irreduzibel. Genau dann ist γ separabel, wenn γ keine mehrfachen Nullstellen in einem Zerfällungskörper besitzt.*

Beweis. Sei $\lambda \in L$ eine Nullstelle von γ in einem Zerfällungskörper L. Dann existiert ein $\rho \in L[X]$ mit $\gamma = (X - \lambda)\rho$. Aus der Produktregel folgt

$$\gamma' = \rho + (X - \lambda)\rho'$$

und $\gamma'(\lambda) = \rho(\lambda)$. Ist γ inseparabel, so ist $\rho(\lambda) = \gamma'(\lambda) = 0$, d. h. λ ist eine mehrfache Nullstelle. Sei umgekehrt γ separabel, d. h. $\gamma' \neq 0$. Dann gilt $0 \leq \deg \gamma' < \deg \gamma$. Da γ irreduzibel ist, sind γ' und γ teilerfremd. Nach Bézout existieren $\alpha, \beta \in K[X]$ mit $\alpha\gamma + \beta\gamma' = 1$. Es folgt $\beta(\lambda)\gamma'(\lambda) = 1$ und $\rho(\lambda) = \gamma'(\lambda) \neq 0$. Also ist λ eine einfache Nullstelle. Da λ beliebig war, sind alle Nullstellen einfach. □

16.2 Separable und halbeinfache Abbildungen

Definition 16.12. Wir nennen $f \in \mathrm{End}(V)$ (bzw. $A \in K^{n\times n}$)

- *separabel*, falls μ_f (bzw. μ_A) separabel ist.
- *halbeinfach*, falls μ_f (bzw. μ_A) in paarweise verschiedene irreduzible Polynome zerfällt.

Beispiel 16.13.

(a) Über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{F}_2$ sind nach Beispiel 16.9 alle Endomorphismen separabel.

(b) Sei $K = \mathbb{C}$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra und Satz 10.52 ist $f \in \mathrm{End}(V)$ genau dann halbeinfach, wenn f diagonalisierbar ist. Dies wird in Lemma 16.15 verallgemeinert. Andererseits sind $B(X^2 - 2) \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ und $B(X^2 + X + 1) \in \mathbb{F}_2^{2\times 2}$ halbeinfach, aber nicht diagonalisierbar.

Satz 16.14. *Genau dann ist $f \in \mathrm{End}(V)$ halbeinfach, wenn jeder f-invariante Unterraum $U \leq V$ ein f-invariantes Komplement besitzt.*

Beweis. Sei f halbeinfach und $\mu_f = \gamma_1 \dots \gamma_k$ mit paarweise verschiedenen irreduziblen Polynomen $\gamma_1, \dots, \gamma_k$. Die Weierstraß-Normalform von f liefert eine Zerlegung $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$ in f-invariante Unterräume, sodass die Darstellungsmatrix von f auf V_i durch $B(\gamma_j)$ für ein $1 \leq j \leq k$ gegeben ist (beachte $k \leq s$). Nach Lemma 15.20 und Schurs Lemma besitzt V_i keine echten nicht-trivialen f-invarianten Unterräume für $i = 1, \dots, s$. Sei $U \leq V$ f-invariant. Sei $W \leq V$ f-invariant mit $U \cap W = \{0\}$, sodass $\dim W$ möglichst groß ist (notfalls $W = \{0\}$). Angenommen es gilt $U \oplus W < V$. Dann existiert ein i mit $V_i \nsubseteq U + W$. Offenbar ist

$$L := V_i \cap (U + W) < V_i$$

f-invariant. Aus Schurs Lemma folgt $L = \{0\}$. Sei $u = w + v \in U \cap (W + V_i)$ mit $w \in W$ und $v \in V_i$. Dann gilt $v = u - w \in V_i \cap (U + W) = \{0\}$ und $u = w \in U \cap W = \{0\}$. Also ist $U \cap (W + V_i) = \{0\}$ im Widerspruch zur Wahl von W. Dies zeigt $V = U \oplus W$.

Nehmen wir umgekehrt an, dass jeder f-invariante Unterraum von V ein f-invariantes Komplement besitzt. Wir nehmen indirekt $\mu_f = \gamma^2\delta$ für ein irreduzibles Polynom γ an. Nach Voraussetzung besitzt $U := \mathrm{Ker}(\gamma(f)) \leq V$ ein f-invariantes Komplement W. Für $w \in W$ gilt

$$(\gamma\delta)(f)(w) \in U \cap W = \{0\}.$$

Wegen $(\gamma\delta)(f)(U) = \{0\}$ gilt sogar $(\gamma\delta)(f)(v) = 0$ für alle $v \in V$. Dann wäre aber $\mu_f \mid \gamma\delta$. Widerspruch. □

Lemma 16.15. *Sei $A \in K^{n\times n}$ separabel. Genau dann ist A halbeinfach, wenn ein Körper $L \supseteq K$ existiert, sodass A in $L^{n\times n}$ diagonalisierbar ist.*

Beweis. Sei A halbeinfach und $\mu_A = \gamma_1 \dots \gamma_k$ mit paarweise verschiedenen (separablen) irreduziblen Polynomen $\gamma_1, \dots, \gamma_k$. Sei L ein Zerfällungskörper von μ_A. Nach Lemma 16.11 hat jedes γ_i keine mehrfachen Nullstellen in L. Für $i \neq j$ existieren $\alpha, \beta \in K[X]$ mit $\alpha\gamma_i + \beta\gamma_j = 1$ nach Bézout. Daher haben γ_i und γ_j keine gemeinsamen Nullstellen in L. Insgesamt zerfällt μ_A in paarweise verschiedene Linearfaktoren in $L[X]$. Nach Satz 10.52 ist A in $L^{n\times n}$ diagonalisierbar. Ist umgekehrt A über einem Körper $L \supseteq K$ diagonalisierbar, so zerfällt μ_A in $L[X]$ in paarweise verschiedene Linearfaktoren. Somit kann μ_A in $K[X]$ keine mehrfachen irreduziblen Teiler haben. □

Lemma 16.16. *Sind $A, B \in K^{n\times n}$ vertauschbar, separabel und halbeinfach, so ist auch $A + B$ halbeinfach.*

Beweis. Sei L ein Zerfällungskörper von $\mu_A\mu_B$. Nach (dem Beweis von) Lemma 16.15 und Lemma 14.11 sind A und B in $L^{n\times n}$ simultan diagonalisierbar. Also ist auch $A + B$ in $L^{n\times n}$ diagonalisierbar. Nach Satz 10.52 hat μ_{A+B} keine mehrfachen Nullstellen in L. Nach Lemma 16.11 ist $A + B$ separabel und nach Lemma 16.15 halbeinfach. □

16.3 Verallgemeinerte Jordanblöcke

Bemerkung 16.17. Ist $\gamma \in K[X]$ irreduzibel, so kann man $\lambda := B(\gamma)$ als Element des Körpers $L := \mathrm{C}(B(\gamma))$ auffassen. Im folgenden Satz studieren wir den Jordanblock $J_k(\lambda) \in L^{k\times k}$ als Matrix in $K^{n\times n}$, wobei $n := k \deg(\gamma)$. Für $\gamma = X - \mu$ erhält man $J_k(\gamma) = J_k(\mu)$.

Satz 16.18 (Verallgemeinerter Jordanblock)**.** *Sei $\gamma \in K[X]$ irreduzibel und separabel vom Grad d und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$J_k(\gamma) := \begin{pmatrix} B(\gamma) & & & 0 \\ 1_d & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1_d & B(\gamma) \end{pmatrix} \approx B(\gamma^k).$$

Beweis. Sei $J := J_k(\gamma)$. Wie in Lemma 14.41 gilt

$$J^m = \begin{pmatrix} B(\gamma)^m & & & 0 \\ mB(\gamma)^{m-1} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ * & & mB(\gamma)^{m-1} & B(\gamma)^m \end{pmatrix}$$

für $m \in \mathbb{N}_0$ (vgl. Satz 14.42). Es folgt

$$\gamma(J) = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ \gamma'(B(\gamma)) & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ * & & \gamma'(B(\gamma)) & 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist $\gamma(J)$ nilpotent und $\mu_J \mid \gamma^k$. Analog ist

$$\gamma(J)^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ \gamma'(B(\gamma))^2 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ * & & \gamma'(B(\gamma))^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \gamma(J)^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ \gamma'(B(\gamma))^{k-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Da γ separabel ist, gilt $0 \le \deg \gamma' < \deg \gamma$. Insbesondere ist $\gamma \nmid \gamma'$ und $\gamma \nmid (\gamma')^{k-1}$ nach Folgerung 15.11. Aus Lemma 15.20 folgt $\gamma'(B(\gamma))^{k-1} = (\gamma')^{k-1}(B(\gamma)) \neq 0$. Dies zeigt $\mu_J = \gamma^k$. Die Behauptung folgt aus Satz 15.21. □

Satz 16.19 (Jordan-Chevalley-Zerlegung)**.** *Für jede separable Matrix $A \in K^{n\times n}$ existieren eindeutig bestimmte Matrizen $D, N \in K^{n\times n}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $A = D + N$ und $DN = ND$.

(b) D ist halbeinfach und N nilpotent.

Ggf. existiert ein $\alpha \in K[X]$ mit $\alpha(A) = D$.

Beweis.
Schritt 1: Existenz von D und N.
Die Eigenschaften von D und N sowie die Existenz von α sind invariant unter Basiswechsel. Wir dürfen daher A in die Weierstraß-Normalform transformieren. Da μ_A separabel ist, können wir anschließend jeden Block $B(\gamma^a)$ in der Weierstraß-Normalform zu $J_a(\gamma)$ umformen (Satz 16.18). Dann ist

$$A = \operatorname{diag}(J_{a_1}(\gamma_1), \ldots, J_{a_s}(\gamma_s)).$$

Für $i = 1, \ldots, s$ sei $d_i := \deg \gamma_i$ und

$$D_i := \operatorname{diag}(B(\gamma_i), \ldots, B(\gamma_i)) \in K^{a_i d_i \times a_i d_i}, \qquad N_i := J_{a_i}(\gamma_i) - D_i,$$
$$D := \operatorname{diag}(D_1, \ldots, D_s), \qquad N := \operatorname{diag}(N_1, \ldots, N_s).$$

Es gilt $A = D + N$. O. B. d. A. seien $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ die *verschiedenen* Primteiler von μ_A. Für $1 \le i \le k$ und $1 \le j \le s$ mit $\gamma_i = \gamma_j$ sei außerdem $a_i \ge a_j$. Nach Lemma 15.20 ist $\mu_{D_i} = \gamma_i$ und $\mu_D = \gamma_1 \ldots \gamma_k$, d. h. D ist halbeinfach. Andererseits ist N als strikte untere Dreiecksmatrix nilpotent (Beispiel 14.26). Eine Rechnung wie in Satz 16.18 zeigt $D_i N_i = N_i D_i$ und $DN = ND$.

Schritt 2: Existenz von α.
Wegen $J_i := J_{a_i}(\gamma_i) = D_i + N_i$ ist $D_i \in \mathrm{C}(J_i)$. Nach Satz 16.18 und Folgerung 15.34 existiert ein $\alpha_i \in K[X]$ mit $\alpha_i(J_i) = D_i$ für $i = 1, \ldots, k$. Sei $1 \le j \le s$ mit $\gamma_j = \gamma_i$. Dann ist $a_j \le a_i$ und $J_i = \left(\begin{smallmatrix} J_j & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}\right)$. Es folgt

$$\begin{pmatrix} D_j & 0 \\ * & * \end{pmatrix} = D_i = \alpha_i(J_i) = \begin{pmatrix} \alpha_i(J_j) & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

und $\alpha_i(J_j) = D_j$. Nach dem chinesischen Restsatz existiert ein $\alpha \in K[X]$ mit $\alpha \equiv \alpha_i \pmod{\gamma_i^{a_i}}$ für $i = 1, \ldots, k$. Aus $\gamma_i^{a_i}(J_i) = 0$ folgt

$$\alpha(A) = \operatorname{diag}\big(\alpha(J_1), \ldots, \alpha(J_s)\big) = \operatorname{diag}(D_1, \ldots, D_s) = D.$$

Da μ_D die gleichen Primteiler wie μ_A hat, ist D separabel.

Schritt 3: Eindeutigkeit von D und N.
Sei $A = \check{D} + \check{N}$ mit den gleichen Eigenschaften. Wir zeigen zunächst, dass $\check{D}$ separabel ist. Über einem Zerfällungskörper sind $\check{D}$ und $\check{N}$ nach Satz 14.8 und Lemma 14.12 simultan trigonalisierbar. Bzgl. einer geeigneten Basis ist dann A eine Dreiecksmatrix. Als nilpotente Matrix muss $\check{N}$ bzgl. dieser Basis eine strikte Dreiecksmatrix sein. Daher haben A und $\check{D}$ die gleiche Hauptdiagonale und damit das gleiche charakteristische Polynom (beachte: χ_A hängt nicht vom Zerfällungskörper ab). Da A separabel ist, muss auch $\check{D}$ separabel sein. Nach Voraussetzung ist $\check{D}$ mit A und mit $\alpha(A) = D$ vertauschbar. Nach Lemma 16.16 ist $D - \check{D}$ halbeinfach. Analog sind auch $\check{N}$ und N vertauschbar. Multipliziert man $(\check{N} - N)^{2n}$ aus, so erhält man Summanden der Form $\check{N}^i N^{2n-i}$ mit $0 \le i \le 2n$. Im Fall $i \ge n$ ist $\check{N}^i = 0$. Anderenfalls ist $2n - i \ge n$ und $N^{2n-i} = 0$. In jedem Fall ist $(\check{N} - N)^{2n} = 0$. Insgesamt ist $D - \check{D} = \check{N} - N$ halbeinfach und nilpotent. Das geht nur mit dem Minimalpolynom X, d. h. $\check{D} = D$ und $\check{N} = N$. □

Bemerkung 16.20. (a) Im Fall $n \leq 3$ kann auf die Separabilität von A in Satz 16.19 verzichtet werden. Ist A nämlich inseparabel, so besitzt μ_A einen irreduziblen Teiler vom Grad ≥ 2. Ggf. ist $A = D + 0_n$ halbeinfach. Außerdem ist $\chi_A = \mu_A$ und $\mathrm{C}(A) = \langle A^i : i \in \mathbb{N}_0 \rangle$ nach Folgerung 15.34. Für eine beliebige Jordan-Chevalley-Zerlegung $A = D+N$ ist $N = \alpha(A) \in \mathrm{C}(A)$ für ein $\alpha \in K[X]$. Wegen $\alpha^n(A) = N^n = 0$ ist $\mu_A \mid \alpha^n$. Nach Folgerung 15.11 ist jeder Primteiler von μ_A ein Teiler von α. Da A halbeinfach ist, muss bereits $\mu_A \mid \alpha$ gelten, d. h. $N = 0$. Also ist die Zerlegung $A = D + 0_n$ eindeutig.

(b) Für $n \geq 4$ sind nach Aufgabe II.36 sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit der Jordan-Chevalley-Zerlegung für inseparable Matrizen nicht garantiert.

(c) Chevalley konstruierte D und N mit einer Version des Newton-Verfahrens (Beispiel 11.36) für Matrizen.[1]

Folgerung 16.21. *Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existieren eindeutig bestimmte Matrizen $D, N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $A = D + N$ und $DN = ND$.

(b) D ist diagonalisierbar und N nilpotent.

Beweis. Nach Beispiel 16.13 ist A separabel und D ist genau dann halbeinfach, wenn D diagonalisierbar ist. □

Bemerkung 16.22. Liegt $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in Jordan-Normalform mit Hauptdiagonale $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ vor, so erhält man die Jordan-Chevalley-Zerlegung durch $D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ und $N := A - D$. Für beliebige Körper K kann man A über einem Zerfällungskörper L von μ_A auffassen und dort die Jordan-Normalform benutzen. Ist A separabel, so stimmen die Jordan-Chevalley-Zerlegungen über K und L nach Lemma 16.15 überein.

Beispiel 16.23. Sei $\gamma := X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und

$$A := B(\gamma^2) = \begin{pmatrix} . & . & . & -1 \\ 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & -2 \\ . & . & 1 & . \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}.$$

Wir bestimmen die Jordan-Chevalley-Zerlegung von A ohne den in Bemerkung 16.22 beschriebenen Umweg über $\mathbb{C}$ (oder $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$, vgl. Aufgabe I.15). Nach Satz 16.18 gilt $A \approx J_2(\gamma)$. Um diesen Basiswechsel zu realisieren, benötigen wir einen Basisvektor $b_3 \in \mathbb{Q}^4$ mit $\mu_{b_3} = \gamma$. Dafür eignet sich

$$b_3 := \gamma(A)e_1 = e_1 + e_3 = (1, 0, 1, 0)^{\mathrm{t}}.$$

Dann ist $b_4 := Ab_3 = (0, 1, 0, 1)^{\mathrm{t}}$. Für b_1 und b_2 soll gelten: $Ab_1 = b_2 + b_3$ und $Ab_2 = -b_1 + b_4$. Damit erhält man das Gleichungssystem

$$\gamma(A)b_1 = (A^2 + 1_4)b_1 = 2b_4 = (0, 2, 0, 2)^{\mathrm{t}}$$

[1] siehe [M. Geck, *On the Jordan–Chevalley decomposition of a matrix*, arXiv:2205.05432]

mit der Lösung $b_1 = 2e_2$. Schließlich ist $b_2 = Ab_1 - b_3 = (-1, 0, 1, 0)^{\mathrm{t}}$. Für

$$S := \begin{pmatrix} . & -1 & 1 & . \\ 2 & . & . & 1 \\ . & 1 & 1 & . \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Q})$$

gilt $S^{-1}AS = J_2(\gamma)$. Dies ergibt die Jordan-Chevalley-Zerlegung $A = D + N$ mit

$$D := S \operatorname{diag}(B(\gamma), B(\gamma))S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} . & -1 & . & -1 \\ 3 & . & -1 & . \\ . & 1 & . & -3 \\ 1 & . & 1 & . \end{pmatrix},$$

$$N := S \begin{pmatrix} 0_2 & 0_2 \\ 1_2 & 0_2 \end{pmatrix} S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} . & 1 & . & -1 \\ -1 & . & 1 & . \\ . & 1 & . & -1 \\ -1 & . & 1 & . \end{pmatrix}.$$

Satz 16.24. *Sei $A \in K^{n \times n}$ separabel mit Jordan-Chevalley-Zerlegung $A = D + N$. Dann gilt* $\mathrm{C}(A) = \mathrm{C}(D) \cap \mathrm{C}(N)$.

Beweis. Allgemein gilt $\mathrm{C}(D) \cap \mathrm{C}(N) \subseteq \mathrm{C}(D + N) = \mathrm{C}(A)$. Da D und $N = A - D$ Polynome in A sind, ist jede Matrix in $\mathrm{C}(A)$ auch mit D und N vertauschbar, d. h. $\mathrm{C}(A) \subseteq \mathrm{C}(D) \cap \mathrm{C}(N)$. □

17 Kronecker-Produkte

17.1 Definition und Eigenschaften

Bemerkung 17.1. Die Bestimmung des Zentralisators einer Matrix A führt auf die Matrixgleichung $AX = XA$. In diesem Kapitel lösen wir allgemeiner Gleichungen der Form $AX - XB = C$ und $AXB = C$ für gegebene Matrizen A, B und C.

Definition 17.2. Für $A = (a_{ij}) \in K^{n\times m}$ und $B \in K^{s\times t}$ nennt man die Blockmatrix

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nm}B \end{pmatrix} \in K^{ns\times mt}$$

das *Kronecker-Produkt* von A und B. Wir nummerieren die Zeilen von $A\otimes B$ mit Paaren (i,k) $(1 \le i \le n,$ $1 \le k \le s)$ und die Spalten mit Paaren (j,l) $(1 \le j \le m,\ 1 \le l \le t)$, jeweils in lexikographischer Reihenfolge. Dann ist $(A \otimes B)_{(i,k),(j,l)} = a_{ij}b_{kl}$.

Bemerkung 17.3.

(a) Seien V und W Vektorräume mit Basen $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ bzw. $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$. Das *Tensorprodukt* von V und W ist ein abstrakter Vektorraum $V \otimes W$ mit Basis

$$T = \{b_i \otimes c_j : i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\}.$$

Für $v = \sum \lambda_i b_i$ und $w = \sum \mu_j c_j$ schreibt man

$$v \otimes w := \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (b_i \otimes c_j).$$

Seien V' und W' weitere Vektorräume mit Basen B' bzw. C'. Für $f \in \mathrm{Hom}(V, V')$ und $g \in \mathrm{Hom}(W, W')$ zeigt man leicht, dass genau eine Abbildung $f \otimes g \in \mathrm{Hom}(V \otimes W, V' \otimes W')$ mit $(f\otimes g)(v\otimes w) = f(v)\otimes g(w)$ für alle $v \in V$ und $w \in W$ existiert. Sei $T' := \{b'\otimes c' : b' \in B',\ c' \in C'\}$ die Basis von $V' \otimes W'$ analog zu T. Für die Darstellungsmatrizen gilt

$${}_{T'}[f \otimes g]_T = {}_{B'}[f]_B \otimes {}_{C'}[g]_C.$$

Wählt man $V = K^n$ und $W = K^m$, so lässt sich $e_i \otimes e_j$ mit dem Kronecker-Produkt $e_i^{\mathrm{t}} \otimes e_j = E_{ij} \in K^{n\times m}$ identifizieren. Dann ist $V \otimes W = K^{n\times m}$. Da Vektorräume ohnehin durch ihre Dimension bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind, beschränken wir uns auf die Untersuchung von Kronecker-Produkten.

(b) Interessanter wird es, wenn man Tensorprodukte $V := V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$ bzw. $K^{d_1 \times \ldots \times d_k} := K^{d_1} \otimes \ldots \otimes K^{d_k}$ mit mehr als zwei Faktoren untersucht (sogenannte *höhere Tensoren*). Jedes Element in V hat die Form

$$t = \sum_{i=1}^{r} v_{i1} \otimes \ldots \otimes v_{ik}$$

mit $v_{ij} \in V_j$. Die kleinstmögliche Zahl r, für die eine solche Darstellung existiert, nennt man den *Rang* von t. Für $k = 2$ ist $\operatorname{rk} t$ nach Aufgabe I.20 der Rang der Matrix aus (a). Während der Rang einer Matrix mit dem Gauß-Algorithmus effizient berechnet werden kann, ist die Bestimmung von $\operatorname{rk} t$ für $k \geq 3$ nach HÅSTAD ein NP-schweres Problem. Für $K = \mathbb{Q}$ kennt man nicht einmal einen Algorithmus zur Bestimmung von $\operatorname{rk} t$. Nach Aufgabe II.38 ist $\operatorname{rk} t \leq 3$ für alle $t \in K^{2\times 2\times 2}$.

Lemma 17.4. *Für Matrizen A, B, C, D mit geeignetem Format gilt*

$$\begin{aligned} A \otimes (B \otimes C) &= (A \otimes B) \otimes C, & (A \otimes B)(C \otimes D) &= (AC) \otimes (BD), \\ A \otimes (B + C) &= A \otimes B + A \otimes C, & (A + B) \otimes C &= A \otimes C + B \otimes C, \\ (A \otimes B)^{\mathrm{t}} &= A^{\mathrm{t}} \otimes B^{\mathrm{t}}, & (A \otimes B)^* &= A^* \otimes B^* \ (K = \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

(a) Sind A und B invertierbar, so auch $A \otimes B$ mit $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

(b) $\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B)$.

(c) $\operatorname{rk}(A \otimes B) = \operatorname{rk}(A) \operatorname{rk}(B)$.

(d) $\det(A \otimes B) = \det(A)^m \det(B)^n$ *falls* $A \in K^{n\times n}$ *und* $B \in K^{m\times m}$.

Beweis. Sei $C = (c_{xy}) \in K^{u\times v}$. Die Zeilen von $(A \otimes B) \otimes C$ sind mit Paaren $((i,k),x)$ und die von $A \otimes (B \otimes C)$ mit Paaren $(i,(k,x))$ nummeriert. In beiden Fällen entspricht das der lexikographischen Reihenfolge der Tripel (i,k,x). Analog nummerieren wir die Spalten mit Tripeln (j,l,y). Dann ist

$$\big((A \otimes B) \otimes C\big)_{(i,k,x),(j,l,y)} = a_{ij} b_{kl} c_{xy} = \big(A \otimes (B \otimes C)\big)_{(i,k,x),(j,l,y)}.$$

Bei den Distributivgesetzen ist der Eintrag an der Stelle $((i,k),(j,l))$ auf beiden Seiten $a_{ij}(b_{kl} + c_{kl}) = a_{ij}b_{kl} + a_{ij}c_{kl}$ bzw. $(a_{ij} + b_{ij})c_{kl} = a_{ij}c_{kl} + b_{ij}c_{kl}$. Für das Produkt gilt

$$\begin{aligned} \big((A \otimes B)(C \otimes D)\big)_{(i,k),(j,l)} &= \sum_{x,y} a_{ix} b_{ky} c_{xj} d_{yl} \\ &= \Big(\sum_x a_{ix} c_{xj}\Big)\Big(\sum_y b_{ky} d_{yl}\Big) \\ &= (AC)_{ij} (BD)_{kl}. \end{aligned}$$

Schließlich ist

$$(A \otimes B)^{\mathrm{t}}_{(i,k),(j,l)} = (A \otimes B)_{(j,l),(i,k)} = a_{ji} b_{lk} = (A^{\mathrm{t}})_{ij} (B^{\mathrm{t}})_{kl}.$$

Für A^* und B^* konjugiert man zusätzlich die Einträge.

(a) Es gilt $(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) = 1_n \otimes 1_s = 1_{ns}$.

(b) Für $A \in K^{n\times n}$ und $B \in K^{s\times s}$ ist

$$\operatorname{tr}(A \otimes B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} a_{ii} b_{kk} = \operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B).$$

(c) Sei $a := \operatorname{rk} A$ und $b := \operatorname{rk} B$. Nach Bemerkung 6.20 existieren invertierbare Matrizen S, T, S', T' mit $SAT = \left(\begin{smallmatrix} 1_a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) =: D$ und $S'BT' = \left(\begin{smallmatrix} 1_b & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) =: D'$. Nach den Rechenregeln und (a) ist

$$(S \otimes S')(A \otimes B)(T \otimes T') = D \otimes D' \sim \begin{pmatrix} 1_{ab} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit invertierbaren Matrizen $S \otimes S'$ und $T \otimes T'$. Dies zeigt $\operatorname{rk}(A \otimes B) = \operatorname{rk}(1_{ab}) = ab$.

(d) Der Gauß-Algorithmus überführt A allein durch Additionen von Vielfachen von Zeilen zu anderen Zeilen in eine obere Dreiecksmatrix $R = (r_{ij})$ (vgl. Aufgabe I.18). Nach Satz 9.6 ist $\det A = \det R = r_{11} \dots r_{nn}$. Führt man dieselben Operationen blockweise mit $A \otimes B$ durch, so erhält man $R \otimes B$, ohne die Determinante zu ändern. Nach Lemma 9.9 und Bemerkung 9.8 ist daher

$$\begin{aligned} \det(A \otimes B) &= \det(r_{11}B) \dots \det(r_{nn}B) \\ &= r_{11}^m \dots r_{nn}^m \det(B)^n = \det(A)^m \det(B)^n. \end{aligned}$$ □

Bemerkung 17.5. Im Allgemeinen ist $A \otimes B \neq B \otimes A$. Wegen

$$(A \otimes B)_{(i,k),(j,l)} = a_{ij}b_{kl} = (B \otimes A)_{(k,i),(l,j)}$$

entsteht $B \otimes A$ aus $A \otimes B$ durch Umordnen der Zeilen und Spalten. Für quadratische $A \in K^{n \times n}$ und $B \in K^{m \times m}$ ist daher $A \otimes B = P(B \otimes A)P^{-1} \approx B \otimes A$ für eine Permutationsmatrix P, die nur von n und m abhängt.

Definition 17.6. Für $A \in K^{n \times m}$ mit Spalten $a_1, \dots, a_m$ sei $\operatorname{vec}(A) := (a_1^{\mathrm{t}}, \dots, a_m^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} \in K^{nm}$ der Vektor, der durch Untereinanderschreiben der Spalten entsteht. Man nennt $\operatorname{vec}(A)$ die *Vektorisierung* von A. Offenbar ist $\operatorname{vec}\colon K^{n \times m} \to K^{nm}$ ein Isomorphismus.

Lemma 17.7. *Für $A \in K^{s \times n}$, $X \in K^{n \times m}$ und $B = (b_{lj}) \in K^{m \times t}$ gilt*

$$\boxed{\operatorname{vec}(AXB) = (B^{\mathrm{t}} \otimes A) \operatorname{vec}(X).}$$

Beweis. Seien $x_1, \dots, x_m$ die Spalten von X. Die j-te Spalte von XB ist $\sum_{l=1}^m b_{lj}x_l$. Also ist die j-te Spalte von AXB gleich $\sum_{l=1}^m b_{lj}Ax_l$. Andererseits ist der (j,l)-Block von $B^{\mathrm{t}} \otimes A$ gleich $b_{lj}A$. Der j-te Block von $(B^{\mathrm{t}} \otimes A) \operatorname{vec}(X)$ ist daher ebenfalls $\sum_{l=1}^m b_{lj}Ax_l$. □

Satz 17.8. *Seien $A \in K^{s \times n}$, $B \in K^{m \times t}$ und $C \in K^{s \times t}$.*

(a) Die Lösungen der homogenen Gleichung $AXB = 0$ bilden einen Vektorraum $L_0 \leq K^{n \times m}$ der Dimension $nm - \operatorname{rk}(A)\operatorname{rk}(B)$.

(b) Besitzt $AXB = C$ eine Lösung $Y \in K^{n \times m}$, so ist $Y + L_0$ die Lösungsmenge.

Beweis. Nach Lemma 17.7 ist $AXB = C$ äquivalent zum linearen Gleichungssystem $(B^{\mathrm{t}} \otimes A) \operatorname{vec}(X) = \operatorname{vec}(C)$ mit nm Unbekannten. Nach Lemma 17.4(c) ist $\operatorname{rk}(B^{\mathrm{t}} \otimes A) = \operatorname{rk}(B^{\mathrm{t}}) \operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(A) \operatorname{rk}(B)$. Da vec ein Isomorphismus ist, folgt die Behauptung aus Satz 6.6. □

Beispiel 17.9. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist 1_2 eine Lösung von $AXB = C$. Wegen $\operatorname{rk}(A) = 1$ und $\operatorname{rk}(B) = 2$ hat L_0 nach Satz 17.8 die Dimension $4 - 2 = 2$. Da B invertierbar ist, gilt $L_0 = \{X : AX = 0\}$. Die Spalten jeder Matrix in L_0 liegen also in $\operatorname{Ker} A = \langle (-2, 1)^{\mathrm{t}} \rangle$. Aus Dimensionsgründen ist

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -2s & -2t \\ s & t \end{pmatrix} : s, t \in K \right\},$$

und $1_2 + L_0$ ist die Lösungsmenge.

Definition 17.10. Für $A \in K^{n \times n}$ und $B \in K^{m \times m}$ nennt man

$$A \oplus B := A \otimes 1_m + 1_n \otimes B \in K^{nm \times nm}$$

die *Kronecker-Summe* von A und B.

Satz 17.11. *Seien $A \in K^{n \times n}$ und $B \in K^{m \times m}$, sodass $\chi_A = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$ und $\chi_B = (X - \mu_1) \dots (X - \mu_m)$ in Linearfaktoren zerfallen. Dann gilt*

$$\chi_{A \otimes B} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (X - \lambda_i \mu_j), \qquad \chi_{A \oplus B} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (X - \lambda_i - \mu_j).$$

Beweis. Nach Satz 14.8 existieren $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ und $T \in \mathrm{GL}(m, K)$, sodass SAS^{-1} und TBT^{-1} obere Dreiecksmatrizen sind. Nach Lemma 17.4 gilt

$$(S \otimes T)(A \otimes B)(S \otimes T)^{-1} = SAS^{-1} \otimes TBT^{-1},$$
$$(S \otimes T)(A \oplus B)(S \otimes T)^{-1} = SAS^{-1} \oplus TBT^{-1}.$$

Da ähnliche Matrizen das gleiche charakteristische Polynom haben, können wir annehmen, dass A und B obere Dreiecksmatrizen mit den Hauptdiagonalen $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ bzw. $(\mu_1, \dots, \mu_m)$ sind. Dann sind $A \otimes B$ und $A \oplus B$ offenbar obere Dreiecksmatrizen mit den Diagonaleinträgen $\lambda_i \mu_j$ bzw. $\lambda_i + \mu_j$. Daraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung 17.12.

(a) Sind A und B diagonalisierbar, so auch $A \otimes B$ und $A \oplus B$ (gleicher Beweis mit Diagonalmatrizen statt Dreiecksmatrizen).

(b) Für beliebige A und B lässt sich Satz 17.11 über einem Zerfällungskörper von $\chi_A \chi_B$ anwenden (Satz 15.39). Man erhält

$$\det(A \otimes B) = \prod_{i,j} \lambda_i \mu_j = \det(A)^m \det(B)^n,$$
$$\operatorname{tr}(A \otimes B) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j = \operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B)$$

(vgl. Lemma 17.4).

Beispiel 17.13. Mit Hilfe von Satz 17.11 kann man zeigen, dass die Eigenwerte aller rationalen Matrizen einen Körper $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C}$ bilden. Sind $x, y \in \overline{\mathbb{Q}}$ Eigenwerte von A bzw. B, so ist xy ein Eigenwert von $A \otimes B$ und $x + y$ ein Eigenwert von $A \oplus B$. Man nennt $\overline{\mathbb{Q}}$ den Körper der *algebraischen Zahlen* (Aufgabe II.37). Nach Lemma 15.20 ist $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ zum Beispiel ein Eigenwert von

$$B(X^2 - 2) \oplus B(X^2 - 3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

17.2 Lineare Matrixgleichungen

Bemerkung 17.14. Der folgende Satz liefert eine hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der Matrixgleichung $AX - XB = C$.

Satz 17.15 (Sylvester-Gleichung)**.** *Für $A \in K^{n\times n}$ und $B \in K^{m\times m}$ sind äquivalent:*

(1) Für jedes $C \in K^{n\times m}$ existiert (genau) ein $X \in K^{n\times m}$ mit $AX - XB = C$.

(2) Aus $AX = XB$ mit $X \in K^{n\times m}$ folgt $X = 0$.

(3) χ_A und χ_B sind teilerfremd.

(4) μ_A und μ_B sind teilerfremd.

Beweis.

(1) $\Leftrightarrow$ (2): Die lineare Abbildung $K^{n\times m} \to K^{n\times m}$, $X \mapsto AX - XB$ ist genau dann surjektiv (bijektiv), wenn sie injektiv ist.

(2) $\Rightarrow$ (3): Seien χ_A und χ_B nicht teilerfremd. Dann existiert ein gemeinsamer Teiler $\gamma \in K[X]$ mit Nullstelle x in einem Zerfällungskörper L von $\chi_A\chi_B$ (Satz 15.39). Nun ist x Eigenwert von A und von B^{t} (als Matrizen über L). Nach Satz 17.11 ist $x - x = 0$ Eigenwert von $P := (-B^{\mathrm{t}}) \oplus A$. Insbesondere ist $\det P = 0$. Nach Lemma 17.7 ist

$$\operatorname{vec}(AX - XB) = \operatorname{vec}(AX1_m) - \operatorname{vec}(1_nXB) = P \operatorname{vec}(X).$$

Daher existiert ein $X \in K^{n\times m} \setminus \{0\}$ mit $AX = XB$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Nach Cayley-Hamilton (Satz 10.48) gilt $\mu_A \mid \chi_A$ und $\mu_B \mid \chi_B$. Jeder gemeinsame Teiler von μ_A und μ_B ist also ein gemeinsamer Teiler von χ_A und χ_B.

(4) $\Rightarrow$ (2): Sei $AX = XB$. Induktiv folgt $A^kX = A^{k-1}XB = XB^k$ für $k \in \mathbb{N}$ und daher $\alpha(A)X = X\alpha(B)$ für alle $\alpha \in K[X]$. Mit $\alpha = \mu_B$ erhält man $\mu_B(A)X = X\mu_B(B) = 0$. Nach Bézout (Lemma 15.6) existieren $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in K[X]$ mit $\tilde{\alpha}\mu_A + \tilde{\beta}\mu_B = 1$. Wegen $\mu_A(A) = 0$ ist $\tilde{\beta}(A)\mu_B(A) = 1_n$ und $X = \tilde{\beta}(A)\mu_B(A)X = 0$ (vgl. Aufgabe II.34). □

Beispiel 17.16. Seien $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Dann sind $\chi_A = (X-1)^2$ und $\chi_B = (X-2)^2$ teilerfremd. Nach Satz 17.15 besitzt $AX - XB = 1_2$ also genau eine Lösung. Die Koeffizientenmatrix ist

$$P = (-B^{\mathrm{t}}) \oplus A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Durch Rückwärtseinsetzen erhält man aus $P\operatorname{vec}(X) = (1,0,0,1)^{\mathrm{t}}$ die Lösung $\operatorname{vec}(X) = (1,1,-1,-1)^{\mathrm{t}}$, also

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 17.17. Sind χ_A und χ_B nicht teilerfremd, so hängt die Lösbarkeit von $AX - XB = C$ wie folgt von C ab.

Satz 17.18 (Roth)**.** *Seien $A \in K^{n\times n}$, $B \in K^{m\times m}$ und $C \in K^{n\times m}$. Genau dann existiert ein $X \in K^{n\times m}$ mit $AX - XB = C$, wenn $\left(\begin{smallmatrix} A & C \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) \approx \operatorname{diag}(A,B)$.*

Beweis (Flanders-Wimmer). Sei $k := n+m$, $D := \operatorname{diag}(A,B)$ und $M := \left(\begin{smallmatrix} A & C \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ in $K^{k\times k}$. Für $X \in K^{n\times m}$ mit $AX - XB = C$ ist $S := \left(\begin{smallmatrix} 1_n & X \\ 0 & 1_m \end{smallmatrix}\right)$ invertierbar mit $S^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1_n & -X \\ 0 & 1_m \end{smallmatrix}\right)$. Es gilt

$$S^{-1}DS = \begin{pmatrix} A & -XB \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_n & X \\ 0 & 1_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AX - XB \\ 0 & B \end{pmatrix} = M.$$

Sei umgekehrt $S \in \mathrm{GL}(k,K)$ mit $M = S^{-1}DS$. Wir betrachten die Unterräume

$$U := \{Y \in K^{k\times m} : MY = YB\},$$
$$V := \{Y \in K^{k\times m} : DY = YB\}.$$

Wegen $MY = YB \iff D(SY) = (SY)B$ ist $U \to V$, $Y \mapsto SY$ ein Isomorphismus und $\dim U = \dim V$. Für $Y = \left(\begin{smallmatrix} P \\ Q \end{smallmatrix}\right)$ mit $P \in K^{n\times m}$ und $Q \in K^{m\times m}$ ist

$$MY - YB = \begin{pmatrix} AP + CQ - PB \\ BQ - QB \end{pmatrix}, \quad DY - YB = \begin{pmatrix} AP - PB \\ BQ - QB \end{pmatrix}. \tag{17.1}$$

Für $\pi\colon K^{k\times m} \to K^{m\times m}$, $Y \mapsto Q$ folgt $\pi(U), \pi(V) \subseteq \mathrm{C}(B)$. Für $Q \in \mathrm{C}(B)$ ist umgekehrt $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ Q \end{smallmatrix}\right) \in V$, d. h. $\pi(V) = \mathrm{C}(B)$. Im Fall $Q = 0$ sind die rechten Seiten in (17.1) identisch, d. h. $U \cap \operatorname{Ker}\pi = V \cap \operatorname{Ker}\pi$. Der Homomorphiesatz für $\pi_{|U}$ bzw. $\pi_{|V}$ liefert

$$\begin{aligned} \dim \pi(U) &= \dim(U) - \dim(U \cap \operatorname{Ker}\pi) \\ &= \dim(V) - \dim(V \cap \operatorname{Ker}\pi) = \dim \mathrm{C}(B). \end{aligned}$$

Aus $\pi(U) \subseteq \mathrm{C}(B)$ folgt daher $\pi(U) = \mathrm{C}(B) \ni -1_m$. Also existiert ein $X \in K^{n\times m}$ mit $\left(\begin{smallmatrix} X \\ -1_m \end{smallmatrix}\right) \in U$. Nun gilt $AX - XB = C$ nach (17.1). □

Beispiel 17.19. Sei $A = B = \operatorname{diag}(1,2)$. Für $X = (x_{ij}) \in K^{2\times 2}$ ist $AX - XA = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -x_{12} \\ x_{21} & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Also ist $AX - XA = C$ genau dann lösbar, wenn $c_{11} = c_{22} = 0$ gilt.

Bemerkung 17.20. Ersetzt man in Satz 17.18 die Ähnlichkeit durch die Äquivalenz (Bemerkung 6.20) von Matrizen, so erhält man eine Charakterisierung der Lösbarkeit der Gleichung $AX - YB = C$ mit zwei Unbekannten.

Satz 17.21 (Roth)**.** *Seien $A \in K^{n\times s}$, $B \in K^{t\times m}$ und $C \in K^{n\times m}$. Genau dann existieren $X \in K^{s\times m}$ und $Y \in K^{n\times t}$ mit $AX - YB = C$, wenn*

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(B).$$

Beweis. Seien $S_1 \in \mathrm{GL}(n, K)$, $T_1 \in \mathrm{GL}(s, K)$, $S_2 \in \mathrm{GL}(t, K)$ und $T_2 \in \mathrm{GL}(m, K)$. Wegen

$$S_1(AX - YB)T_2 = (S_1AT_1)(T_1^{-1}XT_2) - (S_1YS_2^{-1})(S_2BT_2)$$

ist $AX - YB = C$ genau dann lösbar, wenn $A'X' - Y'B' = C'$ mit $A' := S_1AT_1$, $B' := S_2BT_2$ und $C' := S_1CT_2$ lösbar ist. Außerdem ist

$$\begin{pmatrix} A' & C' \\ 0 & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$$

und $\operatorname{rk}(A') = \operatorname{rk} A$, $\operatorname{rk}(B') = \operatorname{rk} B$. Nach Bemerkung 6.20 können wir daher $A = \left(\begin{smallmatrix} 1_a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 1_b & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit $a = \operatorname{rk} A$ und $b = \operatorname{rk} B$ annehmen. Wir zerlegen $C = \left(\begin{smallmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{smallmatrix}\right)$ mit $C_{11} \in K^{a\times b}$. Dann ist $AX - YB = C$ genau dann lösbar, wenn $C_{22} = 0$ gilt. Andererseits ist

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_a & 0 & C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 & C_{21} & C_{22} \\ 0 & 0 & 1_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{22} \\ 0 & 0 & 1_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix auf der rechten Seite hat Rang $a + b + \operatorname{rk}(C_{22}) \geq a + b$ mit Gleichheit genau dann, wenn $C_{22} = 0$. □

17.3 Das Hadamard-Produkt

Definition 17.22. Für $A, B \in K^{n\times m}$ nennt man $A \odot B := (a_{ij}b_{ij}) \in K^{n\times m}$ das *Hadamard-Produkt* (oder *Schur-Produkt*) von A und B.

Bemerkung 17.23.

(a) Das Hadamard-Produkt entspricht der komponentenweisen Multiplikation in K^{nm}. Daher gelten die üblichen Rechenregeln:

$$\begin{aligned} A \odot B &= B \odot A, & (A \odot B) \odot C &= A \odot (B \odot C) \\ (A \odot B)^{\mathrm{t}} &= (A^{\mathrm{t}}) \odot (B^{\mathrm{t}}), & (A + B) \odot C &= (A \odot C) + (B \odot C). \end{aligned}$$

(b) Offenbar ist $A \odot B$ die Teilmatrix von $A \otimes B$ mit den Zeilen (i, i) und den Spalten (j, j). Insbesondere ist $\operatorname{rk}(A \odot B) \leq \operatorname{rk}(A \otimes B) = \operatorname{rk}(A)\operatorname{rk}(B)$ nach Lemma 17.4.

Satz 17.24 (SCHUR). *Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ positiv semidefinit. Dann ist auch $A \odot B$ positiv semidefinit. Ist A positiv definit und $b_{11}, \dots, b_{nn} > 0$, so ist $A \odot B$ positiv definit.*[1]

Beweis. Nach Aufgabe II.23 sind A und B hermitesch und besitzen hermitesche Wurzeln $\sqrt{A}$ und $\sqrt{B}$. Nach Lemma 17.4 ist $R := \sqrt{A} \otimes \sqrt{B}$ hermitesch mit $R^2 = A \otimes B$. Für $v \in \mathbb{C}^{n^2}$ ist daher $v(A \otimes B)v^* = (vR)(vR)^* = |vR|^2 \geq 0$. Sei $w \in \mathbb{C}^n$ und $v := \sum_{i=1}^n w_i(e_i \otimes e_i) \in \mathbb{C}^{n^2}$. Nach Lemma 17.4 ist $(e_i \otimes e_i)(A \otimes B)(e_j \otimes e_j)^* = (e_i A e_j^{\mathrm{t}}) \otimes (e_i B e_j^{\mathrm{t}}) = a_{ij}b_{ij}$ für $i, j = 1, \dots, n$. Daher gilt

$$w(A \odot B)w^* = \sum_{i,j=1}^n w_i a_{ij} b_{ij} \overline{w_j} = v(A \otimes B)v^* \geq 0.$$

Sei nun A positiv definit und $b_{11}, \dots, b_{nn} > 0$. Für $\sqrt{B} = (r_{ij}) = (\overline{r_{ji}})$ ist $b_{ij} = \sum_{k=1}^n r_{ik}\overline{r_{jk}}$. Sei $w \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, etwa $w_l \neq 0$. Für $k = 1, \dots, n$ sei $v_k := (w_1 r_{1k}, \dots, w_n r_{nk}) \in \mathbb{C}^n$. Wegen $\sum_k |r_{lk}|^2 = b_{ll} > 0$ ist $v_k \neq 0$ für ein k. Es folgt

$$w(A \odot B)w^* = \sum_{i,j=1}^n w_i a_{ij} b_{ij} \overline{w_j} = \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^n w_i r_{ik} a_{ij} r_{kj} \overline{w_j} = \sum_{k=1}^n v_k A v_k^* > 0. \qquad \square$$

Satz 17.25 (OPPENHEIM-Ungleichung). *Für positiv semidefinite Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt*

$$\det(A \odot B) \geq \det(A) b_{11} \dots b_{nn}.$$

Beweis. Ist A nicht positiv definit, so ist 0 nach Aufgabe II.23 ein Eigenwert von A und $\det A = 0$. In diesem Fall folgt die Behauptung aus Satz 17.24. Sei also A positiv definit. Wir argumentieren durch Induktion nach n. Im Fall $n = 1$ gilt Gleichheit. Sei nun $n \geq 2$.

Wegen $(0, u)A(0, u)^* = uA_{11}u^*$ für $u \in \mathbb{C}^{n-1}$ ist A_{11} positiv definit. Insbesondere ist $\det(A_{11}) > 0$. Sei $c := \det(A)/\det(A_{11})$ und $A' := A - cE_{11}$. Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$\det(A') = \det(A) - c\det(A_{11}) = 0.$$

Da A hermitesch ist, gilt $A' = \left(\begin{smallmatrix} x & u \\ u^* & A_{11} \end{smallmatrix}\right)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathbb{C}^{n-1}$. Für $U := \left(\begin{smallmatrix} 1 & -uA_{11}^{-1} \\ 0 & 1_{n-1} \end{smallmatrix}\right)$ ist

$$\begin{aligned} UA'U^* &= \begin{pmatrix} x - uA_{11}^{-1}u^* & 0 \\ u^* & A_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -A_{11}^{-1}u^* & 1_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x - uA_{11}^{-1}u^* & 0 \\ 0 & A_{11} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aus $0 = \det(A') = (x - uA_{11}^{-1}u^*)\det(A_{11})$ folgt $x = uA_{11}^{-1}u^*$. Mit $UA'U^* = \operatorname{diag}(0, A_{11})$ ist auch A' positiv semidefinit. Nach Satz 17.24 ist $A' \odot B = A \odot B - cb_{11}E_{11}$ positiv semidefinit. Entwicklung nach der ersten Zeile und $(A \odot B)_{11} = A_{11} \odot B_{11}$ ergeben

$$0 \leq \det(A \odot B - cb_{11}E_{11}) = \det(A \odot B) - cb_{11}\det(A_{11} \odot B_{11}).$$

Offenbar ist B_{11} positiv semidefinit. Nach Induktion gilt $\det(A_{11} \odot B_{11}) \geq \det(A_{11})b_{22} \dots b_{nn}$. Wegen $cb_{11} \geq 0$ folgt

$$\det(A \odot B) \geq cb_{11}\det(A_{11})b_{22} \dots b_{nn} = \det(A)b_{11} \dots b_{nn}. \qquad \square$$

[1] Dies gilt insbesondere, wenn A und B positiv definit sind.

Folgerung 17.26. *Für positiv semidefinite Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt* $\det(A \odot B) \geq \det(A)\det(B)$.

Beweis. Nach Aufgabe II.23 und Bemerkung 10.35 ist $\det A \geq 0$. Nach Satz 17.25 (angewendet auf B und 1_n) ist $b_{11} \dots b_{nn} = \det(B \odot 1_n) \geq \det B$. Mit Satz 17.25 folgt

$$\det(A \odot B) \geq \det(A) b_{11} \dots b_{nn} \geq \det(A)\det(B). \qquad \square$$

Aufgaben

Aufgabe II.1. Seien $\alpha, \beta \in K[X]$ mit $\alpha \mid \beta \mid \alpha$. Zeigen Sie, dass ein $c \in K^\times$ mit $\alpha = c\beta$ existiert.

Aufgabe II.2. Sei $1 + 1 \neq 0$ in K. Zeigen Sie $\chi_A = X^3 - \operatorname{tr}(A)X^2 + \frac{1}{2}\big(\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\big)X - \det(A)$ für alle $A \in K^{3\times 3}$.

Aufgabe II.3. Sei $A \in K^{n\times m}$ und $B \in K^{m\times n}$. Beweisen Sie die *Determinanten-Formel* von Sylvester

$$\det(1_n + AB) = \det(1_m + BA).$$

Hinweis: Lemma 10.38.

Aufgabe II.4. Seien $A, B \in K^{n\times n}$.

(a) Beweisen oder widerlegen Sie:

$$\chi_A = \chi_{A^\mathrm{t}}, \qquad \mu_A = \mu_{A^\mathrm{t}}, \qquad \mu_{AB} = \mu_{BA}.$$

(b) Wie lassen sich $\chi_{A^{-1}}$ und $\mu_{A^{-1}}$ aus χ_A und μ_A berechnen, falls A invertierbar ist?

Aufgabe II.5. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $A \in \mathbb{F}_2^{n\times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn $A^2 = A$.
Hinweis: Satz 10.52.

(b) $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_2)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn $A = 1_n$.

(c) $|\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_2)| = (2^n - 1)(2^n - 2)\dots(2^n - 2^{n-1})$.
Hinweis: Satz 7.46.

Aufgabe II.6. Zeigen Sie, dass für $f \in (K^{n\times n})^*$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) $f(E_{11}) = 1$ und $f(AB) = f(BA)$ für alle $A, B \in K^{n\times n}$.

(2) $f(E_{11}) = 1$ und $f(S^{-1}AS) = f(A)$ für alle $A \in K^{n\times n}$ und $S \in \mathrm{GL}(n, K)$.

(3) $f(P) = \operatorname{rk} P$ für alle $P \in K^{n\times n}$ mit $P^2 = P$.

(4) $f = \operatorname{tr}$.

Hinweis: $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

Aufgabe II.7. Sei V ein euklidischer Raum und $U, W \leq V$. Zeigen Sie:

(a) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

(b) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

Hinweis: Man kann Lemma 7.44 benutzen.

Aufgabe II.8. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $S \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass

$$\{A \in \mathrm{GL}(n,K) : ASA^{\mathrm{t}} = S\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n,K)$ ist. Für $S = 1_n$ erhält man $\mathrm{O}(n,K)$.

Aufgabe II.9. Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig. Dann bilden $0, v, w$ die Eckpunkte eines Dreiecks mit Seitenlängen $A := |v|$, $B := |w|$ und $C := |v - w|$. Seien α, β, γ die Winkel gegenüber von A, B, C. Zeigen Sie:

(a) (Sinussatz) $\frac{\sin\alpha}{A} = \frac{\sin\beta}{B} = \frac{\sin\gamma}{C}$.

(b) (Kosinussatz) $C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma$.

(c) (Trigonometrischer Pythagoras) $\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$.

Aufgabe II.10. Für $\zeta := \cos(\pi/5) + \mathrm{i}\sin(\pi/5) \in \mathbb{C}$ gilt $\zeta^5 = -1$ (siehe Beweis von Lemma 11.27). Sei $\omega := \zeta + \zeta^{-1} = 2\mathrm{Re}(\zeta) \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) $\omega^2 - \omega - 1 = 0$.
Hinweis: $X^5 + 1 = (X+1)(X^4 - X^3 + X^2 - X + 1)$.

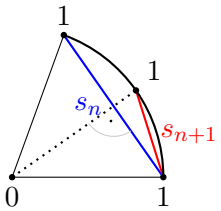
(b) $\omega = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$.

(c)
$$D(\pi/5) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{5}+1 & -\sqrt{10-2\sqrt{5}} \\ \sqrt{10-2\sqrt{5}} & \sqrt{5}+1 \end{pmatrix}.$$
Hinweis: $\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 = 1$.

Aufgabe II.11. Wir approximieren die Halbkreisbogenlänge π durch den halben Umfang eines regelmäßigen 2^n-Ecks mit „Radius“ 1. Dafür sei s_n die Seitenlänge des regelmäßigen 2^n-Ecks.

(a) Zeigen Sie $s_2 = \sqrt{2}$.

(b) Zeigen Sie[2]
$$s_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} = \frac{s_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}$$
durch zweimalige Anwendung von Pythagoras:



(c) Begründen Sie $\lim_{n\to\infty} 2^n s_{n+1} = \pi$. Berechnen Sie $2^{10} s_{11}$.

[2]Die erste Formel ist numerisch *instabil*, siehe Bemerkung 18.29.

Aufgabe II.12. Zeigen Sie für alle $v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$:

(a) $|v|^2|w|^2 = |v \times w|^2 + |[v, w]|^2$.
Hinweis: Man kann die Cauchy-Binet-Formel benutzen.

(b) Für den Winkel φ zwischen v und w gilt $\sin\varphi = \frac{|v\times w|}{|v||w|}$.

(c) Die Rechte-Hand-Regel gilt (Beispiel 11.16).
Hinweis: Nach Drehung kann man annehmen, dass v auf der x-Achse und w in der xy-Ebene liegen.

Aufgabe II.13. Sei $V := \mathbb{R}^n$ der euklidische Raum bzgl. des Standardskalarprodukts. Sei $v \in V$ normiert und $S_v \in \mathrm{O}(V)$ die Spiegelung an $v^\perp$. Zeigen Sie $[S_v] = 1_n - 2v^{\mathrm{t}}v$.
Bemerkung: Solche Matrizen nennt man *Householder-Transformationen*.

Aufgabe II.14. Sei $\alpha \in \mathbb{R}[X]$. Zeigen Sie, dass Polynome $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \mathbb{R}[X]$ mit $\alpha = \gamma_1 \ldots \gamma_k$ und $\deg \gamma_i \leq 2$ für $i = 1, \ldots, k$ existieren.
Hinweis: Bemerkung 11.37.

Aufgabe II.15. Sei V ein d-dimensionaler K-Vektorraum. Eine Abbildung $\beta\colon V^n \to K$ heißt *Multilinearform*, falls sie in jeder Komponente linear ist, d. h.

$$\beta(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + \lambda w, v_{i+1}, \ldots, v_n) = \beta(v_1, \ldots, v_n) + \lambda\beta(v_1, \ldots, w, \ldots, v_n)$$

für alle $1 \leq i \leq n$, $\lambda \in K$ und $v_1, \ldots, v_n, w \in V$. Zeigen Sie:

(a) Die Multilinearformen bilden einen Unterraum von $\mathrm{Abb}(V^n, K)$ der Dimension d^n.

(b) Für jede Multilinearform β sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) Für $v_1, \ldots, v_n \in V$ gilt $\beta(v_1, \ldots, v_n) = 0$, falls ein $1 \leq i < n$ mit $v_i = v_{i+1}$ existiert.

(2) Für $v_1, \ldots, v_n \in V$ gilt $\beta(v_1, \ldots, v_n) = 0$, falls $1 \leq i < j \leq n$ mit $v_i = v_j$ existieren.

(3) Für alle linear abhängigen $v_1, \ldots, v_n \in V$ gilt $\beta(v_1, \ldots, v_n) = 0$.

Ggf. nennt man β *alternierend*.

(c) Für $f_1, \ldots, f_n \in V^*$ definiert $\beta(v_1, \ldots, v_n) := \det\big((f_i(v_j))_{ij}\big)$ eine alternierende Multilinearform.

(d) Die alternierenden Multilinearformen bilden einen Vektorraum der Dimension $\binom{d}{n}$ (wobei $\binom{d}{n} = 0$ für $n > d$).

(e) Für $V = K^n$ ist die Determinante die einzige alternierende Multilinearform β mit $\beta(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Aufgabe II.16. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\beta \in \mathrm{Bil}(V)$ symmetrisch mit $\mathrm{ind}\beta = (r, s, t)$. Zeigen Sie, dass r (bzw. s) die maximale Dimension eines Unterraums $U \leq V$ ist, sodass die Einschränkung von β auf $U \times U$ positiv (bzw. negativ) definit ist.

Aufgabe II.17. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit $\mathrm{ind}A = (r, s, t)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\mathrm{ind}(\lambda A) = \begin{cases} (r, s, t) & \text{falls } \lambda > 0, \\ (s, r, t) & \text{falls } \lambda < 0, \\ (0, 0, n) & \text{falls } \lambda = 0. \end{cases}$$

Aufgabe II.18. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Wie kann man an χ_A ablesen, ob A positiv semidefinit ist? Beweisen Sie ein Kriterium in Analogie zu Satz 12.44.

Aufgabe II.19. Sei V ein unitärer Raum und $f \in \mathrm{End}(V)$ mit adjungierter Abbildung f^*. Sei $g \in \mathrm{End}(V^*)$ die zu f duale Abbildung (hier nicht mit f^* bezeichnet). Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $F\colon V \to V^*$, $v \mapsto F_v$ mit $F_v(w) := [w, v]$ ist eine Bijektion (aber kein Isomorphismus[3])

(b) Es gilt $g = F \circ f^* \circ F^{-1}$.

Aufgabe II.20. Zeigen Sie für alle $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$:

(a) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}(A^*A)$.

(b) $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A^*A)$.

Aufgabe II.21. Zeigen Sie, dass man im Hauptachsensatz und im Spektralsatz (für Matrizen) die Transformationsmatrix S mit $\det S = 1$ wählen kann.

Aufgabe II.22 (Fuglede)**.** Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ vertauschbar. Zeigen Sie:

(a) Ist A normal, so gilt $A^*B = BA^*$.

(b) Sind A und B normal, so auch AB.

Aufgabe II.23. Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt *positiv (semi)definit*, falls $vAv^* > 0$ (bzw. $vAv^* \geq 0$) für alle $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gilt. Zeigen Sie:

(a) Jede positiv (semi)definite Matrix ist hermitesch.
Bemerkung: Reelle Matrizen mit $vAv^{\mathrm{t}} \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ sind nicht automatisch symmetrisch.

(b) Eine hermitesche Matrix A ist genau dann positiv (semi)definit, wenn alle Eigenwerte von A positiv (bzw. nicht-negativ) sind.

(c) Für $k \in \mathbb{N}$ besitzt jede positiv (semi)definite Matrix genau eine positiv (semi)definite k-te Wurzel.

Aufgabe II.24 (Reelle Schur-Zerlegung)**.** Zeigen Sie, dass für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix $Q \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ existiert, sodass

$$Q^{\mathrm{t}}AQ = \begin{pmatrix} R_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & R_{kk} \end{pmatrix}$$

mit $R_{ii} \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^{2\times 2}$ für $i = 1, \ldots, k$. Im Fall $R_{ii} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ hat R_{ii} zwei komplex konjugierte (nicht-reelle) Eigenwerte. Insbesondere ist $Q^{\mathrm{t}}AQ$ eine obere Dreiecksmatrix, falls A lauter reelle Eigenwerte besitzt.

Aufgabe II.25. Seien $A_1, \ldots, A_k \in K^{n\times n}$ diagonalisierbar und paarweise vertauschbar. Zeigen Sie, dass $A_1, \ldots, A_k$ simultan diagonalisierbar sind.
Hinweis: Die Induktion nach k ist nicht-trivial! Man kann Aufgabe I.16 benutzen.

[3] Man spricht hier von einer *antilinearen* Abbildung.

Aufgabe II.26. Seien $A_1, \ldots, A_k \in K^{n\times n}$ paarweise vertauschbare trigonalisierbare Matrizen. Zeigen Sie, dass $A_1, \ldots, A_k$ simultan trigonalisierbar sind.

Aufgabe II.27. Sei $\lambda \in K$ und $A := J_n(\lambda)$ ein Jordanblock. Zeigen Sie, dass $C \in K^{n\times n}$ genau dann mit A vertauschbar ist, wenn $c_1, \ldots, c_n \in K$ mit

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & & & 0 \\ c_2 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ c_n & \cdots & c_2 & c_1 \end{pmatrix}$$

existieren.

Aufgabe II.28. Sei V ein K-Vektorraum und $f \in \operatorname{End}(V)$. Sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass μ_f das kleinste gemeinsame Vielfache von $\mu_{b_1}, \ldots, \mu_{b_n}$ ist, d. h. es gibt kein normiertes Polynom kleineren Grades, das durch $\mu_{b_1}, \ldots, \mu_{b_n}$ teilbar ist.

Aufgabe II.29. Sei V ein K-Vektorraum und $f \in \operatorname{End}(V)$. Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f, der mit Vielfachheit k als Nullstelle von μ_f auftritt. Zeigen Sie

$$E_\lambda(f) \subsetneq \operatorname{Ker}\big((f - \lambda \operatorname{id})^2\big) \subsetneq \ldots \subsetneq \operatorname{Ker}\big((f - \lambda \operatorname{id})^k\big) = H_\lambda(f).$$

Hinweis: Man kann die Weierstraß-Normalform benutzen.

Aufgabe II.30. Sei $\alpha \in K[X] \setminus K$ normiert. Zeigen Sie $\chi_{B(\alpha)} = \alpha$ mit der Definition des charakteristischen Polynoms (und nicht über das Minimalpolynom wie in Lemma 15.20).

Aufgabe II.31. Sei $\alpha = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n) \in K[X]$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Sei $V := (\lambda_i^{j-1}) \in K^{n\times n}$ die Vandermonde-Matrix. Zeigen Sie $VB(\alpha)V^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Aufgabe II.32. Sei $\alpha = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ und

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \iddots & 1 & \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \\ a_{n-1} & 1 & & & \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}(n, K)$$

(a) Zeigen Sie $S^{-1}B(\alpha)S = B(\alpha)^{\mathrm{t}}$.

(b) (Taussky) Folgern Sie, dass jede quadratische Matrix das Produkt von zwei symmetrischen Matrizen ist.

Aufgabe II.33. Beweisen Sie Folgerung 14.37 über einen beliebigen Körper K anstelle von $\mathbb{C}$.

Aufgabe II.34.

(a) Seien $A \in K^{n\times n}$ und $B \in K^{m\times m}$, sodass μ_A und μ_B teilerfremd sind. Zeigen Sie

$$\mathrm{C}(\mathrm{diag}(A,B)) = \big\{\mathrm{diag}(C,D) : C \in \mathrm{C}(A),\ D \in \mathrm{C}(B)\big\} \cong \mathrm{C}(A) \times \mathrm{C}(B).$$

Hinweis: Lemma von Bézout.

(b) Sei A halbeinfach mit $\chi_A = \gamma_1^{a_1} \dots \gamma_k^{a_k}$ (Primfaktorzerlegung). Zeigen Sie

$$\dim \mathrm{C}(A) = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \deg(\gamma_i)$$

mit (a). Vergleichen Sie mit Bemerkung 15.33.

Aufgabe II.35. Sei V ein K-Vektorraum und $F \subseteq \mathrm{End}(V)$. Ein Unterraum $U \leq V$ heißt *F-invariant*, falls $f(U) \subseteq U$ für alle $f \in F$ gilt. Sei

$$\mathrm{C}(F) := \bigcap_{f\in F} \mathrm{C}(f)$$

der *Zentralisator* von F (analog für Matrizen).

(a) Angenommen $\{0\}$ und V sind die einzigen F-invarianten Unterräume. Zeigen Sie, dass alle $g \in \mathrm{C}(F) \setminus \{0\}$ invertierbar sind.

(b) Sei $F = \{f_1, f_2\}$ mit

$$f_1 := \mathrm{diag}\big(B(X^2+1), B(X^2+1)\big) \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \qquad f_2 := \begin{pmatrix} 0_2 & B(X^2-1) \\ -B(X^2-1) & 0_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{H} := \mathrm{C}(F) \subseteq \mathbb{R}^{4\times 4}$ ein 4-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, in dem jedes von 0 verschiedene Element invertierbar ist.
Bemerkung: Im Gegensatz zu Satz 15.37 ist die Multiplikation in $\mathbb{H}$ nicht kommutativ. Man nennt $\mathbb{H}$ den Hamiltons *Schiefkörper*.

Aufgabe II.36. Sei $K := \mathbb{F}_2(X)$ und $\gamma := Y^2 + X \in K[Y]$ wie in Beispiel 16.9. Zeigen Sie:

(a) $B(\gamma^2) \in K^{4\times 4}$ besitzt keine Jordan-Chevalley-Zerlegung.

(b) $\mathrm{diag}(B(\gamma), B(\gamma))$ besitzt mehrere Jordan-Chevalley-Zerlegungen.

Aufgabe II.37. Vervollständigen Sie den Beweis aus Beispiel 17.13, dass $\overline{\mathbb{Q}}$ ein Körper ist.

Aufgabe II.38.

(a) Zeigen Sie für alle $T \in K^{2\times 2\times 2}$ (Bemerkung 17.3):

(1) Es existieren $A, B \in K^{2\times 2}$ mit $T = A \otimes e_1 + B \otimes e_2$.

(2) Es existiert $C \in K^{2\times 2} \setminus \{0\}$ mit $\mathrm{tr}(CA) = \mathrm{tr}(CB) = 0$.

(3) Es existieren $N_1, N_2, N_3 \in K^{2\times 2}$ vom Rang 1 mit $A, B \in \langle N_1, N_2, N_3\rangle$.
Hinweis: Man kann $C \in \{E_{11}, 1_2\}$ annehmen.

(4) $\operatorname{rk} T \leq 3$.

(b) Sei $T := 1_2 \otimes e_1 + B(X^2+1) \otimes e_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2\times 2}$. Zeigen Sie $\operatorname{rk} T = 3$ und $\operatorname{rk}_{\mathbb{C}} T = 2$, wobei $\operatorname{rk}_{\mathbb{C}}$ der Rang von $T \in \mathbb{C}^{2\times 2\times 2}$ ist.

Lineare Algebra III

18 Numerische Verfahren

18.1 Effiziente Arithmetik

Bemerkung 18.1. In der linearen Algebra I und II haben wir Sachverhalte hauptsächlich aus theoretischer Sicht untersucht. Zum Beispiel wurden Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms berechnet, obwohl dies für größere Matrizen unpraktikabel ist (vgl. Beispiel 10.25). Wir beschreiben in diesem Kapitel Algorithmen, mit denen man in der Praxis Probleme der linearen Algebra effizient und robust (gegenüber Rundungsfehlern) löst. Eigenwerte werden mehr oder weniger über die Definition berechnet (Satz 18.72).

Beispiel 18.2. Auf Computern ist die Multiplikation zweier Zahlen in der Regel aufwendiger als die Addition (es gibt jedoch Ausnahmen: Die Multiplikation mit 2 entspricht einem Shift der Binärfolge um eine Ziffer nach links.). In den folgenden Laufzeitanalysen werden wir Additionen daher vernachlässigen. Die Multiplikation zweier n-stelliger Dezimalzahlen mit der „Schulmethode“ erfordert n^2 Ziffer-Multiplikationen (das kleine Einmaleins kann persistent auf dem Chip gespeichert werden):

$$\begin{array}{rrcr} & 123 \cdot 567 & = & 69741 \\ \hline & 861 & & \\ + & 738 & & \\ + & 615 & & \\ \hline & 69741 & & \end{array}$$

Das geht schneller.

Satz 18.3 (Karatsuba-Algorithmus)**.** *Seien $x, y \in \mathbb{N}$ Dezimalzahlen mit n Ziffern.*

(1) Teile x und y in zwei Hälften der Länge $m \approx n/2$:

$$x = x_1 10^m + x_0, \qquad y = y_1 10^m + y_0 \qquad (x_0, y_0 < 10^m)$$

(2) Multipliziere rekursiv die m-stelligen Zahlen:

$$z_0 := x_0 y_0, \qquad z_2 := x_1 y_1, \qquad z_1 := (x_1 - x_0)(y_0 - y_1) + z_0 + z_2.$$

(3) Dann gilt $xy = 10^{2m} z_2 + 10^m z_1 + z_0$.

Dieser Algorithmus benötigt ca. $n^{\log_2(3)} \approx n^{1.58} < n^2$ Ziffer-Multiplikationen.

Beweis. Es gilt $z_1 = x_1 y_0 + x_0 y_1 - x_1 y_1 - x_0 y_0 + z_0 + z_2 = x_1 y_0 + x_0 y_1$ und

$$xy = (x_1 10^m + x_0)(y_1 10^m + y_0) = 10^{2m} x_1 y_1 + 10^m (x_1 y_0 + x_0 y_1) + x_0 y_0 = 10^{2m} z_2 + 10^m z_1 + z_0.$$

Für die zweite Behauptung argumentieren wir durch Induktion nach n: Für $n = 1$ braucht man $1 = 1^{\log_2(3)}$ Ziffer-Multiplikation. Die Berechnung von z_0, z_1, z_2 für $n \geq 2$ erfordert 3 Multiplikationen m-stelliger Zahlen. Induktiv erhält man

$$3m^{\log_2(3)} \approx 3(n/2)^{\log_2(3)} = n^{\log_2(3)}$$

Ziffer-Multiplikationen. □

Beispiel 18.4. Für $x = 87 = 80 + 7$ und $y = 91 = 90 + 1$ erhält man

$$z_0 = 7 \cdot 1 = 7, \qquad z_2 = 8 \cdot 9 = 72, \qquad z_1 = (8-7)(1-9) + z_0 + z_2 = -8 + 7 + 72 = 71,$$
$$xy = 7200 + 710 + 7 = 7917.$$

Bemerkung 18.5. Vor der Einführung elektronischer Taschenrechner hat man die Multiplikation von Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mittels *Logarithmentafeln* auf die einfachere Addition $\log(x) + \log(y)$ zurückgeführt. Grundlage dafür ist die Funktionalgleichung $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$. Eine ähnliche Reduktion mit Hilfe der FOURIER-Transformation ist heute noch relevant.

Definition 18.6. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\zeta_n := \zeta := \cos(2\pi/n) + \mathrm{i}\sin(2\pi/n)$$

eine n-te Einheitswurzel (Beispiel 11.28). Die symmetrische Vandermonde-Matrix

$$W_n := W := (\zeta^{ij})_{i,j=0}^{n-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

nennt man die n-te *Fourier-Matrix*. Die Abbildung $\mathcal{F}_n \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $x \mapsto xW =: \hat{x}$ heißt *diskrete Fourier-Transformation*.

Beispiel 18.7. Nach Beispiel 11.28 gilt

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Lemma 18.8. *Für $x \in \mathbb{C}^n$ gilt $\mathcal{F}_n^{-1}(x) = \frac{1}{n}\overline{\mathcal{F}_n(\overline{x})}$.*

Beweis. Wegen $\zeta\overline{\zeta} = |\zeta|^2 = 1$ ist $\zeta^{-1} = \overline{\zeta}$. Für $1 \leq i, j \leq n$ ist auch $\sigma := \zeta^{i-j}$ eine n-te Einheitswurzel. Im Fall $i = j$ ist $\sigma = 1$ und anderenfalls $\sum_{k=0}^{n-1} \sigma^k = \frac{\sigma^n - 1}{\sigma - 1} = 0$ nach der Formel für die geometrische Reihe. Daher gilt

$$(W_n\overline{W_n})_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{ik}\zeta^{-kj} = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma^k = \begin{cases} n & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Dies zeigt $W_n^{-1} = \frac{1}{n}\overline{W_n}$ und $n\mathcal{F}_n^{-1}(x) = x\overline{W_n} = \overline{\mathcal{F}_n(\overline{x})}$. □

Satz 18.9 (Faltungssatz)**.** *Für $\alpha = \sum a_k X^{k-1} \in \mathbb{C}[X]$ sei $[\alpha] := (a_1, \ldots, a_n)$. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[X]$ mit $\deg(\alpha) + \deg(\beta) < n$ gilt*

$$\mathcal{F}_n([\alpha\beta]) = (\hat{a}_1\hat{b}_1, \ldots, \hat{a}_n\hat{b}_n).$$

Beweis. Wegen

$$\alpha\beta = \sum_{k=2}^{n+1}\Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j\Big)X^{k-2} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i+j=k+1} a_i b_j\Big)X^{k-1}$$

gilt $[\alpha\beta]_k = \sum_{i+j=k+1} a_i b_j$ für $1 \le k \le n$. Es folgt

$$\hat{a}_k\hat{b}_k = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \zeta^{(k-1)(i+j-2)} = \sum_{l=2}^{2n}\Big(\zeta^{(k-1)(l-2)}\sum_{i+j=l} a_i b_j\Big) = \sum_{l=1}^{n}[\alpha\beta]_l\zeta^{(k-1)(l-1)} = \mathcal{F}_n([\alpha\beta])_k. \qquad \square$$

Bemerkung 18.10.

(a) Um zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ (mit $ab < 10^n$) zu multiplizieren, fasst man sie als Polynome in $X = 10$ auf $a = \sum a_k 10^{k-1}$, $b = \sum b_k 10^{k-1}$ und wendet den Faltungssatz an:

$$ab = \mathcal{F}_n^{-1}(\hat{a}_1\hat{b}_1, \dots, \hat{a}_n\hat{b}_n)\cdot(1, 10, \dots, 10^{n-1})^{\mathrm{t}}.$$

Man beachte, dass Überträge wie bei der Schulmultiplikation hier nicht aufgelöst werden. Überträge lassen sich generell vermeiden, indem man a und b *binär*, d. h. als Polynom in $X = 2$ darstellt. Diese Art der Berechnung liefert allerdings noch keine Beschleunigung.

(b) Sei $n = 2m$ gerade. Mit den Bezeichnungen $y_k := x_{2k-1}$ und $z_k := x_{2k}$ gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n(x)_i &= \sum_{k=1}^{n} x_k\zeta_n^{(i-1)(k-1)} = \sum_{k=1}^{m} y_k\zeta_m^{(i-1)(k-1)} + \zeta_n^{i-1}\sum_{k=1}^{m} z_k\zeta_m^{(i-1)(k-1)} \\ &= \mathcal{F}_m(y)_i + \zeta_n^{i-1}\mathcal{F}_m(z)_i\end{aligned} \tag{18.1}$$

für $i = 1, \dots, n$, wobei $\mathcal{F}_m(y)_i = \mathcal{F}_m(y)_{i-m}$ für $i > m$. Mit Lemma 18.8 ist analog

$$\mathcal{F}_n^{-1}(x)_i = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{F}_m^{-1}(y)_i + \zeta_n^{1-i}\mathcal{F}_m^{-1}(z)_i\Big).$$

Bei der *schnellen* Fourier-Transformation (FFT) geht man davon aus, dass n eine 2-Potenz ist (was durch Anfügen von Nullen immer möglich ist). Wie beim Karatsuba-Algorithmus kann man $\mathcal{F}_n$ durch wiederholte Anwendung von (18.1) bis auf $\mathcal{F}_1(x) = x$ reduzieren. Für ein festes n können die n-ten Einheitswurzeln einmalig berechnet und gespeichert werden. Die Addition solcher Zahlen kann günstig mit beschränkter Genauigkeit durchgeführt werden.

(c) Der weitverbreitete Schönhage-Strassen-Algorithmus führt die Multiplikation n-stelliger Zahlen mittels FFT in einer asymptotischen Laufzeit von $n\log(n)\log\log(n)$ durch. 2019 konnte Harvey-van der Hoeven die Laufzeit auf $n\log(n)$ verbessern, wobei es sich jedoch um einen *galaktischen* Algorithmus handelt, d. h. die Zeitersparnis wird erst für extrem große Zahlen jenseits jeglicher praktischer Bedeutung relevant. Man vermutet, dass $n\log(n)$ asymptotisch die bestmögliche Schranke ist.

(d) Die *kontinuierliche* Fourier-Transformation weist einer integrierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das Integral

$$\mathcal{F}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{2\pi\mathrm{i}[x,y]}\mathrm{d}x$$

zu.

Beispiel 18.11. Wir multiplizieren $342 \cdot 87$ mit der schnellen Fourier-Transformation. Nach (18.1) gilt

$$\mathcal{F}_4(2,4,3,0)^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_2(2,3)_1 + \mathcal{F}_2(4,0)_1 \\ \mathcal{F}_2(2,3)_2 + \mathrm{i}\mathcal{F}_2(4,0)_2 \\ \mathcal{F}_2(2,3)_1 - \mathcal{F}_2(4,0)_1 \\ \mathcal{F}_2(2,3)_2 - \mathrm{i}\mathcal{F}_2(4,0)_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+3)+4 \\ (2-3)+4\mathrm{i} \\ (2+3)-4 \\ (2-4)-4\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1+4\mathrm{i} \\ 1 \\ -1-4\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_4(7,8,0,0) = (15, 7+8\mathrm{i}, -1, 7-8\mathrm{i}),$$

$$\mathcal{F}_4^{-1}(135, -39+20\mathrm{i}, -1, -39-20\mathrm{i})^{\mathrm{t}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 135-1-2\cdot 39 \\ 135+1-\mathrm{i}40\mathrm{i} \\ 135-1+2\cdot 39 \\ 135+1+\mathrm{i}40\mathrm{i} \end{pmatrix} = \big(14, 44, 53, 24\big),$$

$$342 \cdot 87 = \mathcal{F}_4^{-1}(\ldots)(1,10,100,1000)^{\mathrm{t}} = 14 + 440 + 5.300 + 24.000 = 29.754.$$

Bemerkung 18.12. Die direkte Multiplikation zweier $n \times n$-Matrizen A, B erfordert n^3 Zahl-Multiplikationen $a_{ij}b_{jk}$ mit $1 \le i, j, k \le n$, die man wiederum mit einem der obigen Algorithmen durchführen kann. Auch das geht besser.

Satz 18.13 (STRASSEN-Algorithmus)**.** *Seien $A, B \in K^{n\times n}$.*

(1) Durch Anfügen einer Nullzeile und -spalte kann man $n = 2m$ annehmen.

(2) Teile A und B in $m \times m$-Blöcke:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

(3) Berechne rekursiv:

$$\begin{aligned} C_1 &:= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}), & C_2 &:= (A_{21} + A_{22})B_{11}, \\ C_3 &:= A_{11}(B_{12} - B_{22}), & C_4 &:= A_{22}(B_{21} - B_{11}), \\ C_5 &:= (A_{11} + A_{12})B_{22}, & C_6 &:= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}), \\ C_7 &:= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}). \end{aligned}$$

(4) Dann gilt

$$AB = \begin{pmatrix} C_1 + C_4 - C_5 + C_7 & C_3 + C_5 \\ C_2 + C_4 & C_1 - C_2 + C_3 + C_6 \end{pmatrix}.$$

Dieser Algorithmus benötigt ca. $n^{\log_2(7)} \approx n^{2.81}$ Zahl-Multiplikationen.

Beweis. Die Formel für AB folgt aus

$$\begin{aligned} C_1 + C_4 - C_5 + C_7 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) + A_{22}(B_{21} - B_{11}) - (A_{11} + A_{12})B_{22} \\ &\quad + (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}) = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}, \\ C_3 + C_5 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}) + (A_{11} + A_{12})B_{22} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}, \\ C_2 + C_4 &= (A_{21} + A_{22})B_{11} + A_{22}(B_{21} - B_{11}) = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}, \\ C_1 - C_2 + C_3 + C_6 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) - (A_{21} + A_{22})B_{11} + A_{11}(B_{12} - B_{22}) \\ &\quad + (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}) = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}. \end{aligned}$$

Die Berechnung jedes C_i erfordert induktiv ca. $m^{\log_2(7)} = \frac{1}{7}n^{\log_2(7)}$ Zahl-Multiplikationen. Daher benötigt man für AB ca. $n^{\log_2(7)}$ Zahl-Multiplikationen. □

Bemerkung 18.14.

(a) Auch der Strassen-Algorithmus wurde weiter verbessert. Mit dem *Large-Language-Model* AlphaEvolve wurde 2026 ein Algorithmus mit $n^{2.371177}$ Zahl-Multiplikationen entdeckt.[1] Die asymptotisch bestmögliche Komplexität ist ein offenes Problem der Informatik.

(b) Matrixpotenzen lassen sich durch iteriertes Quadrieren effizient berechnen: $A^{11} = A(A^5)^2 = A(A(A^2)^2)^2$ benötigt nur fünf Multiplikationen anstatt zehn (Aufgabe III.1).

(c) Die Multiplikation beliebiger (nicht unbedingt quadratischer) Matrizen $A \in K^{n\times m}$ und $B \in K^{m\times k}$ erfordert nmk Zahl-Multiplikationen. Werden mehr als zwei solche Matrizen multipliziert, so hat die Klammersetzung einen erheblichen Einfluss auf die Anzahl der Zahl-Multiplikationen. Das zeigt sich besonders deutlich im Extremfall $n = k > 1 = m = l$:

$$(AB)C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_{11} & \cdots & a_{n1}b_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} \qquad (2n^2 \text{ Multiplikationen}),$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} (b_{11}c_{11} + \ldots + b_{1n}c_{11}) \qquad (2n \text{ Multiplikationen}).$$

Satz 18.15. *Seien $A \in K^{n\times m}$, $B \in K^{m\times k}$ und $C \in K^{k\times l}$. Die Berechnung von $A(BC)$ benötigt genau dann weniger Zahl-Multiplikationen als $(AB)C$, wenn $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{m} + \frac{1}{l}$.*

Beweis. Die Berechnung von $A(BC)$ bzw. $(AB)C$ erfordert $mkl + nml = ml(n+k)$ bzw. $nmk + nkl = nk(m+l)$ Zahl-Multiplikationen. Es gilt

$$ml(n+k) < nk(m+l) \iff \frac{n+k}{nk} < \frac{m+l}{ml} \iff \frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{m} + \frac{1}{l}. \qquad \square$$

Bemerkung 18.16. Bei der konkreten Implementierung ist es empfehlenswert, bewährte Bibliotheken wie BLAS, LAPACK, Armadillo, NumPy und SciPy, Programmiersprachen wie Julia oder Programme wie MATLAB, Scilab und Octave zu benutzen.

18.2 Die Konditionszahl

Beispiel 18.17. Auch wenn lineare Abbildungen stetig im Sinn der Analysis sind, so können kleine Änderungen der Argumente dennoch große Auswirkungen auf die Werte haben (in der ϵ-δ-Definition der Stetigkeit muss $\delta \ll \epsilon$ gewählt werden):

$$Ax = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 17 \\ 15 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 17 \\ 15.\mathbf{1} \end{pmatrix} \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

[1] siehe [Dupont et al., *Improving the matrix multiplication exponent with modern optimization and AlphaEvolve*, arXiv:2608.16884]

Definition 18.18. Für $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ nennt man

$$\kappa(A) := \frac{\max\{|Ax| : x \in \mathbb{C}^{m\times 1}, |x| = 1\}}{\min\{|Ax| : x \in \mathbb{C}^{m\times 1}, |x| = 1\}} \geq 1$$

die *Konditionszahl* von A, wobei $|.|$ die Norm des Standardskalarprodukts (Beispiel 13.3) bezeichnet. Ist $\kappa(A)$ „klein“ (bzw. „groß“), so ist A *gut* (bzw. *schlecht*) *konditioniert*.

Bemerkung 18.19.

(a) Wir wollen messen, wie sich kleine Änderungen an einem Vektor b auf die Lösung des Systems $Ax = b$ auswirken. Sei dafür $\tilde{b} \approx b$ und $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Der relative Fehler von x ist

$$\frac{|x-\tilde{x}|}{|x|} = \frac{|x-\tilde{x}|}{|A(x-\tilde{x})|}\frac{|Ax|}{|x|}\frac{|b-\tilde{b}|}{|b|} \leq \frac{\max\{|Ax|/|x| : 0 \neq x \in \mathbb{C}^{m\times 1}\}}{\min\{|Ay|/|y| : 0 \neq y \in \mathbb{C}^{m\times 1}\}}\frac{|b-\tilde{b}|}{|b|} = \kappa(A)\frac{|b-\tilde{b}|}{|b|}.$$

Die Konditionszahl ist also der maximale Faktor, mit dem sich der relative Fehler von b nach x verstärken kann.

(b) In der Analysis zeigt man, dass die Abbildung $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$, $x \mapsto |Ax|$ stetig ist. Da die Menge $\{x \in \mathbb{C}^m : |x| = 1\}$ kompakt ist, wird das Maximum/Minimum über $\{|Ax| : |x| = 1\}$ tatsächlich angenommen (d. h. man braucht kein Supremum/Infimum). Für $\mathbb{R}$ anstelle von $\mathbb{C}$ beschreibt die Konditionszahl wie sehr eine Matrix die n-dimensionale Einheitskugel deformiert.

Beispiel 18.20.

(a) Hat A nicht vollen Rang, so existiert ein normiertes $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ mit $Ax = 0$. In diesem Fall interpretieren wir $\kappa(A) = \infty$, d. h. A ist besonders schlecht konditioniert.

(b) Für unitäre Matrizen $S \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ gilt bekanntlich $|Sx| = |x|$ für alle $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. Für beliebige $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ folgt $\kappa(SA) = \kappa(A)$ und analog $\kappa(AS) = \kappa(A)$, falls $S \in \mathrm{U}(m, \mathbb{C})$. Insbesondere ist $\kappa(S) = \kappa(1_n) = 1$, d. h. unitäre Matrizen sind gut konditioniert.

(c) Für beliebige Matrizen $A, S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt im Allgemeinen $\kappa(SA) \neq \kappa(A)$. Auf diese Weise kann man die Konditionszahl der Koeffizientenmatrix eines Gleichungssystems $Ax = b$ verbessern. Die notwendige Ersetzung von b durch Sb kann jedoch aus dem gleichen Grund fehleranfällig sein.

(d) Ein klassisches Beispiel einer schlecht konditionierten Matrix ist die symmetrische *Hilbert-Matrix*

$$H_n := \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/n & 1/n+1 & \cdots & 1/2n-1 \end{pmatrix}.$$

Man kann zeigen, dass $\kappa(H_n)$ exponentiell in n wächst. Zum Beispiel ist $\kappa(H_4) \approx 15.514$.

(e) Für normale Matrizen A kann man mit dem Spektralsatz und (b) die Berechnung von $\kappa(A)$ auf eine Diagonalmatrix zurückführen. Der folgende Satz erlaubt dies für beliebige (insbes. nicht-quadratische) Matrizen.

Satz 18.21 (Singulärwertzerlegung)**.** *Für $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ existieren $U \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ und $V \in \mathrm{U}(m, \mathbb{C})$, sodass UAV eine reelle Diagonalmatrix[2] mit nicht-negativen Einträgen ist. Die positiven Einträge (auf der Hauptdiagonale) nennt man* Singulärwerte *von A. Sie sind bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.*

[2] nicht unbedingt quadratisch

Beweis. Existenz: Die positiv semidefinite Matrix $B := A^*A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ besitzt nach Aufgabe II.23 lauter nicht-negative Eigenwerte

$$\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k > \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_m = 0,$$

wobei $k = \operatorname{rk} B = \operatorname{rk} A \leq \min\{n, m\}$ nach Aufgabe II.20. Nach dem Spektralsatz existiert ein $V \in \mathrm{U}(m, \mathbb{C})$ mit $V^*BV = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Wir schreiben $V = (V_1, V_2)$ mit $V_1 \in \mathbb{C}^{m\times k}$. Aus $(AV_2)^*(AV_2) = V_2^*BV_2 = 0$ folgt $AV_2 = 0$. Wir setzen

$$U_1 := AV_1 \operatorname{diag}\big(\lambda_1^{-1/2}, \ldots, \lambda_k^{-1/2}\big) \in \mathbb{C}^{n\times k}.$$

Wegen $U_1^*U_1 = 1_k$ kann man U_1 zu $U = (U_1, U_2) \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ mit Gram-Schmidt ergänzen. Nun ist

$$\begin{aligned} U_2^*AV_1 &= U_2^*U_1 \operatorname{diag}\big(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_k}\big) = 0, \\ U^*AV &= \begin{pmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^*AV_1 & U_1^*AV_2 \\ U_2^*AV_1 & U_2^*AV_2 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}\sqrt{\lambda_i}), \end{aligned}$$

wobei $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_k}$ die Singulärwerte von A sind.

Eindeutigkeit: Sei SAT mit $S \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ und $T \in \mathrm{U}(m, \mathbb{C})$ ebenfalls eine reelle Diagonalmatrix mit nicht-negativen Einträgen. Dabei seien $\mu_1, \ldots, \mu_l$ die positiven Einträge. Dann sind $\mu_1^2, \ldots, \mu_l^2$ die positiven Eigenwerte von

$$(SAT)^2 = (SAT)^*(SAT) = T^*BT.$$

Bei geeigneter Nummerierung gilt also $k = l$ und $\mu_1^2 = \lambda_1, \ldots, \mu_k^2 = \lambda_k$. Aus $\mu_i > 0$ folgt $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ für $i = 1, \ldots, k$. Also sind die Singulärwerte bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt. □

Bemerkung 18.22. Der Beweis zeigt: Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die von 0 verschiedenen Eigenwerte der positiv semidefiniten Matrix A^*A, so sind $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_k}$ die Singulärwerte von A.

Folgerung 18.23. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ mit vollem Rang und Singulärwerten $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_k$. Dann gilt $\kappa(A) = \sigma_1/\sigma_k$.*

Beweis. Sei $D := (\delta_{ij}\sigma_i) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ die Matrix aus der Singulärwertzerlegung von A. Nach Beispiel 18.20 gilt $\kappa(A) = \kappa(D) = \kappa(\operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k))$. Für $x \in \mathbb{C}^k$ mit $|x| = 1$ gilt

$$|(\sigma_1x_1, \ldots, \sigma_kx_k)|^2 = \sigma_1^2|x_1|^2 + \ldots + \sigma_k^2|x_k|^2 \leq \sigma_1^2|x|^2 = \sigma_1^2$$

mit Gleichheit für $x = e_1$. Dies zeigt $\kappa(\operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)) = \sigma_1/\sigma_k$. □

Folgerung 18.24. *Für alle $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ gilt $\kappa(A) = \kappa(A^*)$.*

Beweis. Nach Lemma 10.38 haben A^*A und AA^* die gleichen von 0 verschiedenen Eigenwerte. Daher folgt die Behauptung aus Bemerkung 18.22. □

Satz 18.25. *Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal, so sind die Singulärwerte von A die Beträge der von 0 verschiedenen Eigenwerte.*

Beweis. Nach dem Spektralsatz kann man $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ annehmen. Sei

$$\tilde{\lambda}_i := \begin{cases} \overline{\lambda_i}/|\lambda_i| & \text{falls } \lambda_i \neq 0, \\ 1 & \text{falls } \lambda_i = 0. \end{cases}$$

Dann ist $U := \operatorname{diag}(\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_n) \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ und $UA = \operatorname{diag}(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|)$. Aus der Eindeutigkeit der Singulärwerte folgt die Behauptung. □

Beispiel 18.26. Für die Matrix aus Beispiel 18.17 gilt $\kappa(A) = \frac{8+\sqrt{65}}{8-\sqrt{65}} \approx 258$.

Satz 18.27 (Moore-Penrose). *Für $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ existiert genau ein $A^+ \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) $AA^+A = A$ *und* $A^+AA^+ = A^+$,

(b) $(AA^+)^* = AA^+$ *und* $(A^+A)^* = A^+A$.

Man nennt A^+ Pseudoinverse[3] *von A.*

Beweis. Sei $P := UAV = (\delta_{ij}\sigma_i)$ eine Singulärwertzerlegung von A mit Singulärwerten $\sigma_1, \ldots, \sigma_k > 0$. Für $i = 1, \ldots, m$ definieren wir

$$\tilde{\sigma}_i := \begin{cases} \sigma_i^{-1} & \text{falls } i \leq k, \\ 0 & \text{falls } i > k \end{cases}$$

und $Q := (\delta_{ij}\tilde{\sigma}_i) \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Setze $A^+ := VQU \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Die vier angegebenen Eigenschaften reduzieren sich auf $PQP = P$, $QPQ = Q$, $(PQ)^* = PQ$ und $(QP)^* = QP$. Dies gilt offenbar. Seien nun B und C Pseudoinverse von A. Dann gilt

$$B = BAB = B(ACA)B = (BA)^*(CA)^*B = (ABA)^*C^*B = (CA)^*B = CAB = \ldots = CAC = C. \quad \square$$

Beispiel 18.28.

(a) Trivialerweise ist $0^+_{n\times m} = 0_{m\times n}$.

(b) Ist A invertierbar, so erfüllt A^{-1} die Bedingungen der Pseudoinversen und es folgt $A^+ = A^{-1}$.

(c) Für $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ und $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ ist $(\lambda A)^+ = \lambda^{-1}A^+$.

(d) Der Beweis von Satz 18.27 führt die Berechnung von A^+ auf die Singulärwertzerlegung und damit auf den Spektralsatz zurück. Für $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ liefert der Hauptachsensatz $S := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ mit $S^{-1} = S^{\mathrm{t}} = S$ und $SAS = \operatorname{diag}(2, 0)$. Also ist $A^+ = S \operatorname{diag}(1/2, 0)S = \frac{1}{4}A$.

(e) Offenbar ist $(A^{\mathrm{t}})^+ = (A^+)^{\mathrm{t}}$ und $\overline{A}^+ = \overline{A^+}$. Insbesondere ist A^+ symmetrisch (bzw. reell, hermitesch), falls A symmetrisch (bzw. reell, hermitesch) ist.

(f) Hat $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ vollen Rang, so ist A^*A (falls $n \geq m$) oder AA^* (falls $n \leq m$) invertierbar. Ggf. gilt $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$ bzw. $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$. Für $n \geq m$ kann man auf diese Weise eine (Näherungs)lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ berechnen: $x \approx A^+b$. Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad A^+ = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} A^* = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x \approx \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Mehr dazu in Satz 18.42.

[3] oder *Moore-Penrose-Inverse*

18.3 Stabile Varianten des Gauß-Algorithmus

Bemerkung 18.29. Auf Computern lassen sich reelle Zahlen nur näherungsweise durch *Gleitkommazahlen* darstellen. Selbst endliche Dezimalbrüche kann man nicht exakt speichern, wenn die interne Binärdarstellung unendlich ist:

$$0.1 = 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-8} + 2^{-9} + \ldots \approx 0.0996.$$

Der IEEE-Standard 754 definiert den 32-bit Datentyp `float` (single precision) durch folgende Aufteilung: 1 Bit für das Vorzeichen, 23 Bits für die *Mantisse* (Binärentwicklung) und 8 Bits für den Exponenten. Damit lassen sich Zahlen der Form

$$\pm\Big(2^e + \sum_{i=1}^{23} a_i 2^{e-i}\Big) \qquad (a_i \in \{0,1\},\ -126 \le e \le 127)$$

repräsentieren ($e = -127$ und $e = 128$ sind reserviert für ∞ und `NaN`). Im Folgenden betrachten wir ein einfacheres Modell mit nur drei Dezimalziffern, also Zahlen der Form

$$\pm \sum_{i=0}^{2} a_i 10^{e-i} \qquad (0 \le a_i \le 9)$$

mit $a_0 \neq 0$ (da Über- und Unterläufe selten vorkommen, beschränken wir den Exponenten e nicht). Beliebige reelle Zahlen werden wie folgt konvertiert:

$$1001 \rightsquigarrow 1.00\text{e}4, \qquad 0.00123 \rightsquigarrow 1.23\text{e}{-3}.$$

Subtraktion fast gleichgroßer Zahlen führt zum Verlust von Genauigkeit (*Auslöschung*):[4]

$$1.23\text{e}0 - 1.22\text{e}0 = 1.??\text{e}{-3}.$$

Die mit einem Fragezeichen gekennzeichneten Ziffern enthalten keine sinnvolle Information. Die Addition von Gleitkommazahlen ist außerdem nicht assoziativ:

$$(1.00\text{e}{-3} + 1.00\text{e}1) - 1.00\text{e}1 = 0.00\text{e}0 \neq 1.00\text{e}{-3} = 1.00\text{e}{-3} + (1.00\text{e}1 - 1.00\text{e}1).$$

Ebenfalls problematisch ist die Multiplikation mit großen Zahlen, weil dadurch vorhandene Rundungsfehler verstärkt werden.

Beispiel 18.30. Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 10^4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt die eindeutige Lösung $x = (-10^4, 10^4 + 1)$. Der Gauß-Algorithmus mit Gleitkommazahlen liefert jedoch

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1\text{e}{-4} & 1 & 1\text{e}4 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1\text{e}4 & 1\text{e}8 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1\text{e}4 & 1\text{e}8 \\ 0 & -1\text{e}4 & -1\text{e}8 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad x = (0, 1\text{e}4).$$

Der Gauß-Algorithmus in Reinform ist also numerisch *instabil*.

[4] siehe Aufgabe II.11

Bemerkung 18.31. Ein Ansatz, die Stabilität eines Gleichungssystems zu verbessern, ist, die Singulärwertzerlegung der Koeffizientenmatrix A durchzuführen. Dabei wird A mit unitären Matrizen U und V von links/rechts multipliziert. Als erste Näherung kann man Permutationsmatrizen für U und V wählen. Dies realisiert Permutationen der Zeilen und Spalten von A.

Satz 18.32 (Pivotisierung)**.** *Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ und $b \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. Die folgende Modifikation des Gauß-Algorithmus auf $(A|b)$ vermindert Rundungsfehler:*

(1) Setze $z := 1$ (Zeilenindex).

(2) Für $s = 1, \ldots, m$ (Spaltenindex):

- *Bestimme ein betragsmäßig größtes Element a_{ij}* (Pivot) *mit $i \geq z$ und $j \geq s$.*
- *Ist $a_{ij} = 0$, so sind wir fertig. Anderenfalls tausche i-te mit z-ter Zeile und j-te mit s-ter Spalte. Tausche x_j mit x_s im Lösungsvektor.*
- *Dividiere z-te Zeile durch a_{zs}.*
- *Eliminiere wie gewohnt $a_{ws} = 0$ für $w \neq z$.*
- *Erhöhe z um 1.*

Beweis. Wendet man das angegebene Verfahren wie in Satz 6.15 an, so erhält man die besonders einfache erweiterte Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & s_{11} & \cdots & s_{1,m-k} & c_1 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & s_{k1} & \cdots & s_{k,m-k} & c_k \\ & & & -1 & & & 0 \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit der Lösungsmenge

$$L = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} s_{11} \\ \vdots \\ s_{k1} \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} s_{1,m-k} \\ \vdots \\ s_{k,m-k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Die Lösung des ursprünglichen Systems erhält man durch Permutation der Koordinaten gemäß der gewählten Vertauschungen $j \leftrightarrow s$. Die Wahl des Pivots garantiert, dass während des Algorithmus nicht mit großen Zahlen multipliziert wird, die eventuelle Rundungsfehler verstärken würden. □

Beispiel 18.33. In Beispiel 18.30 vertauschen wir die Spalten:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1\text{e}{-4} & 1\text{e}4 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1\text{e}{-4} & 1\text{e}4 \\ 0 & 1 & -1\text{e}4 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y = (1\text{e}4, -1\text{e}4), \\ x = (-1\text{e}4, 1\text{e}4) \approx (-10^4, 10^4 + 1). \end{cases}$$

Bemerkung 18.34. Für beliebige Körper besagt der folgende Satz, dass man die Pivotisierung theoretisch nur einmal am Anfang vornehmen muss.

Satz 18.35 (LR-Zerlegung[5])**.** *Für jede Matrix $A \in K^{n\times n}$ existieren eine Permutationsmatrix P, eine untere Dreiecksmatrix L mit Einsen auf der Hauptdiagonale und eine obere Dreiecksmatrix R mit $A = PLR$.*

Beweis. Induktion nach n: Für $n = 1$ kann man $P = L = 1_1$ und $R = A$ wählen. Sei $n \geq 2$. Ist die erste Spalte von A der Nullvektor, so setzen wir $P_1 = L_1 = 1_n$. Anderenfalls existiert eine Permutationsmatrix P_1, die die erste Zeile von A mit einer anderen Zeile tauscht, sodass anschließend $a_{11} \neq 0$ gilt. Die Elimination von a_{i1} für $i > 1$ erreicht man durch Multiplikation mit Elementarmatrizen von links. Das Produkt dieser Elementarmatrizen hat die Form $L_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ * & 1_{n-1} \end{smallmatrix}\right)$. Nun gilt

$$L_1 P_1 A = \begin{pmatrix} a_{11} & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

mit $A_2 \in K^{(n-1)\times(n-1)}$. Nach Induktion existieren P_2, L_2 und R_2 mit $A_2 = P_2 L_2 R_2$. Sei $\hat{P}_2 := \operatorname{diag}(1, P_2)$ und $\hat{L}_2 := \operatorname{diag}(1, L_2)$. Wir können R_2 ebenfalls zu einer oberen Dreiecksmatrix $\hat{R}_2$ erweitern, sodass $L_1 P_1 A = \hat{P}_2 \hat{L}_2 \hat{R}_2$ gilt. Die Inverse L_1^{-1} hat die gleiche Gestalt wie L_1 (lediglich die Vorzeichen der Einträge unterhalb der Hauptdiagonale sind invertiert). Da $\hat{P}_2$ die erste Zeile nicht vertauscht, gilt $L_1^{-1}\hat{P}_2 = \hat{P}_2 L_1'$ für eine untere Dreiecksmatrix L_1' mit Einsen auf der Hauptdiagonale. Insgesamt gilt

$$A = P_1^{-1} L_1^{-1} \hat{P}_2 \hat{L}_2 \hat{R}_2 = P_1 \hat{P}_2 L_1' \hat{L}_2 \hat{R}_2 = PLR. \qquad \square$$

Beispiel 18.36.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = P_{(1,2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = P_{(1,2)} \begin{pmatrix} 1 & . & . \\ . & 1 & . \\ 1 & . & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= P_{(1,2)} L_1 P_{(2,3)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P_{(1,2)} P_{(2,3)} \begin{pmatrix} 1 & . & . \\ 1 & 1 & . \\ . & . & 1 \end{pmatrix} R = P_{(1,2,3)} LR$$

Bemerkung 18.37.

(a) Da es in der Regel viele Möglichkeiten gibt, im Gauß-Algorithmus zu pivotieren, ist die LR-Zerlegung nicht eindeutig. Kann man jedoch auf P verzichten, so wird die Zerlegung eindeutig (Aufgabe III.9).

(b) Sei $A \in \mathrm{GL}(n, K)$. Der folgende Algorithmus liefert eine Variante der LR-Zerlegung, bei der P zwischen L und R steht: Wähle das kleinste j_1 mit $a_{1,j_1} \neq 0$ (existiert, da A invertierbar ist). Durch Linksmultiplikation mit einer unteren Dreiecksmatrix L_1 mit Einsen auf der Hauptdiagonale erreicht man $a_{i,j_1} = 0$ für $i \geq 2$. Analog erhält man $a_{1,j_1} = 1$ und $a_{1j} = 0$ für $j > j_1$ durch Rechtsmultiplikation mit einer oberen Dreiecksmatrix. Nun wählt man das minimale j_2 mit $a_{2,j_2} \neq 0$ und verfährt wie zuvor. Am Ende erhält man eine untere Dreiecksmatrix $L' := L_n \dots L_1$ mit Einsen auf der Hauptdiagonale und eine obere Dreiecksmatrix $R' := R_1 \dots R_n$, sodass $L'AR' = P_\sigma$ die Permutationsmatrix mit $\sigma^{-1}(k) = j_k$ für $k = 1, \dots, n$ ist. Also hat man eine Zerlegung der Form $A = LPR$ (vgl. Aufgabe III.10).

[5] LR steht für links-rechts. Im Englischen benutzt man LU für lower-upper.

(c) Der nächste Satz liefert eine weitere Annäherung an die Singulärwertzerlegung.

Satz 18.38 (QR-Zerlegung)**.** *Für jedes $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ existieren $Q \in \mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{C}^{n\times m}$ mit reellen, nicht-negativen Diagonaleinträgen und $A = QR$.*

(a) Hat A vollen Rang, so ist R eindeutig bestimmt.

(b) Ist A reell, so kann man $Q \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ und $R \in \mathbb{R}^{n\times m}$ wählen.

Beweis. Seien $a_1,\dots,a_m$ die Spalten von A und $s := \operatorname{rk} A$. Wir wählen von links nach rechts die ersten s linear unabhängigen Spalten $a_{i_1},\dots,a_{i_s}$ von A. Jede weitere Spalte a_j lässt sich dann als Linearkombination der a_{i_k} mit $i_k < j$ darstellen. Wir ergänzen $a_{i_1},\dots,a_{i_s}$ mit reellen Vektoren zu einer Basis von $\mathbb{C}^n$. Das Gram-Schmidt-Verfahren (Bemerkung 13.6) überführt diese Basis in eine Orthonormalbasis $q_1,\dots,q_n$ mit $q_1 = \frac{1}{|a_{i_1}|}a_{i_1}$, $q_2 = \lambda a_{i_1} + \mu a_{i_2}$ mit $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ usw. Durch Umstellen erhält man

$$a_{i_k} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j q_j \qquad (\lambda_k \in \mathbb{R}_{>0}).$$

Indem man die übrigen Spalten von A ebenfalls bzgl. $q_1,\dots,q_n$ darstellt, erhält man eine obere Dreiecksmatrix $R = (r_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times m}$ mit $a_k = \sum_{i=1}^{k} r_{ik}q_i$ für $k = 1,\dots,m$ und $r_{ii} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ für $i = 1,\dots,n$. Für $Q = (q_1,\dots,q_n) \in \mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ gilt nun $A = QR$.

(a) O. B. d. A. sei A selbst eine obere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonaleinträgen. Für die erste Spalte gilt $a_{11}e_1 = r_{11}q_1$. Aus $a_{11}, r_{11} > 0$ und $|q_1| = 1$ folgt $q_1 = e_1$ und $a_{11} = r_{11}$. Induktiv sei bereits $r_{ij} = a_{ij}$ und $q_j = e_j$ für $i = 1,\dots,n$ und $j = 1,\dots,k-1$ bewiesen. Für die k-te Spalte von A gilt dann

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ik}e_i = r_{kk}q_k + \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik}e_i.$$

Dies zeigt $q_{ik} = 0$ für $i > k$. Wegen $[e_i, q_k] = [q_i, q_k] = 0$ für $i < k$ folgt $q_k = e_k$ und $r_{ik} = a_{ik}$ für $i = 1,\dots,n$. Induktiv erhält man $A = R$ (aber nicht unbedingt $Q = 1_n$ falls $n > m$).

(b) Ist A reell, so lässt sich das Gram-Schmidt-Verfahren in $\mathbb{R}^n$ durchführen (man beachte, dass wir $a_{i_1},\dots,a_{i_s}$ mit reellen Vektoren zu einer Basis ergänzt haben). □

Bemerkung 18.39.

(a) Ist $\operatorname{rk} A = n \leq m$, so zeigt der Beweis, dass Q und R in der QR-Zerlegung eindeutig bestimmt sind.

(b) Im Fall $n = m = 1$ erhält man die *Polardarstellung* einer komplexen Zahl $z = e^{\varphi \mathrm{i}}|z|$. Im Allgemeinen hat die Polardarstellung einer Matrix eine andere Struktur (Aufgabe III.11).

(c) Wir sehen in Abschnitt 18.7, dass die direkte Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens instabil ist.

Beispiel 18.40.

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \mathrm{i}-1 \\ \sqrt{2} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & {}^{(1+\mathrm{i})}/_{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 18.41. In der Praxis entstehen durch ungenaue Messungen oft überbestimmte Gleichungssysteme $Ax = b$ ohne exakte Lösung. Die Güte einer Näherungslösung $\tilde{x}$ lässt sich durch $|\tilde{x} - x|$ bzw. $|\tilde{x} - x|^2 = \sum(\tilde{x}_i - x_i)^2$ quantifizieren.

Satz 18.42 (Methode der kleinsten Quadrate)**.** *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ mit vollem Rang $m \leq n$ und $b \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. Dann besitzt das Gleichungssystem $A^*Ax = A^*b$ eine eindeutige Lösung $\tilde{x}$ und für alle $x \neq \tilde{x}$ gilt $|A\tilde{x} - b| < |Ax - b|$.*

Beweis. Da A vollen Rang $m \leq n$ hat, ist A^*A positiv definit, also insbesondere invertierbar. Dies zeigt die Existenz und Eindeutigkeit von $\tilde{x}$. Für $y \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}[Ay, A\tilde{x} - b] &= y^*A^*(A\tilde{x} - b) = 0 = [A\tilde{x} - b, Ay],\\ |A(\tilde{x} + y) - b|^2 &= [(A\tilde{x} - b) + Ay, (A\tilde{x} - b) + Ay] = |A\tilde{x} - b|^2 + |Ay|^2 > |A\tilde{x} - b|^2.\end{aligned}$$ □

Bemerkung 18.43.

(a) In der Neujahrsnacht 1801 entdeckte der Astronom Piazzi den Zwergplaneten *Ceres*. Die Position wurde 40 Tage lang aufgezeichnet, bis Ceres aus dem Blickfeld verschwand. Gauß hat mit der Methode der kleinsten Quadrate die Bahn von Ceres mit den vorhandenen Messdaten extrapoliert und konnte so die Position erfolgreich vorhersagen. Er erlangte dadurch internationale Bekanntheit.

(b) Nach Beispiel 18.28 gilt $\tilde{x} = A^+b$ in der Situation von Satz 18.42.

(c) Die Methode der kleinsten Quadrate führt auf das sogenannte *Normalgleichungssystem* $A^*Ax = A^*b$ mit positiv definiter Koeffizientenmatrix. Dafür gibt es spezielle Verfahren. Die folgende Zerlegung präzisiert Lemma 12.40.

Satz 18.44 (Cholesky-Zerlegung)**.** *Genau dann ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ positiv definit,[6] falls eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit reellen, positiven Hauptdiagonaleinträgen und $A = R^*R$ existiert. Gegebenenfalls ist R eindeutig bestimmt.*

Beweis. Für $R \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ist R^*R bekanntlich positiv definit. Sei nun umgekehrt A positiv definit und $\sqrt{A} = QR$ die (eindeutige) QR-Zerlegung der Wurzel aus A (Aufgabe II.23). Dann gilt

$$A = \sqrt{A}^2 = \sqrt{A}^*\sqrt{A} = R^*Q^*QR = R^*R.$$

Sei $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine weitere obere Dreiecksmatrix mit positiver Hauptdiagonale und $A = P^*P$. Dann ist $P^{-*}R^* = P^{-*}AR^{-1} = PR^{-1}$ eine obere und untere Dreiecksmatrix, also eine Diagonalmatrix mit positiven Hauptdiagonaleinträgen. Wegen

$$(PR^{-1})^*PR^{-1} = R^{-*}AR^{-1} = 1_n$$

ist PR^{-1} unitär. Es folgt $P = R$. □

Bemerkung 18.45.

(a) Die Matrix $R = (r_{ij})$ lässt sich ohne den Umweg über die QR-Zerlegung iterativ berechnen: Wegen $a_{11} = e_1Ae_1^{\mathrm{t}} > 0$ ist $r_{11} = \sqrt{a_{11}}$. Sei bereits $R_1 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ mit $A_{nn} = R_1^*R_1$ bestimmt. Mit dem Ansatz $A = \begin{pmatrix} A_{nn} & a \\ a^* & a_{nn} \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} R_1 & v \\ 0 & r_{nn} \end{pmatrix}$ erhält man $R_1^*v = a$ und $r_{nn} = \sqrt{a_{nn} - v^*v}$.

[6] im Sinn von Aufgabe II.23

(b) Das System $Ax = b$ mit $A = R^*R$ kann man bequem in zwei Schritten lösen: Zunächst löst man $R^*y = b$ durch *Vorwärtssubstitution*:

$$\begin{pmatrix} \overline{r_{11}} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \overline{r_{1n}} & \cdots & \overline{r_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{b_1}{\overline{r_{11}}} \\ y_2 = \frac{b_2 - \overline{r_{12}} y_1}{\overline{r_{22}}} \\ \quad \vdots \end{cases}$$

und anschließend $Rx = y$ durch *Rückwärtssubstitution*:

$$\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_n &= \frac{y_n}{r_{nn}} \\ x_{n-1} &= \frac{y_{n-1} - r_{n-1,n} x_n}{r_{n-1,n-1}} \\ & \vdots \end{cases}$$

Beispiel 18.46. Wir betrachten das überbestimmte System

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Das Normalgleichungssystem lautet $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{smallmatrix}\right) x = -\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$. Die Matrix R erhält man durch $r_{11} = \sqrt{2}$, $r_{12} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ und $r_{22} = \sqrt{6 - 9/2} = \sqrt{3/2}$. Nun ist $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 5/\sqrt{3})^{\mathrm{t}}$ die Lösung von

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 3/\sqrt{2} & \sqrt{3/2} \end{pmatrix} y = R^{\mathrm{t}} y = -\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und $x = (2, -5/3)^{\mathrm{t}}$ die Lösung von

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3/2} \end{pmatrix} x = Rx = y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Für das ursprüngliche System erhält man die Näherung $Ax = \frac{1}{3}(1, -4, 5)^{\mathrm{t}}$. In der Praxis werden die Wurzelausdrücke durch Gleitkommazahlen approximiert.

18.4 Iterative Verfahren

Bemerkung 18.47.

(a) Für große Matrizen sind Faktorisierungsmethoden wie die QR-Zerlegung langsam und speicherintensiv. Zum Lösen von linearen Gleichungssystemen kann man in diesen Fällen auf schnellere iterative Verfahren ausweichen. Für Konvergenzbeweise benötigen wir einige Hilfsmittel aus der Analysis.

(b) Bisher gingen Normen stets aus Skalarprodukten hervor (Definition 11.2 und Definition 13.2). Sie können aber auch direkt über die Eigenschaften aus Lemma 13.5 definiert werden.

Definition 18.48. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine Abbildung $V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \|v\|$ heißt *Norm*, falls für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $\|v\| \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $v = 0$ (*positiv definit*).

(b) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ (*Homogenität*).

(c) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (*Dreiecksungleichung*).

Beispiel 18.49.

(a) Ist $[.,.]$ ein Skalarprodukt auf V, so definiert $\|v\| := \sqrt{[v,v]}$ eine Norm nach Lemma 13.5.

(b) Auf $V = \mathbb{C}^n$ definiert $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ eine Norm. Diese Norm kann nicht aus einem Skalarprodukt gewonnen werden, denn die Parallelogrammgleichung

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

aus Bemerkung 11.3 ist für $x = (1, 0)$ und $y = (0, 1)$ verletzt.

(c) Für $V = \mathbb{C}^n$ und $p \geq 1$ definiert

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$$

eine Norm (Aufgabe III.13).[7] Für $p = 1$ erhält man $\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$. Für $p = 2$ erhält man die „euklidische“ Norm $|x| = \sqrt{[x,x]}$. Mit $p \to \infty$ nähert sich $\|.\|_p$ der Norm $\|.\|_\infty$ an.

(d) Ist $\|.\|$ eine Norm auf $\mathbb{C}^n$ und $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, so definiert auch $\|x\|_A := \|Ax^{\mathrm{t}}\|$ eine Norm auf $\mathbb{C}^n$.

Definition 18.50. Normen $\|.\|$ und $\|.\|'$ auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V heißen *äquivalent*, falls $\lambda, \mu > 0$ mit

$$\lambda\|v\| \leq \|v\|' \leq \mu\|v\|$$

für alle $v \in V$ existieren.

Lemma 18.51. *Je zwei Normen auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum sind äquivalent.*

Beweis. O. B. d. A. sei $V = \mathbb{C}^n$. Es genügt zu zeigen, dass jede Norm $\|.\|$ zu $\|.\|_1$ äquivalent ist. Für $\lambda := \max\{\|e_1\|, \ldots, \|e_n\|\} > 0$ gilt

$$\|x\| = \Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Big\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\|e_i\| \leq \lambda\|x\|_1$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Sei $y_i := \overline{x_i}/|x_i|$ für $i = 1, \ldots, n$. Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt $\|x\|_1 = [x, y] \leq |x||y| = \sqrt{n}|x|$. Aus der (umgekehrten) Dreiecksungleichung folgt

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \lambda\|x - y\|_1 \leq \lambda\sqrt{n}|x - y|.$$

Dies zeigt, dass die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ bzgl. der euklidischen Norm stetig ist. Daher nimmt f auf der kompakten Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 = 1\} \neq \varnothing$ sein Minimum $\mu > 0$ an. Für $x \neq 0$ gilt nun

$$\|x\| = \|x\|_1 f(\|x\|_1^{-1} x) \geq \|x\|_1 \mu. \qquad \square$$

Bemerkung 18.52. Bekanntlich ist die euklidische Norm auf $\mathbb{C}^n$ abgeschlossen (d. h. jede Cauchyfolge konvergiert). Nach Lemma 18.51 ist daher jede Norm auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V abgeschlossen, d. h. V ist ein *Banachraum*.

[7] In der Analysis definiert man $x^p := \exp(p \ln x)$ für $x > 0$.

Satz 18.53 (Banachs Fixpunktsatz). *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine* Kontraktion *bzgl. einer Norm $\|.\|$, d. h. es gibt eine Konstante $c < 1$ mit $\|f(x) - f(y)\| \le c\|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann konvergiert die Folge $x_{k+1} := f(x_k)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gegen den einzigen Fixpunkt von f.*

Beweis. Für $k, l \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|x_{k+l} - x_k\| = \Big\|\sum_{i=0}^{l-1}(x_{k+i+1} - x_{k+i})\Big\| \le \sum_{i=0}^{l-1}\|x_{k+i+1} - x_{k+i}\| = \sum_{i=0}^{l-1}\|f^{k+i}(x_1) - f^{k+i}(x_0)\|$$
$$\le \|x_1 - x_0\|\sum_{i=0}^{l-1} c^{k+i} = \|x_1 - x_0\|c^k\frac{1-c^l}{1-c} \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

d. h. $(x_k)_k$ ist eine Cauchyfolge. Nach Bemerkung 18.52 existiert der Grenzwert $\tilde{x} := \lim_{k\to\infty} x_k$. Da f als Kontraktion (gleichmäßig) stetig ist (setze $\delta := \frac{\epsilon}{c}$), gilt $f(\tilde{x}) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \tilde{x}$. Wäre auch $y \neq \tilde{x}$ ein Fixpunkt von f, so hätte man den Widerspruch

$$\|\tilde{x} - y\| = \|f(\tilde{x}) - f(y)\| \le c\|\tilde{x} - y\| < \|\tilde{x} - y\|. \qquad \square$$

Bemerkung 18.54.

(a) Eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Kontraktion, wenn ein $c < 1$ mit $\|f(x)\| \le c\|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ existiert.

(b) Das nächste Lemma liefert eine explizite Äquivalenz zwischen der euklidischen Norm und der in Beispiel 18.49 eingeführten Norm $|.|_A$.

Lemma 18.55. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Sei*

$$\lambda_{\min} := \min\{|\lambda_i| : i = 1, \dots, n\}, \qquad \lambda_{\max} := \max\{|\lambda_i| : i = 1, \dots, n\}.$$

Für $x \in \mathbb{C}^n$ gilt $\lambda_{\min}|x| \le |Ax| \le \lambda_{\max}|x|$ und $|x^*Ax| \le \lambda_{\max}|x|^2$. Ist A positiv definit, so gilt $|x^*Ax| \ge \lambda_{\min}|x|^2$.

Beweis. Sei $S \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ mit $S^*AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (Spektralsatz). Wegen $|x| = |Sx|$ und $|Ax| = |S^*Ax|$ können wir $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ annehmen. Dann gilt

$$|Ax|^2 = (Ax)^*Ax = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2|x_i|^2 \le \lambda_{\max}^2\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \lambda_{\max}^2|x|^2$$

und analog $|Ax| \ge \lambda_{\min}|x|$. Ebenso ist

$$|x^*Ax| = \Big|\sum_{i=1}^n \lambda_i|x_i|^2\Big| \le \sum_{i=1}^n |\lambda_i||x_i|^2 \le \lambda_{\max}|x|^2.$$

Ist A positiv definit, so sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reell und positiv. Dann folgt wie zuvor $|x^{\mathrm{t}}Ax| \ge \lambda_{\min}|x|^2$. $\square$

Satz 18.56 (Gauss-Seidel-Verfahren). *Sei $A = L + R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ positiv definit, wobei L eine untere Dreiecksmatrix und R eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Sei $b \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. Dann konvergiert die Folge*

$$x_{k+1} := L^{-1}b - L^{-1}Rx_k$$

für alle Startwerte $x_0 \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ gegen die Lösung von $Ax = b$.

Beweis. Da A reelle, positive Diagonaleinträge besitzt (Bemerkung 12.39) und R eine strikte obere Dreiecksmatrix ist, muss L invertierbar sein. Für $A\tilde{x} = b$ gilt

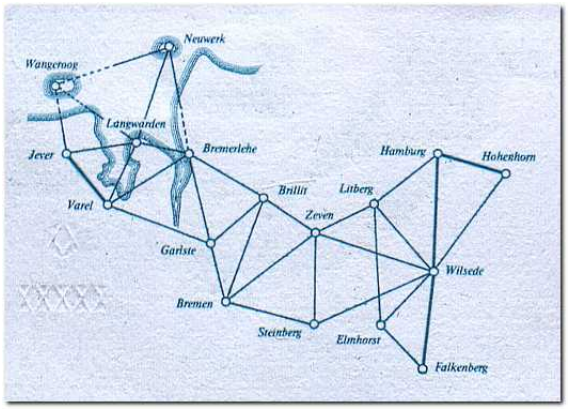
$$\tilde{x} = L^{-1}L\tilde{x} = L^{-1}(b - R\tilde{x}) = L^{-1}b - L^{-1}R\tilde{x},$$

d. h. $\tilde{x}$ ist ein Fixpunkt der Abbildung $f(x) := L^{-1}b - L^{-1}Rx$. Da A positiv definit ist, definiert $[x, y] := y^*Ax$ ein Skalarprodukt mit Norm $\|x\| := \sqrt{[x, x]}$. Nach Banachs Fixpunktsatz genügt es zu zeigen, dass f bzgl. $\|.\|$ eine Kontraktion ist. Da $L^{-1}b$ konstant ist, können wir die lineare Abbildung $g(x) := L^{-1}Rx$ anstelle von f betrachten. Nach Bemerkung 18.54 und Lemma 18.55 müssen wir zeigen, dass jeder Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von $L^{-1}R$ betragsmäßig kleiner als 1 ist. Sei $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ ein entsprechender Eigenvektor und $y := x + g(x) = L^{-1}Ax \neq 0$. Nach Voraussetzung ist $D := L^* - R = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ positiv definit. Also gilt

$$\begin{aligned} |\lambda|\|x\| = \|g(x)\|^2 = \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 - x^*A^*y - y^*Ax + y^*Ay \\ &= \|x\|^2 - y^*L^*y - y^*Ly + y^*(L + R)y = \|x\|^2 - y^*Dy < \|x\|. \end{aligned}$$

Dies zeigt $|\lambda| < 1$. □

Bemerkung 18.57. Gauß hat mit diesem Verfahren das Königreich Hannover vermessen, wovon eine Zeichnung auf dem 10-DM-Schein zeugt:



Er schrieb in einem Brief:

> „Ich empfehle Ihnen diesen Modus zur Nachahmung. Schwerlich werden Sie je wieder direct [sic] eliminieren, wenigstens nicht, wenn Sie mehr als 2 Unbekannte haben. Das indirecte Verfahren lässt sich halb im Schlafe ausführen, oder man kann während desselben an andere Dinge denken."

Beispiel 18.58. Das System $H_4x = (1, 1, 1, 1)^{\mathrm{t}}$ mit der schlecht konditionierten Hilbert-Matrix H_4 hat die Lösung $x = (-4, 60, -180, 140)^{\mathrm{t}}$. Das Gauß-Seidel-Verfahren konvergiert nur langsam:

$$\begin{array}{rcl} x_0 & := & (\ 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0\ ) \\ x_{10} & \approx & (\ -1.90, \quad -2.97, \quad 4.45, \quad 8.06\ ) \\ x_{100} & \approx & (\ 2.84, \quad -14.20, \quad -5.17, \quad 27.94\ ) \\ x_{1000} & \approx & (\ -1.10, \quad 28.86, \quad -106.96, \quad 93.31\ ) \\ x_{10000} & \approx & (\ -4.000, \quad 59.995, \quad -179.988, \quad 139.992\ ) \end{array}$$

18.5 Matrixnormen

Bemerkung 18.59. Die Menge der $n \times m$-Matrizen bildet bekanntlich einen Vektorraum der Dimension nm. Es liegt daher nahe, die in Definition 18.48 definierten Normen auch für Matrizen einzuführen.

Definition 18.60. Eine Abbildung $\mathbb{C}^{n\times m} \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \|A\|$ heißt *Matrixnorm*, falls für $A, B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

- $\|A\| \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $A = 0_{n\times m}$.
- $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$.
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Im Fall $n = m$ nennen wir die Norm *submultiplikativ*, falls $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ gilt.

Beispiel 18.61.

(a) Die „euklidische“ Norm auf $\mathbb{C}^{n\times m}$ nennt man *Frobenius-Norm*

$$|A| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)}.$$

Für $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|AB|^2 = \sum_{i,j}\Big|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\Big|^2 \leq \sum_{i,j}\Big(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}|\Big)^2 \leq \sum_{i,j}\Big(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2\Big)\Big(\sum_{s=1}^{n} |b_{sj}|^2\Big) = |A|^2|B|^2,$$

d. h. $|.|$ ist submultiplikativ. Sind $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ die Singulärwerte von A, so ist

$$|A| = \sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2}$$

nach Bemerkung 18.22.

(b) Jede „natürliche“[8] Vektornorm $\|.\|$ *induziert* durch[9]

$$\|A\| = \max_{0\neq x\in\mathbb{C}^{m\times 1}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

eine Matrixnorm (Aufgabe III.14). Im Fall $m = 1$ stimmen die Normen überein. Für alle $x \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ gilt $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$. Für $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ folgt

$$\|AB\| = \max_{\|x\|=1} \|ABx\| \leq \max_{\|x\|=1} \|A\|\|Bx\| = \|A\|\|B\|,$$

d. h. $\|.\|$ ist submultiplikativ.

(c) Nach (dem Beweis von) Folgerung 18.23 ist $\|A\|_2$ der größte Singulärwert von A (oder 0). Insbesondere ist $\|A\|_2 \leq |A|$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\operatorname{rk} A \leq 1$.

(d) Nicht jede Matrixnorm ist submultiplikativ: Für $\|A\|_{\max} := \max_{i,j} |a_{ij}|$ und $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gilt $\|A^2\|_{\max} = 2 > 1 = \|A\|_{\max}^2$.

[8] definiert für beliebige Dimension

[9] Wie in Bemerkung 18.19 wird das Maximum tatsächlich angenommen.

Lemma 18.62. *Für $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ gilt*

(a) $$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \textit{(Spaltensummen-Norm)}.$$

(b) $$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| = \|A^{\mathrm{t}}\|_1 \qquad \textit{(Zeilensummen-Norm)}.$$

(c) $$\|A\|_2 \le |A| \le \sqrt{\min\{m,n\}}\|A\|_2.$$

(d) $$\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_\infty.$$

(e) $$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1.$$

Beweis.

(a) Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \sum_{i=1}^{n} \Big|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\Big| \le \max_{\sum|x_i|=1} \sum_{j=1}^{m} |x_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \le \max_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Wird das Maximum rechts für j angenommen, so erhält man mit $x = e_j$ Gleichheit.

(b) Es gilt

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \max_{1\le i\le n} \Big|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\Big| \le \max_{\max_i|x_i|=1} \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}||x_j| \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|.$$

Wird das Maximum rechts für i angenommen, so erhält man mit $x_j = \overline{a_{ij}}/|a_{ij}|$ für $a_{ij} \neq 0$ und $x_j = 0$ sonst, Gleichheit.

(c) Sind $\sigma_1 \ge \ldots \ge \sigma_k$ die Singulärwerte von A, so gilt

$$\|A\|_2 = \sigma_1 \le \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2} = |A| \le \sqrt{k}\sigma_1 \le \sqrt{\min\{n,m\}}\|A\|_2.$$

(d) Für $x \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i| \le \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2} = |x| \le \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

Dies zeigt

$$\|A\|_\infty = \max_{0\neq x\in\mathbb{C}^{m\times 1}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \max_{0\neq x\in\mathbb{C}^{m\times 1}} \frac{|Ax|}{|x|/\sqrt{m}} = \sqrt{m}\|A\|_2,$$
$$\|A\|_2 = \max_{0\neq x\in\mathbb{C}^{m\times 1}} \frac{|Ax|}{|x|} \le \max_{0\neq x\in\mathbb{C}^{m\times 1}} \frac{\sqrt{n}\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sqrt{n}\|A\|_\infty.$$

(e) Aus der Singulärwertzerlegung ergibt sich $\|A^{\mathrm{t}}\|_2 = \|A\|_2$. Daher folgt die Behauptung aus (b) und (d). □

Lemma 18.63. *Die Konditionszahl von $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ ist $\kappa(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2$.*

Beweis. Nach Definition ist

$$\|A\|_2 = \max_{x\in\mathbb{C}^{n\times 1}\setminus\{0\}} |Ax|/|x|,$$
$$\|A^{-1}\|_2 = \max_x |A^{-1}x|/|x| = \max_y |y|/|Ay| = (\min_y |Ay|/|y|)^{-1}.$$

Die Behauptung folgt aus der Definition der Konditionszahl. □

Definition 18.64. Eine Folge von Matrizen $(A_k)_k \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *konvergiert* gegen eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, falls $\lim_{k\to\infty} \|A - A_k\| = 0$ für eine Matrixnorm gilt. Da alle Normen nach Lemma 18.51 äquivalent sind, hängt diese Definition nicht von der Wahl der Norm ab. Ggf. schreiben wir $A = \lim_{k\to\infty} A_k$

Bemerkung 18.65.

(a) Wie in der Analysis zeigt man, dass die Folge $A_k = (a_{ij}^{(k)})$ genau dann gegen $A = (a_{ij})$ konvergiert, wenn $\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$ für alle i, j gilt.

(b) Offenbar sind die Abbildungen $A \to A^{\mathrm{t}}$, $A \to \overline{A}$ und tr stetig (bzgl. jeder Matrixnorm). Bekanntlich sind Addition und Multiplikation komplexer Zahlen stetige Abbildungen. Daher ist auch die Matrizenmultiplikation stetig. Für $A = \lim_{k\to\infty} A_k$ und $B = \lim_{k\to\infty} B_k$ gilt also $\lim_{k\to\infty} A_k B_k = AB$. Die Leibniz-Formel zeigt, dass auch det stetig ist. Die Darstellung $A^{-1} = \det(A)^{-1}\widetilde{A}$ (Satz 9.22) liefert, dass die Inversenbildung $A \mapsto A^{-1}$ stetig ist.

(c) Konvergiert die Folge der Partialsummen $B_k := \sum_{i=1}^k A_i$, so schreiben wir $\sum_{k=1}^\infty A_k := \lim_{k\to\infty} B_k$ wie üblich.

Satz 18.66. *Die Menge der* (*invertierbaren*) *diagonalisierbaren Matrizen liegt* dicht *in $\mathbb{C}^{n\times n}$, d. h. für alle $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert eine Folge diagonalisierbarer Matrizen $(A_k)_k$ mit $\lim_{k\to\infty} A_k = A$.*

Beweis. Sei $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, sodass $D := S^{-1}AS$ eine Dreiecksmatrix ist (z. B. Jordan-Normalform). Dann ist auch

$$B_k := D + \frac{1}{k}\operatorname{diag}(1, 2, \ldots, n) \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

für $k \in \mathbb{N}$ eine Dreiecksmatrix. Ist k hinreichend groß, so besteht die Hauptdiagonale von B_k aus paarweise verschiedenen Eigenwerten (ungleich 0). Nach Folgerung 8.12 ist B_k und damit auch

$$A_k := SB_kS^{-1} = A + \frac{1}{k}S\operatorname{diag}(1, \ldots, n)S^{-1}$$

diagonalisierbar (und invertierbar). Offenbar gilt $\lim_k A_k = A$. □

Beispiel 18.67. Satz 18.66 erlaubt es, Aussagen über diagonalisierbare (oder invertierbare) Matrizen auf alle Matrizen zu übertragen:

(a) Der Satz von Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$, lässt sich leicht für Diagonalmatrizen A nachrechnen (siehe Beweis von Satz 10.52). Wegen $S\chi_A(A)S^{-1} = \chi_{SAS^{-1}}(SAS^{-1})$ für $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ gilt er für diagonalisierbare Matrizen. Die Abbildung $A \mapsto \chi_A(A)$ ist stetig, da die Koeffizienten von χ_A Polynome in den Koeffizienten von A sind (Bemerkung 18.65). Nach Satz 18.66 gilt $\chi_A(A) = 0$ also für alle $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(b) Die Gleichung $\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$ aus Satz 9.25 folgt für invertierbare Matrizen direkt aus Satz 9.22. Nach Bemerkung 18.65 ist die Abbildung $A \mapsto \widetilde{A}$ stetig. Daher gilt $\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$ für alle $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Satz 18.68. *Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ konvergiert die Folge $(A^k)_k$ genau dann, wenn die folgenden beiden Aussagen gelten:*

(a) Für jeden Eigenwert λ von A gilt $|\lambda| < 1$ oder $\lambda = 1$.

(b) Ist 1 ein Eigenwert, so stimmt die algebraische Vielfachheit mit der geometrischen Vielfachheit überein.

Beweis. O. B. d. A. sei $A = \operatorname{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), \ldots, J_{n_s}(\lambda_s))$ in Jordan-Normalform. Gilt $|\lambda_i| > 1$, so besitzt A^k den Eintrag $\lambda_i^k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$. Sei nun $|\lambda_i| < 1$. Die Beträge der Einträge von $J_{n_i}(\lambda_i)^k$ haben nach Lemma 14.41 die Form

$$\binom{k}{l}|\lambda_i|^{k-l} \le k^n|\lambda_i|^{k-n} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \qquad (0 \le l < n).$$

Dies zeigt $J_{n_i}(\lambda_i)^k \to 0$. Sei nun $|\lambda_i| = 1$. Damit A^k konvergieren kann, muss ein k mit $\lambda_i^k = \lambda_i^{k+1} = \ldots$ existieren, d. h. $\lambda_i = 1$. Ist $n_i > 1$, so gilt $J_{n_i}(\lambda_i)_{21} = k \to \infty$. Also muss $n_i = 1$ für alle i mit $\lambda_i = 1$ gelten. O. B. d. A. sei $\lambda_1 = \ldots = \lambda_t = 1 > |\lambda_j|$ für $j > t$. Offenbar konvergiert (A^k) dann gegen $\operatorname{diag}(1_t, 0_{n-t})$. □

Folgerung 18.69. *Die Bedingungen aus Satz 18.68 seien für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\dim E_1(A) = 1$ erfüllt. Seien $v, w \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ Eigenvektoren von A bzw. A^* zum Eigenwert 1 mit $[v, w] = 1$. Dann gilt $\lim_{k\to\infty} A^k = vw^*$.*

Beweis. Wegen $\chi_{A^*} = \overline{\chi_A}$ ist 1 tatsächlich ein Eigenwert von A^*. Bekanntlich (zum Beispiel nach der Jordan-Normalform) existiert ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ mit erster Spalte v, sodass $S^{-1}AS = \operatorname{diag}(1, B)$ mit $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$. Sei u die erste Zeile von S^{-1}. Dann gilt

$$C := \lim_{k\to\infty} A^k = \lim_{k\to\infty} S \operatorname{diag}(1, B^k)S^{-1} = S \operatorname{diag}(1, 0_{n-1})S^{-1} = vu.$$

Andererseits ist $w = C^*w = u^*v^*w = u^*[v, w] = u^*$. □

18.6 Eigenwertberechnung

Bemerkung 18.70.

(a) Die Determinante ist im Allgemeinen schlecht konditioniert (d. h. sensibel gegenüber kleinen Änderungen):

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 33 \\ 3 & 100 \end{pmatrix} = 1 \qquad\qquad \det\begin{pmatrix} 1.\mathbf{1} & 33 \\ 3 & 100 \end{pmatrix} = 11$$

Da $\pm\det(A)$ das Absolutglied von χ_A ist, ist auch χ_A schlecht konditioniert. Noch schlechter ist μ_A konditioniert, denn hier können kleinere Änderungen sogar $\deg \mu_A$ ändern.

(b) Die Eigenwerte als Nullstellen von χ_A (oder μ_A) sind ebenfalls schlecht konditioniert:

$X^2 - 21X + 110$	Nullstellen: $10, 11$
$X^2 - 21.\mathbf{1}X + 110$	Nullstellen: $\approx 9.41, 11.69$
$X^2 - 20.\mathbf{9}X + 110$	Nullstellen: $\approx 10.45 \pm 0.89\mathrm{i}$

Abweichungen an A wirken sich also „doppelt“ auf die Eigenwertberechnung aus. Außerdem gibt es keine explizite Formel für die Nullstellen eines Polynoms vom Grad ≥ 5. Dennoch ist die Bestimmung der Eigenwerte von *normalen* Matrizen – ohne den Umweg über χ_A – gut konditioniert nach folgendem Satz.

Satz 18.71 (Bauer-Fike). *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar mit $S^{-1}AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Sei $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\mu \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $A + X$. Dann gilt*

$$\min_{i=1,\ldots,n} |\mu - \lambda_i| \leq \kappa(S)\|X\|_2.$$

Insbesondere ist $\min_{i=1,\ldots,n} |\mu - \lambda_i| \leq \|X\|_2$, wenn A normal ist.

Beweis. O. B. d. A. sei $\mu \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Sei $D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Dann ist $D - \mu 1_n$ invertierbar. Nach Voraussetzung ist $A + X - \mu 1_n$ nicht invertierbar. Daher ist auch

$$(D - \mu 1_n)^{-1} S^{-1}(A - \mu 1_n + X)S = 1_n + (D - \mu 1_n)^{-1} S^{-1} X S$$

nicht invertierbar. Aus Satz 19.8 und Lemma 18.63 folgt

$$1 \leq \rho\big((D - \mu 1_n)^{-1} S^{-1} X S\big) \leq \|(D - \mu 1_n)^{-1} S^{-1} X S\|_2 \leq \|(D - \mu 1_n)^{-1}\|_2 \kappa(S) \|X\|_2.$$

Nach Beispiel 18.61 ist $\|(D - \mu 1_n)^{-1}\|_2 = \max_{i=1,\ldots,n}(|\lambda_i - \mu|)^{-1}$. Dies zeigt

$$\min_{i=1,\ldots,n} |\mu - \lambda_i| = \|(D - \mu 1_n)^{-1}\|_2^{-1} \leq \kappa(S)\|X\|_2.$$

Ist A normal, so kann man $S \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ nach dem Spektralsatz wählen. Dann ist $\kappa(S) = 1$. □

Satz 18.72 (Potenzmethode). *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Eigenwerten $\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, sodass $|\lambda| > |\lambda_i|$ für $i \geq 2$ gilt. Dann konvergiert die Folge*

$$x_{k+1} := \frac{Ax_k}{|Ax_k|}$$

für „fast alle“ Startvektoren $x_0 \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ gegen einen Eigenvektor zu λ. Ggf. ist $\lim_{k\to\infty} x_k^* A x_k = \lambda$.

Beweis. Nach Voraussetzung hat die Jordan-Normalform von A die Form

$$J = \operatorname{diag}(\lambda, J_{n_2}(\lambda_2), \ldots, J_{n_s}(\lambda_s)),$$

sofern man $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ geeignet anordnet. Sei $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ eine entsprechende Basis mit $Ab_1 = \lambda b_1$. Für $S := (b_1, \ldots, b_n) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ gilt $S^{-1}AS = J$. Sei $x_0 = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$ zufällig gewählt mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. In fast allen Fällen ist $\alpha_1 \neq 0$. Dies nehmen wir ab jetzt an. Dann gilt

$$A^k x_0 = A^k S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{\mathrm{t}} = SJ^k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{\mathrm{t}} = \lambda^k(\alpha_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_n b_n).$$

Für $i \geq 2$ existieren nach Lemma 14.41 $2 \leq j \leq s$ und $0 \leq t \leq i - 2$ mit

$$\beta_i = \sum_{l=0}^{t} \binom{k}{l} \lambda_j^{-l} \alpha_{i-l} \Big(\frac{\lambda_j}{\lambda}\Big)^k \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

wegen $|\lambda_j| < |\lambda|$. Mit $A^k x_0$ strebt auch x_k gegen ein Vielfaches von b_1. Die zweite Behauptung folgt aus $|x_k| = 1$ für alle $k \geq 1$. □

Bemerkung 18.73. Hat man einen Eigenvektor b_1 zum betragsmäßig größten Eigenwert λ von A (näherungsweise) bestimmt, so kann man b_1 zu einer Basis $b_1, \dots, b_n$ ergänzen und aus diesen Spalten die Matrix S bilden. Es gilt $S^{-1}AS = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1 \end{smallmatrix}\right)$, wobei jeder Eigenwert von $A_1 \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ auch ein Eigenwert von A ist. Haben alle Eigenwerte von A paarweise verschiedene Beträge, so kann man Satz 18.72 auf A_1 anwenden und iterieren. Wir werden sehen, dass man dies mit nur einer Iteration bewerkstelligen kann.

Lemma 18.74. *Sei (A_k) eine Folge invertierbarer Matrizen mit $\lim_{k\to\infty} A_k = 1_n$. Sei $A_k = Q_k R_k$ die QR-Zerlegung. Dann gilt $\lim_{k\to\infty} Q_k = 1_n = \lim_{k\to\infty} R_k$.*

Beweis. Wegen $|Q_k| = \sqrt{\operatorname{tr}(Q_k^* Q_k)} = \sqrt{\operatorname{tr} 1_n} = \sqrt{n}$ ist die Folge $(Q_k)_k$ beschränkt. Nach Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge $(Q_{k_i})_i$ mit $Q := \lim_{i\to\infty} Q_{k_i}$. Wegen

$$Q^*Q = \lim_{i\to\infty} Q_{k_i}^* Q_{k_i} = 1_n$$

ist Q unitär. Aus der Stetigkeit der Matrizenmultiplikation erhält man

$$\lim_{i\to\infty} R_{k_i} = \lim_{i\to\infty} Q_{k_i}^* (Q_{k_i} R_{k_i}) = Q^* \lim_{i\to\infty} A_{k_i} = Q^*.$$

Da die Menge der oberen Dreiecksmatrizen mit nicht-negativen Hauptdiagonaleinträgen abgeschlossen ist, muss auch Q^* zu dieser Menge gehören. Dies geht offenbar nur, falls $Q = 1_n$. Insbesondere konvergiert jede konvergente Teilfolge von $(Q_k)_k$ gegen den gleichen Grenzwert. Daher muss auch (Q_k) gegen 1_n konvergieren und folglich auch (R_k). □

Definition 18.75. Eine Folge (A_k) von Matrizen konvergiert *quasi* gegen eine Matrix A, falls eine Folge von unitären Diagonalmatrizen (D_k) mit $\lim_{k\to\infty} D_k^* A_k D_k = A$ existiert.

Bemerkung 18.76. In der Situation von Definition 18.75 gilt $D_k = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ mit $|d_i| = 1$ für $i = 1, \dots, n$. Die Hauptdiagonalen von A_k und $D_k^* A_k D_k$ sind für alle k identisch. Daher konvergiert die Hauptdiagonale von A_k gegen die Hauptdiagonale von A. Die Einträge von A_k außerhalb der Hauptdiagonale können hingegen in jeder Iteration um einen Faktor vom Betrag 1 „oszillieren“.

Satz 18.77 (Francis-Algorithmus[10])**.** *Sei $A_1 := A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar, sodass die Eigenwerte von A paarweise verschiedene Beträge haben. Für $k = 1, 2, \dots$ sei $A_k = Q_k R_k$ die QR-Zerlegung und $A_{k+1} := R_k Q_k$. Dann konvergiert $(A_k)_k$ quasi gegen eine obere Dreiecksmatrix mit den Eigenwerten von A auf der Hauptdiagonale.*

Beweis (Wilkinson). Sei $\mathcal{Q}_k := Q_1 \dots Q_k$ und $\mathcal{R}_k := R_k \dots R_1$. Aus $Q_k^* A_k Q_k = R_k Q_k = A_{k+1}$ folgt $\mathcal{Q}_k^* A \mathcal{Q}_k = A_{k+1}$. Wir zeigen $\mathcal{Q}_k \mathcal{R}_k = A^k$ für alle $k \geq 1$. Dies ist klar für $k = 1$. Für $k \geq 2$ gilt induktiv

$$\mathcal{Q}_k \mathcal{R}_k = \mathcal{Q}_{k-1} Q_k R_k \mathcal{R}_{k-1} = \mathcal{Q}_{k-1} A_k \mathcal{R}_{k-1} = \mathcal{Q}_{k-1} \mathcal{Q}_{k-1}^* A \mathcal{Q}_{k-1} \mathcal{R}_{k-1} = A A^{k-1} = A^k.$$

Für die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A gilt $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| > 0$ nach Voraussetzung. Nach Folgerung 8.12 existiert ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ mit $S^{-1}AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =: D$. Sei $S^{-1} = L_{S'} P R_{S'}$ die modifizierte LR-Zerlegung von S^{-1} aus Bemerkung 18.37. Sei $SP = Q_S R_S$ die QR-Zerlegung von SP. Für $L_{S'} = (x_{ij})$ gilt

$$D^k L_{S'} D^{-k} = \left((\lambda_i/\lambda_j)^k x_{ij}\right)_{ij} \xrightarrow{k\to\infty} 1_n$$

[10] auch *QR-Verfahren* genannt

wegen $x_{ij} = \delta_{ij}$ für $i \leq j$ und $|\lambda_i| < |\lambda_j|$ für $i > j$. Damit strebt auch $M_k := R_S P^{\mathrm{t}} D^k L_{S'} D^{-k} P R_S^{-1}$ gegen 1_n. Für die QR-Zerlegung $M_k = Q_{M_k} R_{M_k}$ gilt $\lim_{k\to\infty} Q_{M_k} = 1_n$ nach Lemma 18.74. Insgesamt ist

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_k \mathcal{R}_k = A^k = S D^k S^{-1} = S P P^{\mathrm{t}} D^k L_{S'} P R_{S'} = Q_S R_S P^{\mathrm{t}} D^k L_{S'} D^{-k} D^k P R_{S'} \\ = Q_S M_k R_S P^{\mathrm{t}} D^k P R_{S'} = Q_S Q_{M_k} R_{M_k} P^{\mathrm{t}} D^k P R_{S'}.\end{aligned}$$

Mit D^k ist auch $P^{\mathrm{t}} D^k P$ eine Diagonalmatrix. Folglich ist $T_k := (t_{ij}) = R_{M_k} P^{\mathrm{t}} D^k P R_{S'}$ eine obere Dreiecksmatrix. Für

$$U_k := \operatorname{diag}\big(\overline{t_{11}}/|t_{11}|, \ldots, \overline{t_{nn}}/|t_{nn}|\big) \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$$

ist $U_k T_k$ eine obere Dreiecksmatrix mit positiver Hauptdiagonale und $Q_S Q_{M_k} U_k^* \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$. Aus der Eindeutigkeit der QR-Zerlegung ergibt sich $\mathcal{Q}_k = Q_S Q_{M_k} U_k^*$. Damit gilt

$$\lim_{k\to\infty} U_k^* A_{k+1} U_k = \lim_{k\to\infty} U_k^* \mathcal{Q}_k^* A \mathcal{Q}_k U_k = \lim_{k\to\infty} Q_{M_k}^* Q_S^* S D S^{-1} Q_S Q_{M_k} = R_S P^{\mathrm{t}} D P R_S^{-1},$$

d. h. (A_k) konvergiert quasi gegen die obere Dreiecksmatrix $R_S P^{\mathrm{t}} D P R_S^{-1} \approx D$. Auf der Hauptdiagonale stehen die Eigenwerte von D bzw. A. □

Bemerkung 18.78.

(a) Offenbar konvergiert (A_k) quasi gegen eine Schur-Zerlegung (Satz 13.23) von A. Sei A reell. Dann folgt aus der Voraussetzung, dass auch die Eigenwerte reell sind, denn $|\lambda| = |\overline{\lambda}|$ für $\lambda \in \mathbb{C}$. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so kann man erreichen, dass (A_k) gegen eine reelle Blockdiagonalmatrix mit 2×2-Blöcken konvergiert (Aufgabe II.24).

(b) In seiner Reinform konvergiert Francis' Algorithmus nur langsam. In der Praxis beschleunigt man das Verfahren, indem man A zunächst in eine *Hessenberg-Matrix* (d. h. $a_{ij} = 0$ für $i > j + 1$) transformiert und in jeder Iteration A_k um ein geeignetes Vielfaches der Einheitsmatrix verschiebt. Dieser Algorithmus wird (neben der FFT und dem Simplex-Algorithmus) zu den wichtigsten Algorithmen des 20. Jahrhunderts gezählt.[11]

Beispiel 18.79.

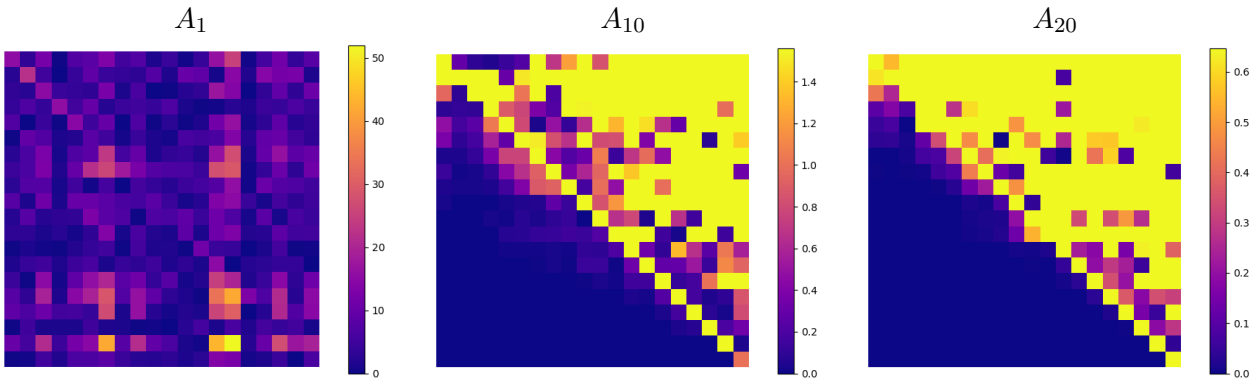
(a) Für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Q_1 R_1$$

gilt $A_2 = R_1 Q_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und induktiv $A_k = \left(\begin{smallmatrix} 2 & (-1)^k \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Dies zeigt das Phänomen der Quasi-Konvergenz.

(b) Sei $A = S^{-1} \operatorname{diag}(1, \ldots, 20) S \in \mathbb{R}^{20\times 20}$ für eine zufällig gewählte Matrix $S \in \mathrm{GL}(20, \mathbb{R})$. Die folgende Grafik illustriert Francis-Algorithmus für A. Die Farbskala repräsentiert die Beträge von Einträgen unterhalb der Hauptdiagonale (die Struktur von A wurde in Bemerkung 9.24 begründet).

[11] siehe [Dongarra-Sullivan, *Top Ten Algorithms of the Century*, Comput. Sci. Eng. 2 (2000), 22–23]



Bemerkung 18.80. Für positiv definite Matrizen kann man die QR-Zerlegung in Francis' Algorithmus durch die Cholesky-Zerlegung ersetzen.

Satz 18.81 (Cholesky-Verfahren)**.** *Sei $A = A_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ positiv definit. Für $k = 1, 2, \ldots$ sei $A_k = R_k^* R_k$ die Cholesky-Zerlegung und $A_{k+1} := R_k R_k^*$. Dann konvergiert $(A_k)_k$ gegen eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von A auf der Hauptdiagonale.*

Beweis (Schatzman). Wegen $A_{k+1} = R_k A_k R_k^{-1}$ haben alle A_k die gleichen Eigenwerte. Sei $A_k = (a_{ij}^{(k)})$ und $R_k = (r_{ij}^{(k)})$. Wegen

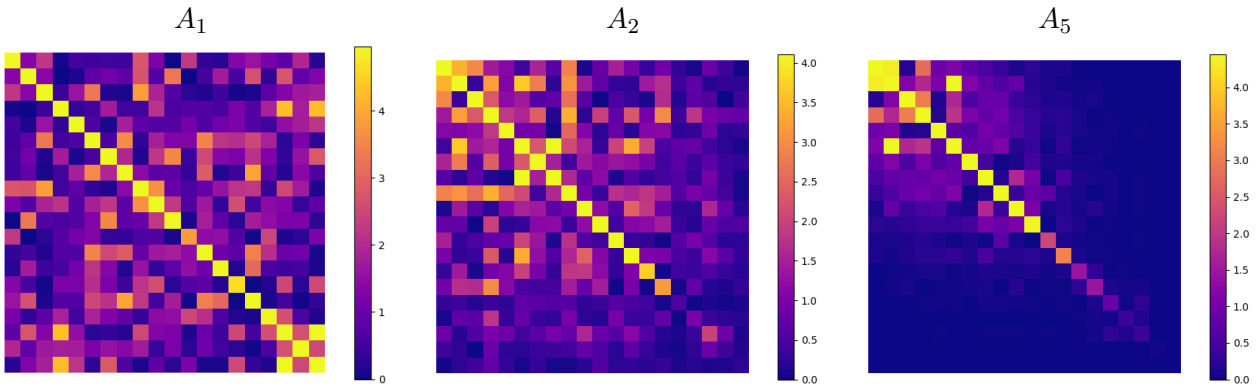
$$\delta_k(s) := \sum_{i=1}^{s} a_{ii}^{(k)} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i} |r_{ji}^{(k)}|^2 = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=i}^{s} |r_{ij}^{(k)}|^2 \le \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=i}^{n} |r_{ij}^{(k)}|^2 = \delta_{k+1}(s)$$

sind $(\delta_k(s))_k$ für $s = 0, \ldots, n$ monoton steigende Folgen. Wegen $\delta_k(s) \le \delta_k(n) = \operatorname{tr} A_k = \operatorname{tr} A$ sind die Folgen beschränkt. Daher existiert $\delta(s) := \lim_{k\to\infty} \delta_k(s)$ für $s = 0, \ldots, n$. Es folgt $\lim_{k\to\infty} a_{ss}^{(k)} = \delta(s) - \delta(s-1)$ für $s = 1, \ldots, n$. Da die Differenzen

$$\delta_{k+1}(s) - \delta_k(s) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=s+1}^{n} |r_{ij}^{(k)}|^2$$

mit k gegen 0 streben, muss $\lim_{k\to\infty} r_{ij}^{(k)} = 0$ für alle $i \ne j$ gelten. Mit R_k muss auch A_k gegen eine Diagonalmatrix konvergieren. □

Beispiel 18.82. Sei $A \in \mathbb{R}^{20\times 20}$ eine zufällig gewählte positiv definite Matrix (konstruiert als $A = S^{\mathrm{t}} S$). Die folgende Grafik illustriert den Fortschritt des Cholesky-Verfahrens mit A. Die Farbskala repräsentiert die Beträge aller Einträge außerhalb der Hauptdiagonale.



Offenbar arbeitet das Verfahren von rechts unten nach links oben.

Bemerkung 18.83. Die ungefähre Lage von Eigenwerten einer Matrix lässt sich ohne Rechenaufwand mit folgendem Satz einkreisen.

Satz 18.84 (Gershgorin). *Für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von $(a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert ein $i \in \{1,\dots,n\}$ mit $|\lambda - a_{ii}| \le \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$.*

Beweis. Sei $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Sei

$$|x_i| = \max\{|x_j| : j = 1,\dots,n\} > 0.$$

Nach Normierung können wir $x_i = 1$ und $|x_j| \le 1$ für $j \neq i$ annehmen. Nach der Dreiecksungleichung gilt dann

$$|\lambda - a_{ii}| = |(Ax)_i - a_{ii}x_i| = \Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - a_{ii}x_i\Big| = \Big|\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j\Big| \le \sum_{j\neq i} |a_{ij}|. \qquad \square$$

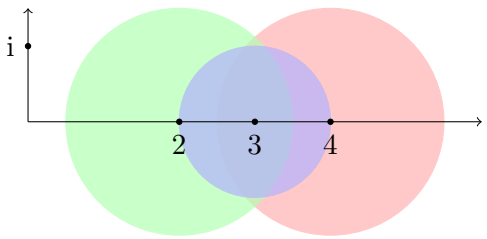
Folgerung 18.85. *Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ für $i = 1,\dots,n$ ist invertierbar.*[12]

Beweis. Nach Gershgorin ist 0 kein Eigenwert von A. $\square$

Beispiel 18.86.

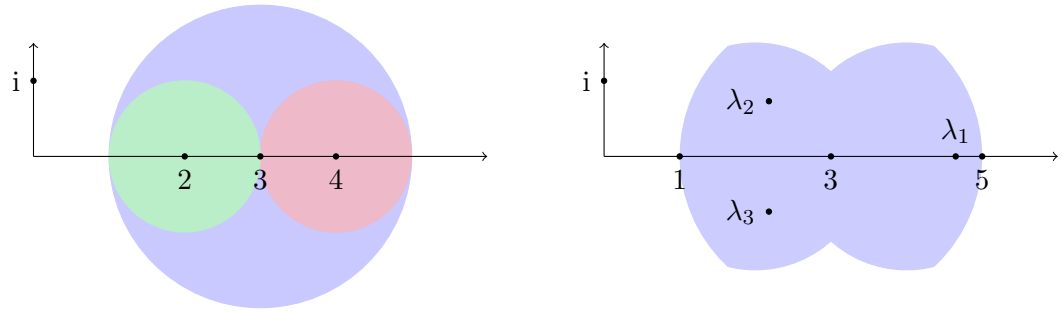
(a) Jeder Eigenwert liegt in einem der abgebildeten Kreise:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0.5 & 4 & 1 \\ 1.5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



[12] Diese Eigenschaft heißt *Diagonal-Dominanz*.

Da A und A^{t} die gleichen Eigenwerte besitzen, kann man auch die Spalten benutzen und anschließend beide Mengen schneiden:



(b) Wendet man Satz 18.84 auf die Begleitmatrix von $\alpha = X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n \in \mathbb{C}[X]$ an, so erhält man

$$|x| \leq \max\bigl\{|a_n|, |a_{n-1}| + 1, \ldots, |a_1| + 1\bigr\}$$

für jede Nullstelle $x \in \mathbb{C}$ von α (beachte $|x + a_1| \leq 1 \Longrightarrow |x| \leq |a_1| + 1$).

18.7 Orthonormalisierung

Bemerkung 18.87. In unserer Formulierung des Gram-Schmidt-Verfahrens (11.10) haben wir zunächst eine Orthogonalbasis konstruiert und anschließend durch Normierung eine Orthonormalbasis erhalten. Dadurch können jedoch sehr große oder sehr kleine Faktoren auftreten, die zu numerischen Instabilitäten führen. Günstiger ist es also, jeden gefundenen Vektor sofort zu normieren:

$$b'_s := v_s - \sum_{i=1}^{s-1} [v_s, b_i] b_i, \qquad b_s := \frac{b'_s}{|b'_s|}$$

In der Summenbildung können sich zusätzlich Rundungsfehler akkumulieren. Stabiler ist daher ein iteriertes Vorgehen.

Satz 18.88 (Modifiziertes Gram-Schmidt-Verfahren)**.** *Sei V ein unitärer Raum und $v_1, \ldots, v_k \in V$ linear unabhängig. Für $s = 1, \ldots, k$ definieren wir*

$$b_{s,0} := v_s, \qquad b_{s,i} := b_{s,i-1} - [b_{s,i-1}, b_i] b_i \quad (i = 1, \ldots, s-1), \qquad b_s := \frac{b_{s,s-1}}{|b_{s,s-1}|}.$$

Dann ist $b_1, \ldots, b_k$ eine Orthonormalbasis von $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die Vektoren $b_1, \ldots, b_k$ mit den in Satz 11.10 gewonnenen Vektoren übereinstimmen. Dies ist klar für $b_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$. Sei $s \geq 2$ und die Behauptung für $b_1, \ldots, b_{s-1}$ bereits gezeigt. Dann ist $b_{s,1} = v_s - [v_s, b_1] b_1$. Induktiv sei bereits

$$b_{s,i} = v_s - \sum_{j=1}^{i} [v_s, b_j] b_j$$

für ein $i < s - 1$ gezeigt. Wegen $[b_j, b_{i+1}] = 0$ für $j \leq i$ ist

$$b_{s,i+1} = v_s - \sum_{j=1}^{i} [v_s, b_j] b_j - [v_s, b_{i+1}] b_{i+1} = v_s - \sum_{j=1}^{i+1} [v_s, b_j] b_j.$$

Dies zeigt, dass $b_{s,s-1}$ der in Satz 11.10 berechnete Vektor ist (vor Normierung). □

Bemerkung 18.89. Bei der Berechnung der QR-Zerlegung einer invertierbaren Matrix $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ benötigt man neben den orthonormalisierten Spalten von A (als Spalten von Q) auch die Koeffizientenmatrix R. Dafür gibt es zwei gängige Methoden, die wir für reelle A vorstellen (siehe Aufgabe III.15 für den allgemeinen Fall):

(a) Wir führen die Orthonormalisierung als Komposition von Spiegelungen durch. Sei dafür a_1 die erste Spalte von A und $b := a_1 - |a_1|e_1$. Die Spiegelung $Q_1 \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ an der Hyperebene $\langle b \rangle^\perp$ lässt sich nach Aufgabe II.13 als HOUSEHOLDER-*Transformation* berechnen:

$$Q_1 = 1_n - \frac{2}{|b|^2} bb^{\mathrm{t}}$$

(für $b = 0$ sei $Q_1 = 1_n$). Wegen

$$[a_1 + |a_1|e_1, b] = |a_1|^2 - |a_1|[a_1, e_1] + |a_1|[e_1, a_1] - |a_1|^2 = 0$$

ist $a_1 + |a_1|e_1 \in \langle b \rangle^\perp$ und

$$Q_1 a_1 = \frac{1}{2}\big(Q_1 b + Q_1(a_1 + |a_1|e_1)\big) = \frac{1}{2}\big(-b + a_1 + |a_1|e_1\big) = |a_1|e_1.$$

Es folgt $Q_1 A = \left(\begin{smallmatrix} |a_1| & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$. Mit den Spalten $2, \ldots, n$ geht man analog vor und erhält entsprechende Matrizen $Q_2, \ldots, Q_n \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ (tatsächlich reicht es, die verkürzten Spalten $(a_{ii}, \ldots, a_{ni})^{\mathrm{t}}$ zu betrachten). Jetzt ist $R := Q_n \ldots Q_1 A$ eine obere Dreiecksmatrix und $Q := Q_1 \ldots Q_n \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ mit $A = QR$, denn $Q_i^{-1} = Q_i$.

(b) Anstelle von Spiegelungen kann man GIVENS-*Rotationen* benutzen (vgl. Bemerkung 11.43):

$$D_{st}(\varphi) := \begin{pmatrix} 1_{s-1} & & & & \\ & \cos\varphi & & -\sin\varphi & \\ & & 1_{t-s-1} & & \\ & \sin\varphi & & \cos\varphi & \\ & & & & 1_{n-t} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R}).$$

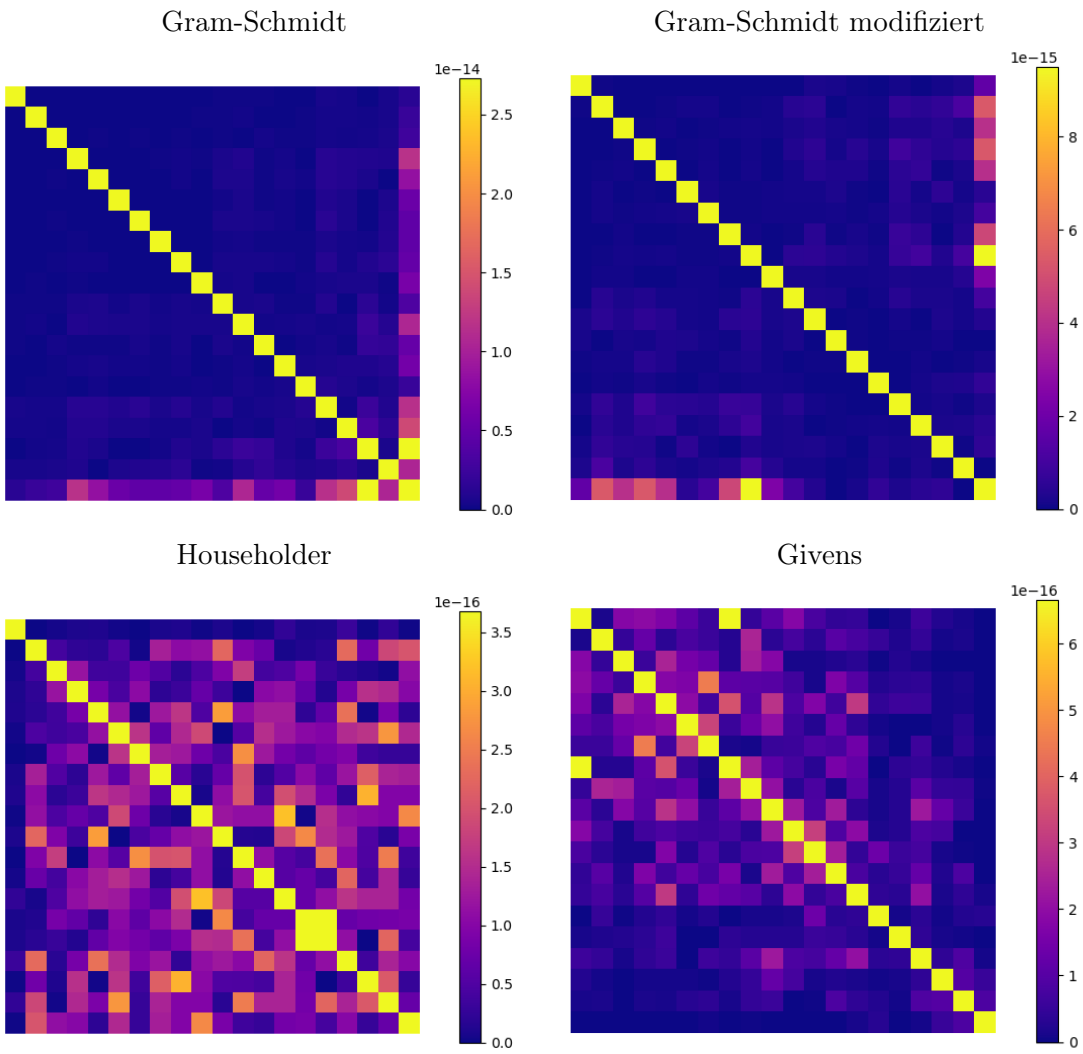
Wir gehen wie beim Gauß-Algorithmus vor. Angenommen die ersten $k-1$ Spalten von A sind bereits in oberer Dreiecksgestalt. Nach Zeilenvertauschung kann man $a_{kk} \neq 0$ annehmen (A invertierbar). Um den Eintrag a_{ik} für $i > k$ zu eliminieren, sei φ der orientierte Winkel von (a_{kk}, a_{ik}) nach e_1 (siehe Beispiel 11.22). Für $c := |(a_{kk}, a_{ik})| = \sqrt{|a_{kk}|^2 + |a_{ik}|^2}$ gilt

$$D_{ki}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1_{k-1} & & & & \\ & a_{kk}/c & & a_{ik}/c & \\ & & 1_{i-k-1} & & \\ & -a_{ik}/c & & a_{kk}/c & \\ & & & & 1_{n-i} \end{pmatrix}.$$

Indem man A durch $D_{ki}(\varphi)A$ ersetzt, wird $a_{ik} = 0$. Auf diese Weise erhält man eine Folge von Givens-Rotationen $Q_1, \ldots, Q_l \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, sodass $R := Q_l \ldots Q_1 A$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Für $Q := Q_1^{\mathrm{t}} \ldots Q_l^{\mathrm{t}} \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ gilt $A = QR$. Dies benötigt zwar deutlich mehr Matrizen als (a), aber die Q_i sind dünn-besetzt, sodass die Multiplikationen wenig kosten.

Beispiel 18.90. Wir berechnen die QR-Zerlegung $A = QR$ einer zufälligen (invertierbaren) Matrix $A \in \mathbb{R}^{20 \times 20}$ mit den vier vorgestellten Verfahren. Die Qualität der Ergebnisse zeigt sich durch einen

Vergleich von Q^tQ mit 1_{20}. Die Farbskala bezieht sich auf die Beträge der Einträge außerhalb der Hauptdiagonale (je kleiner, desto genauer):



19 Analytische Aspekte

19.1 Eigenwertabschätzungen

Bemerkung 19.1. Eine hermitesche Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hat nach Folgerung 13.20 reelle Eigenwerte $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Wir schreiben $\lambda_k(A) := \lambda_k$ für den k. größten Eigenwert. Der folgende *Min-Max-Satz* setzt diese Zahlen in Zusammenhang mit den sogenannten RAYLEIGH-*Quotienten* $\frac{vAv^*}{vv^*}$ und verallgemeinert Lemma 18.55.

Satz 19.2 (COURANT-FISCHER)**.** *Für jede hermitesche Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt*

$$\lambda_k(A) = \max_{\substack{V\leq\mathbb{C}^n \\ \dim V=k}} \min_{0\neq v\in V} \frac{vAv^*}{vv^*} = \min_{\substack{V\leq\mathbb{C}^n \\ \dim V=n-k+1}} \max_{0\neq v\in V} \frac{vAv^*}{vv^*}.$$

Beweis. Sei $\mu_k(A)$ der mittlere Teil der Formel. Nach dem Spektralsatz existiert ein $S \in \mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ mit $SAS^* = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ und $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Indem man $V \leq \mathbb{C}^n$ durch $\{vS : v \in V\}$ ersetzt, kann man $A = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ annehmen. Außerdem kann man sich auf normierte $v \in V$ beschränken, indem man v durch $v/|v|$ ersetzt. Für $V := \langle e_1,\ldots,e_k\rangle$ gilt

$$\mu_k(A) \geq \min_{\substack{v\in V \\ |v|=1}} vAv^* = \min_{\substack{v\in V \\ |v|=1}} \sum_{i=1}^{k} \lambda_k|v_k|^2 \geq \min_{|v|=1} \lambda_k|v|^2 = \lambda_k.$$

Sei umgekehrt $V \leq \mathbb{C}^n$ mit $\dim V = k$ beliebig. Nach der Dimensionsformel existiert ein normierter Vektor $w \in V \cap \langle e_k,\ldots,e_n\rangle$. Es folgt

$$\min_{\substack{v\in V \\ |v|=1}} vAv^* \leq wAw^* = \sum_{i=k}^{n} \lambda_i|w_i|^2 \leq \lambda_k.$$

Da V beliebig ist, gilt $\mu_k(A) \leq \lambda_k = \lambda_k(A)$. Für die zweite Gleichheit betrachtet man analog $V := \langle e_k,\ldots,e_n\rangle$ und $V \cap \langle e_1,\ldots,e_k\rangle$. □

Satz 19.3 (CAUCHYS Reißverschluss-Satz)**.** *Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch und $P \in \mathbb{C}^{n\times k}$ mit orthonormalen Spalten ($k \leq n$). Dann gilt $\lambda_i(A) \geq \lambda_i(P^*AP) \geq \lambda_{n-k+i}(A)$ für $i = 1,\ldots,k$.*

Beweis. Mit A ist auch $B := P^*AP \in \mathbb{C}^{k\times k}$ hermitesch. Für $U \leq \mathbb{C}^k$ sei $P(U) := \{uP^* : u \in U\} \leq \mathbb{C}^n$. Da P vollen Rang hat, gilt $\dim U = \dim P(U)$. Außerdem ist $|uP^*| = |u|$ für alle $u \in U$. Nach Courant-Fischer folgt

$$\lambda_i(B) = \max_{\substack{U\leq\mathbb{C}^k \\ \dim U=i}} \min_{\substack{v\in P(U) \\ |v|=1}} vAv^* \leq \max_{\substack{V\leq\mathbb{C}^n \\ \dim V=i}} \min_{\substack{v\in V \\ |v|=1}} vAv^* = \lambda_i(A).$$

Sei b_j ein Eigenvektor von B zum Eigenwert $\lambda_j(B)$ und $U := \langle b_i, \ldots, b_k \rangle$. Dann gilt

$$\lambda_{n-k+i}(A) = \min_{\substack{V \leq \mathbb{C}^n \\ \dim V = k-i+1}} \max_{\substack{v \in V \\ |v|=1}} vAv^* \leq \max_{\substack{v \in P(U) \\ |v|=1}} vAv^* = \max_{\substack{u \in U \\ |u|=1}} uBu^* = \lambda_i(B)$$

wie im Beweis von Satz 19.2. □

Beispiel 19.4. Für $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ hat $P = (e_i : i \in I)$ orthonormale Spalten. Cauchys Reißverschluss-Satz gilt dann mit der Untermatrix $B := P^*AP = (a_{ij} : i, j \in I)$. Im Fall $|I| = n - 1$ erhält man

$$\lambda_1(A) \geq \lambda_1(B) \geq \lambda_2(A) \geq \lambda_2(B) \geq \ldots \geq \lambda_{n-1}(B) \geq \lambda_n(A).$$

19.2 Der Spektralradius

Definition 19.5. Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt

$$\rho(A) := \max\big\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{C} \text{ Eigenwert von } A\big\}$$

der *Spektralradius* von A.[1]

Beispiel 19.6.

(a) Für unitäre Matrizen A gilt $\rho(A) = 1$.

(b) Genau dann ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nilpotent, wenn $\rho(A) = 0$.

(c) Aus der Jordan-Normalform folgt $\rho(A^{\mathrm{t}}) = \rho(A)$ und $\rho(A^k) = \rho(A)^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

Satz 19.7. *Für alle $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt:*

(a) $\|A\| \geq \rho(A)$ für jede submultiplikative Matrixnorm.

(b) Für alle $\epsilon > 0$ existiert eine submultiplikative Matrixnorm mit $\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon$.

Beweis.

(a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A mit Betrag $\rho(A)$ und v ein entsprechender Eigenvektor. Sei $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit erster Spalte v und sonst nur Nullen. Dann gilt

$$\rho(A)\|B\| = \|\lambda B\| = \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

und $\rho(A) \leq \|A\|$.

(b) Sei $J = S^{-1}AS$ die Jordan-Normalform von A mit $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Sei $D := \mathrm{diag}(\epsilon, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^n)$. Die Hauptdiagonalen von $N := DJD^{-1}$ und J sind identisch, während die Einträge unterhalb der Hauptdiagonale ϵ oder 0 sind. Für die Matrixnorm $\|B\| := \|DS^{-1}BSD^{-1}\|_1$ gilt nun $\|A\| := \|N\|_1 \leq \rho(A) + \epsilon$ nach Lemma 18.62. □

Satz 19.8 (Geometrische Reihe[2])**.** *Für alle $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) $\rho(A) < 1$.

[1] Alle Eigenwerte liegen in der komplexen Ebene innerhalb des Kreises mit Mittelpunkt 0 und *Radius* $\rho(A)$.
[2] In diesem Kontext auch Neumann-*Reihe* genannt.

(2) $\lim_{k\to\infty} A^k = 0_n$.

(3) $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (1_n - A)^{-1}$.

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei $\epsilon > 0$ mit $q := \rho(A) + \epsilon < 1$. Nach Satz 19.7 existiert eine submultiplikative Matrixnorm mit $\|A\| \leq q$. Es folgt $\|A^k\| \leq \|A\|^k \leq q^k \to 0$ mit $k \to \infty$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Sei λ ein Eigenwert von A mit Betrag $\rho(A)$ mit Eigenvektor v. Wegen $\lambda^k v = A^k v \to 0$ ist $\rho(A) = |\lambda| < 1$.

(1) $\Rightarrow$ (3): Wie zuvor existiert eine submultiplikative Matrixnorm mit $q := \|A\| < 1$. Sei $B_m := \sum_{k=0}^{m} A^k$. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$\|B_m\| \leq \sum_{k=0}^{m} q^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Nach Bolzano-Weierstraß besitzt die beschränkte Folge $(B_m)_m$ eine konvergente Teilfolge $(B_{m_k})_k$. Für $B := \lim_{k\to\infty} B_{m_k}$ gilt

$$(1_n - A)B = \lim_{k\to\infty} (1_n - A) \sum_{i=0}^{m_k} A^i = \lim_{k\to\infty} (1_n - A^{m_k+1}) \overset{(2)}{=} 1_n,$$

d. h. $B = (1_n - A)^{-1}$. Da alle konvergenten Teilfolgen von (B_m) den gleichen Grenzwert besitzen, muss auch die gesamte Folge gegen B konvergieren.

(3) $\Rightarrow$ (2): Da die Partialsummen B_m konvergieren, müssen deren Differenzen $B_m - B_{m-1} = A^m$ eine Nullfolge bilden. □

Folgerung 19.9. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\|A\| < 1$ für eine submultiplikative Matrixnorm. Dann gilt $\sum_{k=0}^{n} A^k = (1_n - A)^{-1}$.*

Beweis. Aus Satz 19.7 folgt $\rho(A) < 1$. □

Beispiel 19.10. Die Submultiplikativität in Folgerung 19.9 ist unentbehrlich: Für $A = (3/4)_{i,j=1}^{2}$ gilt $\|A\|_{\max} = 3/4 < 1$ mit der Matrixnorm aus Beispiel 18.61, aber $A^k = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} A$.

Satz 19.11. *Für jede Matrixnorm $\|.\|$ und alle $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt*

$$\boxed{\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|A^k\|}.}$$

Beweis. Für eine beliebige (nicht unbedingt submultiplikative) Matrixnorm $\|.\|'$ existieren nach Lemma 18.51 Konstanten $\lambda, \mu > 0$ mit $\lambda\|A^k\| \leq \|A^k\|' \leq \mu\|A^k\|$ für alle k. Es folgt

$$\sqrt[k]{\lambda}\sqrt[k]{\|A^k\|} \leq \sqrt[k]{\|A^k\|'} \leq \sqrt[k]{\mu}\sqrt[k]{\|A^k\|}.$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\lambda} = 1 = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\mu}$ genügt es, die Aussage für eine bestimmte Matrixnorm zu beweisen. Sei

$$S^{-1}AS = \operatorname{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), \ldots, J_{n_s}(\lambda_s))$$

die Jordan-Normalform von A mit $S \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Wir definieren $\|B\| := \|S^{-1}BS\|_{\max}$ für $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit der Norm aus Beispiel 18.61. Jeder von 0 verschiedene Eintrag von A^k hat nach Lemma 14.41 die Form $\binom{k}{l}\lambda_i^{k-l}$ mit $1 \le i \le s$ und $0 \le l \le n-1$. Für jedes $\epsilon > 0$ gilt $k < (1+\epsilon)^k$, wenn k groß genug ist. Es folgt

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\binom{k}{l}|\lambda_i|^{k-l}} = |\lambda_i| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k(k-1)\dots(k-l+1)} \lim_{k\to\infty} |\lambda_i|^{-l/k} = |\lambda_i|.$$

Dies zeigt $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|A^k\|} = \rho(A)$. □

19.3 Die Exponentialfunktion einer Matrix

Definition 19.12. Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sei

$$\exp A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

die *Exponentialfunktion* von A.

Bemerkung 19.13.

(a) Wegen $\left|\frac{A^k}{k!}\right| \le \frac{|A|^k}{k!} \to 0$ ist $\exp A$ nach Satz 19.8 wohldefiniert.

(b) Durch $\exp(\lambda 1_n) = e^\lambda 1_n$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ setzt exp die gewöhnliche Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$ fort.

(c) Sei

$$J := S^{-1}AS = \mathrm{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), \dots, J_{n_s}(\lambda_s))$$

die Jordan-Normalform von A mit $S \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Wegen der Stetigkeit der Matrizenmultiplikation gilt

$$S^{-1}\exp(A)S = \exp J = \mathrm{diag}\big(\exp J_{n_1}(\lambda_1), \dots, \exp J_{n_s}(\lambda_s)\big).$$

Nach Lemma 14.41 haben die von 0 verschiedenen Einträge von $\exp(J_{n_i}(\lambda_i))$ die Form

$$\sum_{k=l}^{\infty} \frac{\binom{k}{l}\lambda_i^{k-l}}{k!} = \sum_{k=l}^{\infty} \frac{\lambda_i^{k-l}}{l!(k-l)!} = \frac{e^{\lambda_i}}{l!}.$$

Also gilt

$$L_m(\lambda) := \exp(J_m(\lambda)) = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{1!} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{1}{(m-1)!} & \cdots & \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times m}$$

und

$$\exp A = S\,\mathrm{diag}\big(L_{n_1}(\lambda_1), \dots, L_{n_s}(\lambda_s)\big)S^{-1}.$$

Beispiel 19.14.

(a) Für die Permutationsmatrix $P = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ gilt

$$\exp P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} 1_n + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} P = \begin{pmatrix} \cosh(1) & \sinh(1) \\ \sinh(1) & \cosh(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.54\dots & 1.17\dots \\ 1.17\dots & 1.54\dots \end{pmatrix}$$

mit den hyperbolischen Winkelfunktionen.

(b) Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -5-\mathrm{i} & -\mathrm{i} & -1 \\ -9 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 14.34 gilt

$$\exp A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\mathrm{i}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4e^2 & 0 & e^2 \\ -4e^2 + e^{-\mathrm{i}} & e^{-\mathrm{i}} & -e^2 \\ -9e^2 & 0 & -2e^2 \end{pmatrix}.$$

(c) Nach Bemerkung 19.13 gilt $\exp A = 1_n$ genau dann, wenn A diagonalisierbar ist und die Eigenwerte ganzzahlige Vielfache von $2\pi\mathrm{i}$ sind.

Satz 19.15 (Jacobi). *Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt* $\boxed{\det(\exp A) = e^{\operatorname{tr} A}.}$

Beweis. O. B. d. A. sei A in Jordan-Normalform mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Dann ist $\exp A$ eine untere Dreiecksmatrix mit Diagonale $(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$. Dies zeigt $\det(\exp A) = e^{\lambda_1+\dots+\lambda_n} = e^{\operatorname{tr} A}$. □

Beispiel 19.16. Ist A reell, so ist $\det(\exp A) > 0$.

Satz 19.17 (Funktionalgleichung). *Für vertauschbare Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt*

$$\boxed{\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B).}$$

Insbesondere ist $\exp A$ *invertierbar mit* $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Beweis. Wir benutzen die Jordan-Chevalley-Zerlegung $A = D_A + N_A$ und $B = D_B + N_B$ aus Folgerung 16.21.[3] Da alle beteiligten Matrizen Polynome in A bzw. B sind, sind sie paarweise vertauschbar. Nach Lemma 14.11 lassen sich D_A und D_B simultan diagonalisieren. O. B. d. A. sei also $D_A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und $D_B = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Sei $D := D_A + D_B$ und $N := N_A + N_B$. Aus der Funktionalgleichung der gewöhnlichen Exponentialfunktion erhält man

$$\exp D = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1+\mu_1}, \dots, e^{\lambda_n+\mu_n}) = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \operatorname{diag}(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_n}) = \exp(D_A)\exp(D_B).$$

Da N_A und N_B nilpotent sind, gilt

$$\exp N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(N_A + N_B)^k = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{k!} \binom{k}{l} N_A^l N_B^{k-l} = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{l=0}^{k} \frac{N_A^l}{l!} \frac{N_B^{k-l}}{(k-l)!} = \exp(N_A)\exp(N_B).$$

Analog ist

$$\exp(D+N) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{D^{k-l}}{(k-l)!} \frac{N^l}{l!} = \sum_{l=0}^{n} \frac{N^l}{l!} \sum_{k=l}^{\infty} \frac{D^{k-l}}{(k-l)!} = \exp(N)\exp(D).$$

Die entsprechenden Gleichungen gelten auch für $D_A + N_A$ und $D_B + N_B$. Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} \exp(A+B) &= \exp(D+N) = \exp(D)\exp(N) = \exp(D_A)\exp(D_B)\exp(N_A)\exp(N_B) \\ &= \exp(D_A)\exp(N_A)\exp(D_B)\exp(N_B) = \exp(A)\exp(B). \end{aligned}$$

Die zweite Behauptung folgt aus $\exp(A)\exp(-A) = \exp(A-A) = \exp 0_n = 1_n$. □

[3] Das lässt sich vermeiden, indem man stattdessen das Cauchy-Produkt für absolut konvergente Matrix-Reihen benutzt.

Bemerkung 19.18.

(a) Auf die Vertauschbarkeit von A und B in der Funktionalgleichung kann nicht verzichtet werden, denn sonst wäre $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B) = \exp(B+A) = \exp(B)\exp(A)$ für alle A, B im Widerspruch zu Satz 19.19. Tatsächlich gilt die GOLDEN-THOMPSON-*Ungleichung*

$$|\exp(A+B)| \leq |\exp(A)\exp(B)|$$

für alle hermiteschen Matrizen A, B mit Gleichheit genau dann, wenn $AB = BA$ (ohne Beweis).

(b) Bekanntlich lässt sich jedes $z \in \mathbb{C}^\times$ eindeutig in der Form $|z|e^{\varphi \mathrm{i}}$ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$ schreiben. Die Abbildung $\log\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \ln(|z|) + \varphi\mathrm{i}$ nennt man den *Hauptzweig des natürlichen Logarithmus*.

Satz 19.19. *Für jedes $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ existiert genau ein $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\exp B = A$ und $-\pi < \mathrm{Im}(\lambda) \leq \pi$ für jeden Eigenwert λ von B.*

Beweis. Für die Existenz können wir nach Bemerkung 19.13 $A = J_n(\mu)$ für ein $\mu \neq 0$ annehmen. Sei $\lambda = \log(\mu)$ und $B := J_n(\lambda)$. Nach Bemerkung 19.13 ist μ ein Eigenwert von $\exp B = L_n(\lambda)$ mit algebraischer Vielfachheit n und geometrischer Vielfachheit 1. Aus Satz 14.28 folgt $\exp B \approx A$. Daher existiert ein $S \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ mit $\exp(S^{-1}BS) = S^{-1}\exp(B)S = A$.

Sei nun $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ beliebig und B, C mit den angegebenen Eigenschaften. Nach Basiswechsel können wir $B = \mathrm{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), \ldots, J_{n_s}(\lambda_s))$ annehmen. Nach Bemerkung 19.13 ist

$$A = \exp B = \mathrm{diag}(L_{n_1}(\lambda_1), \ldots, L_{n_s}(\lambda_s)).$$

Durch die spezielle Wahl der Eigenwerte mit dem Hauptzweig des Logarithmus muss C die gleiche Jordan-Normalform wie B haben. Sei also $S \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ mit $S^{-1}BS = C$. Aus

$$A = \exp C = S^{-1}\exp(B)S = S^{-1}AS$$

folgt $S \in \mathrm{C}(A)$. Wir müssen $S \in \mathrm{C}(B)$ zeigen. Offenbar ist $\chi_A = (X - e^{\lambda_1})^{n_1} \ldots (X - e^{\lambda_s})^{n_s}$. O. B. d. A. seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ so sortiert, dass gleiche λ_i hintereinanderstehen. Nach Aufgabe II.34 ist $C = \mathrm{diag}(C_1, \ldots, C_t)$, wobei jedes C_k zu einem Block $\mathrm{diag}(L_{n_i}(\lambda_i), \ldots, L_{n_j}(\lambda_j))$ mit $\lambda_i = \ldots = \lambda_j$ gehört. Wir können daher $\lambda_1 = \ldots = \lambda_s$ mit $n_1 \geq \ldots \geq n_s$ annehmen. Nun ist A eine Linearkombination der Potenzen von $J := \mathrm{diag}(J_{n_1}(0), \ldots, J_{n_s}(0))$. Insbesondere ist $\mathrm{C}(J) \subseteq \mathrm{C}(A)$. Nach Frobenius (Satz 15.32) ist

$$\dim \mathrm{C}(A) = \sum_{i=1}^{s} (2i-1)n_i = \dim \mathrm{C}(J).$$

Es folgt $\mathrm{C}(J) = \mathrm{C}(A)$. Andererseits ist auch B eine Linearkombination von J. Dies zeigt $S \in \mathrm{C}(A) = \mathrm{C}(J) \subseteq \mathrm{C}(B)$, wie gewünscht. □

Beispiel 19.20. Die Eigenwerte einer unitären Matrix U lassen sich nach Folgerung 13.20 in der Form $e^{\varphi_1 \mathrm{i}}, \ldots, e^{\varphi_n \mathrm{i}}$ mit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathbb{R}$ schreiben. Nach dem Spektralsatz existiert ein $S \in \mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ mit $U = S\,\mathrm{diag}(e^{\varphi_1 \mathrm{i}}, \ldots, e^{\varphi_n \mathrm{i}})S^*$. Für die hermitesche Matrix $H := S\,\mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)S^*$ gilt

$$U = \exp(H\mathrm{i}).$$

Dieser Zusammenhang spielt in der Quantenmechanik eine Rolle. Verzichtet man auf die spezielle Wahl der Eigenwerte in Satz 19.19, so kann man $\varphi_1, \ldots, \varphi_n > 0$ wählen. Dann ist H sogar positiv definit.

Bemerkung 19.21.

(a) In der Analysis kann man $\ln(1-x)$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ durch die *Mercator-Reihe*

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$$

berechnen. Für $\rho(A) < 1$ konvergiert nach Satz 19.11 auch die entsprechende Reihe mit A anstelle von x. Ist A nilpotent (d. h. $\rho(A) = 0$), so bricht die Reihe nach $n-1$ Summanden ab. Ggf. ist $B := \log(1-A)$ die eindeutig bestimmte Matrix aus Satz 19.19 (Aufgabe III.19).

(b) Ein System von gewöhnlichen homogenen *Differentialgleichungen* erster Ordnung hat die Form $f'(t) = Af(t)$, wobei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Funktion mit Ableitung f' ist und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Man kann zeigen, dass bei gegebenem A alle Lösungen f die Form $f(t) = \exp(At)c$ mit $c \in \mathbb{R}^n$ haben (beachte: $t \in \mathbb{R}$). Das ist eine Verallgemeinerung der bekannten Ableitungsregel $(e^{at})' = ae^{at}$.

19.4 Nicht-negative Matrizen

Bemerkung 19.22. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung und anderen praxisnahen Gebieten treten reelle Matrizen mit lauter nicht-negativen Einträgen auf. Wir zeigen, dass die Eigenwerte und Eigenvektoren solcher Matrizen eine besondere Struktur aufweisen. Dies ist die theoretische Grundlage wichtiger Anwendungen wie des Google-Suchalgorithmus.

Definition 19.23. Man nennt $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$

- *positiv* (bzw. *nicht-negativ*), falls $a_{ij} > 0$ (bzw. $a_{ij} \geq 0$) für alle i, j gilt.
- *zerlegbar*, falls $n = m$ und $\varnothing \neq I \subsetneq \{1, \ldots, n\}$ mit $a_{ij} = 0$ für alle $i \in I$ und $j \notin I$ existiert.
- *unzerlegbar*, falls $n = m$ und A nicht zerlegbar ist.

Wir schreiben $A < B$ (bzw. $A \leq B$), falls $B - A$ positiv (bzw. nicht-negativ) ist. Außerdem sei $A_+ := (|a_{ij}|)_{ij}$.

Bemerkung 19.24. Man sieht leicht, dass $\leq$ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}^{n\times m}$ definiert. Wir benutzen die Notation $v \geq w$ und v_+ auch für Vektoren v, w (aufgefasst als $n \times 1$- oder $1 \times n$-Matrizen). Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ ist $\leq$ auf $\mathbb{R}^{n\times m}$ nicht total. Zum Beispiel ist weder $(1, -1) \leq 0$ noch $(1, -1) \geq 0$.

Beispiel 19.25.

(a) In der Stochastik untersucht man die langfristige Entwicklung zufälliger Ereignisse mittels *Markov-Ketten*. Im einfachsten Fall besteht eine Markov-Kette aus Zuständen $Z_1, \ldots, Z_n$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Übergang von Z_i zu Z_j stattfindet, sei w_{ij}. Man nennt $W = (w_{ij})$ die *Übergangsmatrix* der Markov-Kette. Startet der Prozess in Z_i, so beschreibt der Vektor $e_i W^k$ die Zustandswahrscheinlichkeiten nach k Zeiteinheiten. Man interessiert sich daher für $\lim_{k\to\infty} W^k$. Offenbar ist W nicht-negativ und jede Zeilensumme ist 1. Matrizen mit dieser Eigenschaft nennt man (Zeilen-)*stochastisch*. Offenbar ist $v = (1, \ldots, 1)^{\mathrm{t}}$ ein Eigenvektor von W zum Eigenwert 1. Nach Aufgabe III.20 ist auch W^k für $k \geq 0$ stochastisch. Aus Lemma 18.62 und Satz 19.11 folgt

$$\rho(W) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|W^k\|_\infty} = 1.$$

(b) Offenbar ist jede positive Matrix unzerlegbar.

(c) Eine Permutationsmatrix $P_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)})$ ist genau dann unzerlegbar, wenn $\sigma \in S_n$ ein n-Zyklus ist. Denn ist $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ die Menge der Ziffern eines Zyklus von σ, so gilt $\delta_{i\sigma(j)} = 0$ für alle $i \in I$ und $j \notin I$.

(d) Für jede reduzible Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ existiert eine Permutationsmatrix P und $1 \leq k < n$ mit $PAP^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0_{k\times(n-k)} & A_3 \end{pmatrix}$.

(e) Mit A ist auch A^{t} unzerlegbar.

Satz 19.26 (Perron)**.** *Für jede nicht-negative Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist $\rho(A)$ ein Eigenwert mit einem nicht-negativen Eigenvektor.*

Beweis.
Schritt 1: $\rho(A)$ ist ein Eigenwert von A.
Im Fall $\rho(A) = 0$ ist $\rho(A)$ ein Eigenwert. Sei also $\rho(A) > 0$. Indem man A durch $\rho(A)^{-1}A \geq 0$ ersetzt, kann man $\rho(A) = 1$ annehmen. Für $0 < t < 1$ und $m \in \mathbb{N}$ ist $\rho(tA) = t < 1$ und

$$(1 - tA)^{-1} \overset{19.8}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (tA)^k \geq 1_n + tA + \ldots + (tA)^m.$$

Ist 1 kein Eigenwert von A, so ist $1 - A$ invertierbar und es gilt

$$(1 - A)^{-1} = (\lim_{t\to 1^-}(1 - tA))^{-1} = \lim_{t\to 1^-}(1 - tA)^{-1} \geq \lim_{t\to 1^-}(1_n + tA + \ldots + (tA)^m) = 1_n + A + \ldots + A^m$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $\lim_{m\to\infty} A^m = 0$ im Widerspruch zu Satz 19.8.

Schritt 2: Jede positive Matrix A besitzt einen positiven Eigenvektor zum Eigenwert $\rho(A)$.[4]
Wie oben können wir $\rho(A) = 1$ annehmen. Sei $v = (v_1, \ldots, v_n)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A. Dann ist

$$v_+ = (Av)_+ \leq A_+v_+ = Av_+,$$

also $w := (A - 1_n)v_+ \geq 0$. Im Fall $w = 0$ ist $v_+ = Av_+ > 0$ ein positiver Eigenvektor von A. Sei nun $w \neq 0$. Dann ist $Aw > 0$ wegen $A > 0$. Daher existiert ein $\epsilon > 0$ mit $Aw \geq \epsilon Av_+$. Für $z := Av_+ > 0$ gilt

$$(A - 1_n)z = A(A - 1_n)v_+ = Aw \geq \epsilon z,$$

also $Az \geq (1 + \epsilon)z$. Für $B := (1 + \epsilon)^{-1}A$ folgt $Bz \geq z$ und $B^k z \geq z$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Andererseits ist $\rho(B) = (1 + \epsilon)^{-1}\rho(A) < 1$ und $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$ nach Satz 19.8. Widerspruch.

Schritt 3: Jede nicht-negative Matrix A besitzt einen nicht-negativen Eigenvektor zum Eigenwert $\rho(A)$.
Für $k \in \mathbb{N}$ sei $A_k := A + \frac{1}{k}J > 0$, wobei $J = (1)_{i,j=1}^n$. Sicher ist $A_1 > A_2 > \ldots > A$ und $A_1^m > A_2^m > \ldots > A^m$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Aus Satz 19.11 (angewendet beispielsweise mit der euklidischen Norm) folgt $\rho(A_1) \geq \rho(A_2) \geq \ldots \geq \rho(A)$. Insbesondere existiert

$$\mu := \lim_{k\to\infty} \rho(A_k) \geq \rho(A).$$

[4] Das hat Perron ursprünglich bewiesen.

Nach Schritt 2 existieren positive Eigenvektoren v_k von A_k zum Eigenwert $\rho(A_k)$. Nach Normierung gilt $|v_k| = 1$. Nach Bolzano-Weierstraß besitzt $(v_k)_k$ eine konvergente Teilfolge. O. B. d. A. sei also $v := \lim_{k\to\infty} v_k \geq 0$. Wegen $|v| = 1$ ist $v \neq 0$. Außerdem gilt

$$Av = \lim_{k\to\infty} A_k \lim_{k\to\infty} v_k = \lim_{k\to\infty} A_k v_k = \lim_{k\to\infty} \rho(A_k) v_k = \mu v.$$

Wegen $\mu \geq \rho(A)$ folgt $\mu = \rho(A)$. □

Satz 19.27 (Perron-Frobenius)**.** *Für jede nicht-negative unzerlegbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:*

(a) Die algebraische Vielfachheit von $\rho(A)$ als Eigenwert ist 1.

(b) $E_{\rho(A)}(A) = \langle v \rangle$ mit $v > 0$.

(c) Bis auf Skalarmultiplikation ist v der einzige nicht-negative Eigenvektor von A.

Beweis.

(a,b) Nach Perron existiert ein Eigenvektor $v \geq 0$ zum Eigenwert $\rho(A)$. Sei $I := \{1 \leq i \leq n : v_i = 0\}$. Für $i \in I$ gilt

$$0 = \rho(A)v_i = (Av)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j = \sum_{j\notin I} a_{ij}v_j.$$

Dies geht nur, falls $a_{ij} = 0$ für alle $i \in I$ und $j \notin I$. Da A unzerlegbar ist, muss $I = \varnothing$ gelten, d. h. $v > 0$.

Sei nun auch $Aw = \rho(A)w$ mit $w \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $w - \lambda v \geq 0$ an mindestens einer Koordinate verschwindet. Da wir bereits gesehen haben, dass jeder nicht-negative Eigenvektor zum Eigenwert $\rho(A)$ positiv ist, folgt $w = \lambda v$. Daher ist zumindest die geometrische Vielfachheit von $\rho(A)$ gleich 1. Die Jordan-Normalform von A besitzt also nur einen Block zu $\rho(A)$. Es genügt daher

$$\operatorname{Ker}\big((A - \rho(A)1_n)^2\big) = \langle v \rangle$$

zu zeigen. Sei $w \in \operatorname{Ker}\big((A - \rho(A)1_n)^2\big)$. Wegen $(A - \rho(A)1_n)w \in \langle v \rangle$ existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $Aw - \rho(A)w = \lambda v$. Da auch A^{t} unzerlegbar ist mit $\rho(A^{\mathrm{t}}) = \rho(A)$, existiert $u > 0$ mit $A^{\mathrm{t}}u = \rho(A)u$. Es folgt

$$\lambda[v,u] = [Aw,u] - \rho(A)[w,u] = w^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}u - \rho(A)[w,u] = \rho(A)\big([w,u] - [w,u]\big) = 0.$$

Wegen $[v,u] > 0$ ist $\lambda = 0$ und $w \in \langle v \rangle$ wie gewünscht.

(c) Sei $w \geq 0$ ein beliebiger Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Wie oben folgt $v > 0$ aus der Unzerlegbarkeit von A. Wie zuvor sei $u > 0$ mit $A^{\mathrm{t}}u = \rho(A)u$. Wegen $[w,u] > 0$ und

$$\lambda[w,u] = [Aw,u] = w^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}u = \rho(A)[w,u]$$

gilt $\lambda = \rho(A)$. Also ist v bis auf Skalierung der einzige nicht-negative Eigenvektor von A. □

Bemerkung 19.28. Der nächste Satz verallgemeinert die Abschätzung $\rho(A) \leq \|A\|_\infty$ aus Satz 19.7 (setze $x = (1,\dots,1)$ und benutze Lemma 18.62).

Satz 19.29 (Collatz-Wielandt). *Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\geq 0}$ unzerlegbar und $x > 0$. Dann gilt*

$$\min\Big\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j/x_i : i = 1,\dots,n\Big\} \leq \rho(A) \leq \max\Big\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j/x_i : i = 1,\dots,n\Big\}.$$

Beweis. Sei $u > 0$ mit $A^{\mathrm{t}}u = \rho(A)u$. Sei $y_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ und $z_i := y_i/x_i$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{n}(z_j - \rho(A))x_ju_j = \sum_{j=1}^{n} y_ju_j - \sum_{j=1}^{n} x_j\sum_{k=1}^{n} a_{kj}u_k = \sum_{j=1}^{n} y_ju_j - \sum_{k=1}^{n} u_k\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = 0.$$

Wegen $x, u > 0$ existieren $1 \leq s, t \leq n$ mit $z_s \leq \rho(A)$ und $z_t \geq \rho(A)$. Also ist $\min_i z_i \leq \rho(A) \leq \max_i z_i$. □

Satz 19.30 (von Mises). *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nicht-negativ und unzerlegbar. Dann konvergiert die Folge*

$$x_{k+1} := \frac{Ax_k}{|Ax_k|} \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

für jeden positiven Startvektor $x_1 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gegen einen positiven Eigenvektor zu $\rho(A)$. Insbesondere ist $\rho(A) = \lim_{k\to\infty} |Ax_k|$.

Beweis. Nach Perron-Frobenius sind die Voraussetzungen der Potenzmethode (Satz 18.72) erfüllt. Wir müssen jedoch prüfen, dass die Iteration für *jeden* positiven Startvektor x_1 konvergiert. Seien $v, u > 0$ mit $Av = \rho(A)v$ und $A^{\mathrm{t}}u = \rho(A)u$. Wegen $[u, v] > 0$ ist $\mathbb{R}^n = \langle v\rangle \oplus u^{\perp}$. Für $x \in u^{\perp}$ gilt

$$[Ax, u] = x^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}u = \rho(A)[x, u] = 0.$$

Dies zeigt, dass $u^{\perp}$ A-invariant ist. Ergänzt man v mit Vektoren aus $u^{\perp}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^n$, so wird A in die Form $\left(\begin{smallmatrix}\rho(A) & 0\\ 0 & *\end{smallmatrix}\right)$ überführt. Wegen $[x_1, u] > 0$ gilt $x_1 \notin u^{\perp}$. Der Beweis von Satz 18.72 zeigt nun, dass die Potenzmethode für x_1 konvergiert. □

Lemma 19.31. *Sei $A \geq 0$ unzerlegbar und λ ein Eigenwert von A mit Betrag $\rho(A)$. Dann existiert eine Diagonalmatrix $U \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ mit $\rho(A)A = \lambda UAU^*$.*

Beweis. O. B. d. A. sei $\rho(A) > 0$. Sei $w \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Für $z := w_+ \geq 0$ gilt

$$\rho(A)z = (\lambda w)_+ = (Aw)_+ \leq Az.$$

Sei $u > 0$ mit $A^{\mathrm{t}}u = \rho(A)u$. Aus

$$0 < \rho(A)[z, u] \leq [Az, u] = z^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}u = \rho(A)[z, u]$$

folgt $Az = \rho(A)z$ und $z > 0$. Sei $U := \mathrm{diag}(w_1/z_1, \dots, w_n/z_n) \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$. Für $B := (b_{ij}) = \rho(A)\lambda^{-1}U^*AU \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt

$$Bz = \frac{\rho(A)}{\lambda}U^*Aw = \rho(A)U^*w = \rho(A)z = Az.$$

Da sich die Einträge von B und A nur um Faktoren vom Betrag 1 unterscheiden, gilt $B_+ = A$. Für $i = 1, \dots, n$ ist

$$(Az)_i = (Bz)_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}z_j \overset{\in\mathbb{R}}{=} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Re}(b_{ij})z_j \leq \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{Re}(b_{ij})|z_j \leq \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|z_j = (Az)_i.$$

Dies geht nur falls $B = B_+ = A$. □

Bemerkung 19.32. Man beachte, dass A und UAU^* in Lemma 19.31 die gleiche Hauptdiagonale haben. Ist also $a_{ii} \neq 0$ für ein $1 \leq i \leq n$, so ist $\rho(A)$ der einzige Eigenwert vom Betrag $\rho(A)$.

Folgerung 19.33. *Für jede positive Matrix A ist $\rho(A)$ der einzige Eigenwert vom Betrag $\rho(A)$.*

Beweis. Folgt aus Bemerkung 19.32. □

Beispiel 19.34. Wir betrachten eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix

$$W = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist W irreduzibel. Nach Bemerkung 19.32 ist $\rho(W) = 1$ der einzige Eigenwert vom Betrag 1. Nach Satz 18.68 existiert $W_\infty := \lim_{k\to\infty} W^k$. Zur Berechnung von W_∞ müssen wir nach Folgerung 18.69 Eigenvektoren von W und W^{t} bestimmen. Da W stochastisch ist, ist $v := (1,1,1)^{\mathrm{t}}$ ein Eigenvektor von W zum Eigenwert 1. Man rechnet nach, dass $w := \frac{1}{91}(18,45,28)^{\mathrm{t}}$ ein Eigenvektor von W^{t} ist mit $[v,w] = 1$. Nun gilt

$$W_\infty = vw^{\mathrm{t}} = \frac{1}{91}\begin{pmatrix} 18 & 45 & 28 \\ 18 & 45 & 28 \\ 18 & 45 & 28 \end{pmatrix}.$$

Auf lange Sicht befindet man sich also mit Wahrscheinlichkeit $\frac{18}{91} \approx 20\%$ bzw. 49%, 31% in Zustand Z_1 bzw. Z_2, Z_3.

Satz 19.35 (Wielandt)**.** *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nicht-negativ und unzerlegbar mit genau k Eigenwerten vom Betrag $\rho(A)$. Dann gilt:*

(a) Die Eigenwerte vom Betrag $\rho(A)$ sind $e^{2\pi \mathrm{i} j/k}\rho(A)$ für $j = 1,\ldots,k$, d. h. sie verteilen sich gleichmäßig auf einem Kreis in der komplexen Ebene.

(b) Ist μ ein beliebiger Eigenwert von A, so ist auch $e^{2\pi \mathrm{i}/k}\mu$ ein Eigenwert von A.

Beweis.

(a) Seien $\lambda_1\rho(A),\ldots,\lambda_k\rho(A) \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von A vom Betrag $\rho(A)$, d. h. $|\lambda_1| = \ldots = |\lambda_k| = 1$. Nach Lemma 19.31 existiert für jedes i ein $U_i \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ mit $\lambda_i A = U_i^{-1} A U_i \approx A$ (unitär wird nicht gebraucht). Ein Vergleich der Eigenwerte zeigt $\{\lambda_i\lambda_j : j = 1,\ldots,k\} = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_k\}$ für $i = 1,\ldots,k$. Es folgt

$$\lambda_i^k \prod_{j=1}^{k} \lambda_j = \prod_{j=1}^{k} (\lambda_i\lambda_j) = \prod_{j=1}^{k} \lambda_j$$

und $\lambda_i^k = 1$ für $i = 1,\ldots,k$. Daher sind $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ genau die in Beispiel 11.28 und Definition 18.6 definierten k-ten Einheitswurzeln.

(b) O. B. d. A. sei $\lambda_1 = e^{2\pi \mathrm{i}/k}$. Die Ähnlichkeit $\lambda_1 A \approx A$ zeigt, dass $\lambda_1\mu$ ein Eigenwert von A ist. □

Satz 19.36. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nicht-negativ. Dann existiert für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A vom Betrag $\rho(A)$ ein $m \leq n$ mit $\lambda^m = \rho(A)^m$.*

Beweis. Nach Beispiel 19.25 existiert eine Permutationsmatrix P, sodass

$$P^{\mathrm{t}}AP = \begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

mit quadratischen nicht-negativen unzerlegbaren Matrizen $A_1, \dots, A_k$. Jeder Eigenwert von A_i ist auch ein Eigenwert von A (man ergänze einen entsprechenden Eigenvektor mit Nullen). Da A genau n komplexe Eigenwerte hat, existiert für jeden Eigenwert λ von A ein i, sodass λ ein Eigenwert von A_i ist. Die Behauptung folgt mit Satz 19.35. □

Beispiel 19.37.

(a) Sei P_σ eine Permutationsmatrix und $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_k$ die Zerlegung in paarweise disjunkte Zyklen (einschließlich 1-Zyklen). Sei l_i die Länge von σ_i. Nach Beispiel 15.19 besitzt P die Eigenwerte

$$\zeta_{l_1}, \zeta_{l_1}^2, \dots, \zeta_{l_1}^{l_1}, \zeta_{l_2}, \dots, \zeta_{l_2}^{l_2}, \dots, \zeta_{l_k}^{l_k}$$

mit $\zeta_m = e^{2\pi \mathrm{i}/m}$ für $m \in \mathbb{N}$.

(b) Sei nun $\sigma = (1, 3, 2)$ und

$$A = a1_3 + bP_\sigma + cP_{\sigma^2} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

mit $a, b, c \geq 0$.[5] Sei $\zeta = \frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} \in \mathbb{C}$ eine 3-te Einheitswurzel. Dann ist $(1, \zeta, \zeta^2)^{\mathrm{t}}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert

$$a + \zeta b + \zeta^2 c = a - \frac{1}{2}(b + c) + \frac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}(b - c).$$

Durch geeignete Wahl von a, b, c kann man auf diese Weise jede komplexe Zahl als Eigenwert einer nicht-negativen Matrix realisieren.

Bemerkung 19.38. Nach Schur-Horn existiert für gegebene $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ stets eine positiv semidefinite reelle Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Die Bestimmung aller möglichen Eigenwertmengen von (symmetrischen) nicht-negativen Matrizen ist hingegen ein offenes Problem.

19.5 Der Page-Rang

Bemerkung 19.39. Die Suchmaschine Google weist zur Sortierung von Ergebnissen jeder Webseite w ein Gewicht zu, das misst, wie viele andere Webseiten auf w verweisen. Wir schreiben $w_i \to w_j$, falls die Webseite w_i einen Hyperlink nach w_j enthält. Sei l_i die Anzahl der (indizierten) Hyperlinks auf w_i. Man „definiert“ den PAGE-*Rang*[6] von w_i durch

$$p_i := \frac{1-d}{n} + d \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ w_j \to w_i}} \frac{p_j}{l_j}, \tag{19.1}$$

[5] Matrizen dieser Bauart nennt man *zyklisch*.

[6] Benannt nach einem der Google-Gründer Larry Page (nicht nach „web page“).

wobei n die Anzahl aller indizierten Seiten und $0 < d < 1$ ein konstanter Dämpfungsfaktor ist.[7] Der Page-Rang von w_i ist also „groß“, wenn viele Seiten w_j (mit hohem p_j und niedrigen l_j) auf w_i verweisen. Durch $d < 1$ wird verhindert, dass isolierte Webseiten (auf die nicht verwiesen wird) Page-Rang 0 erhalten. Die p_i lassen sich durch (19.1) nicht direkt berechnen. Es ist nicht einmal klar, ob sie durch (19.1) eindeutig bestimmt sind.

Definition 19.40. Mit den obigen Bezeichnungen nennt man $G = (g_{ij})$ mit

$$g_{ij} = \begin{cases} \frac{d}{l_i} + \frac{1-d}{n} & \text{falls } w_i \to w_j, \\ \frac{1-d}{n} & \text{sonst} \end{cases}$$

die *Google-Matrix*.

Satz 19.41. *Die Google-Matrix ist stochastisch. Außerdem ist $(p_1, \ldots, p_n)$ der einzige Eigenvektor von G^{t} zum Eigenwert 1 mit $p_1 + \ldots + p_n = 1$. Insbesondere sind $p_1, \ldots, p_n$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wegen $0 < d < 1$ ist $G > 0$. Die i-te Zeilensumme von G ist

$$l_i\Big(\frac{d}{l_i} + \frac{1-d}{n}\Big) + (n - l_i)\frac{1-d}{n} = 1,$$

d. h. G ist stochastisch. Nach Definition von p_i gilt

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 - d + d\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ w_j \to w_i}} \frac{p_j}{l_j} = 1 - d + d\sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ w_j \to w_i}} \frac{1}{l_j} = 1 - d + d\sum_{j=1}^{n} p_j.$$

Es folgt $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Für $v := (p_1, \ldots, p_n)$ ist

$$(G^{\mathrm{t}}v)_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ji} p_j = \frac{1-d}{n}\sum_{j=1}^{n} p_j + \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ w_j \to w_i}} \frac{dp_j}{l_j} = p_i,$$

d. h. v ist ein Eigenvektor von G^{t} zum Eigenwert $\rho(G^{\mathrm{t}}) = \rho(G) = 1$. Nach Perron-Frobenius ist v durch $\sum p_i = 1$ eindeutig bestimmt. □

Bemerkung 19.42.

(a) In der Praxis wird p_i mit dem von-Mises-Satz (näherungsweise) bestimmt. Man kann zeigen, dass $|\lambda| \le d$ für alle Eigenwerte $\lambda \ne 1$ von G gilt. Damit konvergiert die Potenzmethode mindestens mit dem Faktor $\frac{1}{d}$ (siehe Beweis von Satz 18.72).

(b) Man kann G auch als Übergangsmatrix einer Markov-Kette betrachten, bei der ein Surfer auf w_i mit Wahrscheinlichkeit d auf einen der Hyperlinks auf w_i klickt und mit Wahrscheinlichkeit $1 - d$ eine zufällige andere Webseite aufruft. Hat man die p_i bestimmt, so kann man mit Folgerung 18.69 die langfristigen Aufenthaltswahrscheinlichkeiten des Surfers ermitteln (siehe Beispiel 19.34).

[7] Google nutzt $d = 0.85$. Der genaue Wert von n ist unbekannt, aber dürfte größer als 10^{10} sein.

20 Lineare Optimierung

20.1 Lineare Programme

Bemerkung 20.1.

(a) In der linearen Optimierung maximiert (oder minimiert) man eine *Zielfunktion* (zum Beispiel Gewinn oder Kosten eines Unternehmens) unter Nebenbedingungen (zum Beispiel Nachfrage oder Kapazität).

(b) Wir werden der Einheitlichkeit halber nur Spaltenvektoren benutzen. Abweichend von früheren Kapiteln sei $\mathbb{R}^n$ der Raum der reellen *Spalten*vektoren.

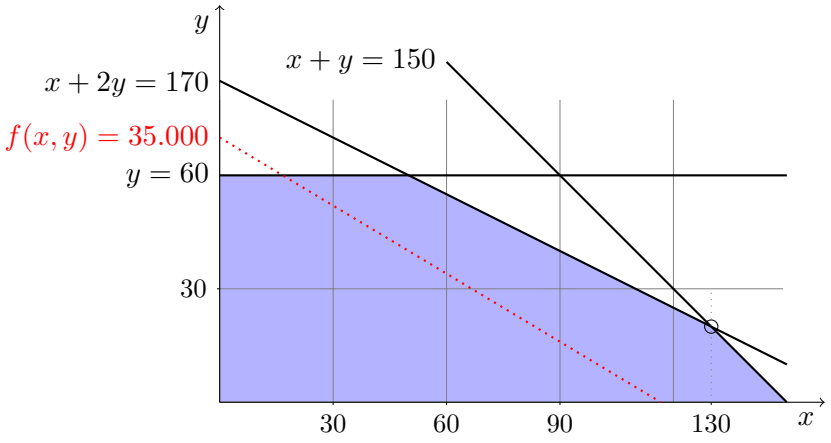
Beispiel 20.2. Ein Unternehmen stellt mit drei Maschinen A, B, C zwei Produkte P und Q her. Die Maschinen haben im Produktionszeitraum eine maximale Laufzeit von 170 Stunden (A), 150 Stunden (B) bzw. 180 Stunden (C). Die Herstellung von P und Q benötigt folgende Ressourcen:

Produkt	Laufzeit A	Laufzeit B	Laufzeit C	Erlös
P	$1h$	$1h$	0	300 €
Q	$2h$	$1h$	$3h$	500 €

In welchem Verhältnis sollte man Einheiten von P und Q erzeugen, um den Gesamterlös zu maximieren? Seien x und y die Anzahl der zu produzierenden Produkte P und Q. Die Zielfunktion $f\colon \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 300x + 500y$ soll unter den Nebenbedingungen

$$x, y \geq 0, \qquad x + 2y \leq 170, \qquad x + y \leq 150, \qquad 3y \leq 180$$

maximiert werden. Diese Ungleichungen beschreiben die blau gekennzeichnete Fläche in $\mathbb{R}^2$:



Die Parameter für einen Erlös von $f(x, y) = 35.000$ sind mit der rot gepunkteten Linie gekennzeichnet. Da die Steigung $-3/5$ dieser Geraden nicht von Erlös abhängt, sieht man leicht, dass f für $(x, y) = (130, 20)$ maximal ist. Der Erlös beträgt dann 49.000 €. Wir haben Glück, dass die Lösung (x, y) hier eindeutig und ganzzahlig ist. Für Probleme mit deutlich mehr Parametern ist dieser grafische Ansatz ungeeignet.

Bemerkung 20.3.

(a) Eine „lineare" Zielfunktion hat die Form $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c^{\mathrm{t}}x + a$ für ein $c \in \mathbb{R}^m$ und $a \in \mathbb{R}$. Da Konstanten keinen Einfluss auf die Position von Extrema haben, kann man $a = 0$ annehmen. Wegen $\max f = -\min(-f)$ kann man sich auf die Suche nach Maxima beschränken.

(b) Lineare Nebenbedingungen an $x \in \mathbb{R}^m$ können in der Form $c^{\mathrm{t}}x \leq b$, $c^{\mathrm{t}}x = b$ oder $c^{\mathrm{t}}x \geq b$ mit $c \in \mathbb{R}^m$ und $b \in \mathbb{R}$ auftreten. Wegen $c^{\mathrm{t}}x \geq b \iff (-c)^{\mathrm{t}}x \leq -b$ kommt man ohne die dritte Variante aus. Durch Hinzunahme einer sogenannten *Schlupfvariable* y kann man $c^{\mathrm{t}}x \leq b$ durch $c^{\mathrm{t}}x + y = b$ und $y \geq 0$ ersetzen. In der Zielfunktion kommen Schlupfvariablen nicht vor. Generell kann man $x_i \geq 0$ für $i = 1, \ldots, m$ annehmen, indem man x_i durch zwei Variablen $x_i^+, x_i^- \geq 0$ mit $x = x_+ - x_-$ ersetzt. Alle Nebenbedingungen lassen sich nun in Matrixform $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ und $x \geq 0$ zusammenfassen. Mit dem Gauß-Algorithmus kann man A in Zeilenstufenform überführen und Nullzeilen streichen. Insbesondere kann man annehmen, dass A vollen Rang hat. Im Fall $n \geq m$ kann $Ax = b$ nach Bemerkung 6.7 höchstens eine Lösung haben. Die Suche nach einem Maximum der Zielfunktion ist in diesem Fall uninteressant. Wir werden daher $n < m$ annehmen. Indem man Zeilen mit -1 multipliziert, erreicht man $b \geq 0$.

(c) Alternativ lassen sich Nebenbedingungen der Form $c^{\mathrm{t}}x = b$ aufspalten in $c^{\mathrm{t}}x \leq b$ und $-c^{\mathrm{t}}x \leq -b$. Man erreicht damit $Ax \leq b$ ohne Hinzunahme von Schlupfvariablen und ohne Einschränkungen an x. Darauf kommen wir in Definition 20.14 zurück.

Definition 20.4. Ein *lineares Programm* (in Standardform) $L = (A, b, c)$ besteht aus $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit Rang $n < m$, $b \in \mathbb{R}^n$ mit $b \geq 0$ und $c \in \mathbb{R}^m$. Ein nicht-negativer Vektor $x \in \mathbb{R}^m$ heißt *zulässig*, wenn x die Nebenbedingung $Ax = b$ erfüllt. Gesucht sind zulässige $x_{\max}$, die die Zielfunktion $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c^{\mathrm{t}}x$ maximieren, d. h. $f(x_{\max}) \geq f(x)$ für alle zulässigen $x \in \mathbb{R}^m$. Außerdem nennt man L

- *lösbar*, falls mindestens ein $x_{\max}$ existiert.
- *unzulässig*, falls es keine zulässigen x gibt.
- *unbeschränkt*, falls f auf der Menge der zulässigen x beliebig groß wird.

Bemerkung 20.5. Sei L ein lineares Programm mit Zielfunktion f. Angenommen f ist auf der Menge M der zulässigen x beschränkt. Nach Bolzano-Weierstraß existiert eine Folge zulässiger Punkte $(x_i)_i$ mit $s := \lim_{i\to\infty} f(x_i) = \sup_{x\in M} f(x)$. Da M abgeschlossen ist, existiert $x_{\max} := \lim_{i\to\infty} x_i$. Da f als lineare Funktion stetig ist, gilt $f(x_{\max}) = s = \max_{x\in M} f(x)$, d. h. L ist lösbar. Dies zeigt, dass jedes lineare Programm entweder lösbar oder unzulässig oder unbeschränkt ist.

Beispiel 20.6. Das Problem aus Beispiel 20.2 lässt sich mit drei Schlupfvariablen als lineares Programm schreiben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & . & . \\ 1 & 1 & . & 1 & . \\ . & 3 & . & . & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = (170, 150, 180)^{\mathrm{t}}, \qquad c = (300, 500, 0, 0, 0)^{\mathrm{t}}.$$

20.2 Konvexe Mengen

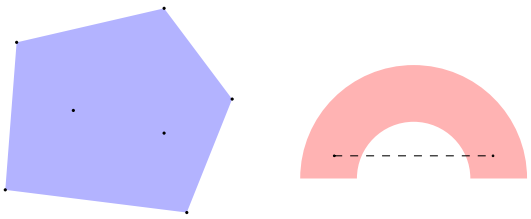
Definition 20.7.

- Eine Teilmenge $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, falls $\lambda x + (1-\lambda)y \in \Delta$ für alle $x, y \in \Delta$ und $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt. Dies bedeutet anschaulich, dass zu je zwei Punkten in Δ auch deren Verbindungsstrecke in Δ liegt.
- Für $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$ nennt man $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$ eine *Konvexkombination* von $v_1, \ldots, v_k$.
- Die Menge aller Konvexkombinationen von Elementen aus Δ nennt man die *konvexe Hülle* von Δ und schreibt dafür $\mathrm{con}\Delta$ (bzw. $\mathrm{con}(x_1, \ldots, x_k)$ falls $\Delta = \{x_1, \ldots, x_k\}$). Offenbar ist $\mathrm{con}\Delta$ die „kleinste“ konvexe Teilmenge, die Δ enthält, d. h.

$$\mathrm{con}\Delta = \bigcap_{\substack{\Delta \subseteq \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \\ \Gamma \text{ konvex}}} \Gamma.$$

Beispiel 20.8.

(a) Konvexe Mengen in $\mathbb{R}$ sind (offene oder (halb)abgeschlossene) Intervalle. In $\mathbb{R}^2$ haben konvexe Mengen weder Löcher noch nach innen gerichtete „Knicks“. Hier die konvexe Hülle von sieben Punkten (blau) und eine nicht konvexe Menge (rot):



(b) Für jede Norm ist $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ nach der Dreiecksungleichung konvex. Für $\|.\|_2$ erhält man die Einheitskugel, für $\|.\|_\infty$ den Würfel mit Kantenlänge 2 und für $\|.\|_1$ das *Kreuzpolytop* $\mathrm{con}(\pm e_1, \ldots, \pm e_n)$ (für $n = 3$ ist dies ein Oktaeder).

Satz 20.9 (Carathéodory)**.** *Sei $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathrm{con}\Delta$. Dann ist x eine Konvexkombination von höchstens $n+1$ Elementen in Δ.*

Beweis. Sei $x = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$ eine Konvexkombination mit $v_1, \ldots, v_k \in \Delta$ und k minimal. Angenommen es gilt $k > n+1$. Wir bilden die Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times k}$ mit den Spalten $v_1, \ldots, v_k$ und der zusätzlichen Zeile $(1, \ldots, 1)$. Wegen $\mathrm{rk}\, A \leq n+1 < k$ existiert ein $y \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ mit $Ay = 0$. Damit gilt $y_1 v_1 + \ldots + y_k v_k = 0$ und $y_1 + \ldots + y_k = 0$. Sei $1 \leq s \leq k$ mit $\frac{y_s}{\lambda_s} \geq \frac{y_i}{\lambda_i}$ für $i = 1, \ldots, k$. Für $\lambda_i' := \lambda_i\big(1 - \frac{y_i \lambda_s}{\lambda_i y_s}\big) \geq 0$ gilt

$$\sum_{i \neq s} \lambda_i' v_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i - \frac{\lambda_s}{y_s} \sum_{i=1}^k y_i v_i = x,$$

$$\sum_{i \neq s} \lambda_i' = \sum_{i=1}^k \lambda_i - \frac{\lambda_s}{y_s} \sum_{i=1}^k y_i = 1$$

im Widerspruch zur Wahl von k. □

Beispiel 20.10. Im Gegensatz zu Unterräumen lässt sich $\mathrm{con}\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht immer durch endlich (oder abzählbar) viele Elemente in Δ „aufspannen“ (als Konvexkombination). Betrachten wir dazu den konvexen Einheitskreis $\Delta := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$. Angenommen es existieren abzählbar viele $v_1, v_2, \ldots \in \Delta$, sodass jedes Element in Δ eine Konvexkombination der v_i ist. Bekanntlich gibt es überabzählbar viele $x \in \Delta$ mit $|x| = 1$ (parametrisiert durch $(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$). Wir können $x \neq \pm v_i$ für $i \in \mathbb{N}$ annehmen. Dann gilt o. B. d. A. $x = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$ mit $k \geq 2$, $\lambda_i > 0$ und $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$. Nach der Dreiecksungleichung und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$1 = [x, x] \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i |[x, v_i]| \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i |x||v_i| \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

nur, wenn x zu jedem v_i linear abhängig ist und $|v_1| = \ldots = |v_k| = 1$. Dann wäre aber $x = \pm v_1$. Also benötigt man überabzählbar viele Elemente aus Δ, um jedes Element als Konvexkombination darzustellen.

Lemma 20.11 (Farkas)**.** *Für alle $U \leq \mathbb{R}^n$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

(1) Es existiert ein $u \in U$ mit $u \geq 0$ und $u_1 > 0$.

(2) Es existiert ein $v \in U^\perp$ mit $v \geq 0$ und $v_1 > 0$.

Beweis. Gelten (1) und (2) gleichzeitig mit u bzw. v, so wäre $0 = [u, v] = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n \geq u_1 v_1 > 0$. Wir argumentieren durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist $U = \mathbb{R}$ oder $U^\perp = \mathbb{R}$. Sei also $n \geq 2$ und

$$\widetilde{U} := \left\{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x, 0) \in U\right\} \leq \mathbb{R}^{n-1},$$
$$\widehat{U} := \left\{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \exists y \in \mathbb{R} : (x, y) \in U\right\} \leq \mathbb{R}^{n-1}.$$

Aus Dimensionsgründen existiert ein $u_0 \in U$ mit $U = (\widetilde{U} \times \{0\}) + \langle u_0 \rangle$. Aus Aufgabe II.7 folgt

$$U^\perp = (\widetilde{U}^\perp \times \mathbb{R}) \cap u_0^\perp. \tag{20.1}$$

Nach Induktion gibt es drei Alternativen:

(a) Es existiert ein $\tilde{u} \in \widetilde{U}$ mit $\tilde{u} \geq 0$ und $\tilde{u}_1 > 0$. Dann gilt (1) mit $u := (\tilde{u}, 0) \in U$.

(b) Es existiert ein $\hat{v} \in \widehat{U}^\perp$ mit $\hat{v} \geq 0$ und $\hat{v}_1 > 0$. Für $v := (\hat{v}, 0)$ und alle $u = (\hat{u}, u_n) \in U$ gilt $[u, v] = [\hat{u}, \hat{v}] = 0$, d. h. (2) gilt für v.

(c) Es existieren $\tilde{v} \in \widetilde{U}^\perp$ und $\hat{u} \in \widehat{U}$ mit $\tilde{v}, \hat{u} \geq 0$ und $\tilde{v}_1, \hat{u}_1 > 0$. Sei $y \in \mathbb{R}$ mit $u = (\hat{u}, y) \in U$. Im Fall $y \geq 0$ gilt (1) für u. Sei daher $y < 0$. Nach (20.1) existiert ein $z \in \mathbb{R}$ mit $v = (\tilde{v}, z) \in u_0^\perp \subseteq U^\perp$. Wegen $\hat{u}, \tilde{v} \geq 0$ ist
$$0 = [u, v] = [\hat{u}, \tilde{v}] + yz \geq yz$$
und $z \geq 0$. Also gilt (2) für v. □

Beispiel 20.12. In $\mathbb{R}^2$ besagt Farkas' Lemma, dass zu jeder Geraden g durch den Ursprung entweder g oder die dazu senkrechte Gerade $g^\perp$ durch den ersten Quadranten $(x, y \geq 0)$ verläuft.

Folgerung 20.13. *Für $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

(1) Es existiert ein $x \in \mathbb{R}^m$ mit $x \geq 0$ und $Ax = b$.

(2) Es existiert ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit $b^{\mathrm{t}} y < 0$ und $A^{\mathrm{t}} y \geq 0$.

Beweis. Sind x und y Lösungen von (1) bzw. (2), so wäre $0 \leq (A^{\mathrm{t}}y)^{\mathrm{t}}x = y^{\mathrm{t}}(Ax) = y^{\mathrm{t}}b < 0$. Es kann also höchstens eine der Aussagen gelten. Wir fügen $-b$ links als neue Spalte an A und erhalten $S := (-b|A) \in \mathbb{R}^{n\times(m+1)}$. Sei $U := \operatorname{Ker} S \leq \mathbb{R}^{m+1}$. Angenommen es existiert ein $\tilde{x} = (x_1, x)^{\mathrm{t}} \in U$ mit $x \geq 0$ und $x_1 > 0$. Nach Skalierung können wir $x_1 = 1$ annehmen. Dann ist x^{t} eine Lösung von (1).

Nach Farkas' Lemma können wir nun voraussetzen, dass ein $\tilde{z} = (z_1, z)^{\mathrm{t}} \in U^{\perp}$ mit $z \geq 0$ und $z_1 > 0$ existiert. Nach Beispiel 11.16 ist $U^{\perp} = \{S^{\mathrm{t}}y : y \in \mathbb{R}^n\}$. Sei also $y \in \mathbb{R}^n$ mit $S^{\mathrm{t}}y = \tilde{z}$. Dann gilt $b^{\mathrm{t}}y = -z_1 < 0$ und $A^{\mathrm{t}}y = z \geq 0$. Somit gilt (2) für y. □

Definition 20.14. Sei $L = (A, b, c)$ ein lineares Programm. Das zu L *duale* lineare Programm L^* minimiert die Zielfunktion $f^*\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $y \mapsto b^{\mathrm{t}}y$ unter der Nebenbedingung $A^{\mathrm{t}}y \geq c$. Analog zu Definition 20.4 definiert man Lösbarkeit, Zulässigkeit und Beschränktheit von L^*.

Beispiel 20.15. Das duale Programm zu $L = (A, b, c)$ aus Beispiel 20.6 ist

$$\min_{y\in\mathbb{R}^3}(170, 150, 180)y \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & . \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & . & . \\ . & 1 & . \\ . & . & 1 \end{pmatrix} y \geq \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $y, c \geq 0$ ist L^* beschränkt. Offenbar ist y nur dann eine minimale Lösung, wenn in den ersten beiden Zeilen Gleichheit gilt, d. h. $y_1 + y_2 = 300$ und $2y_1 + y_2 + 3y_3 = 500$. Dann ist $y = (y_1, 300 - y_1, (200 - y_1)/3)$ und

$$f^*(y) = c^{\mathrm{t}}y = 170y_1 + 150(300 - y_1) + 60(200 - y_1) = 57.000 - 40y_1.$$

Das Minimum $f^*(y) = 49.000$ erhält man für $y_1 = 200$ wegen $y_3 \geq 0$. Dies ist genau der Maximalwert von L. Der nächste Satz zeigt, dass dies kein Zufall ist.

Satz 20.16 (Dualitätssatz)**.** *Für jedes lineare Programm $L = (A, b, c)$ gilt:*

(a) L ist genau dann lösbar, wenn L^* lösbar ist. Für Lösungen $x_{\max}$ und $y_{\min}$ gilt $f(x_{\max}) = f^*(y_{\min})$.

(b) Ist L (bzw. L^*) unbeschränkt, so ist L^* (bzw. L) unzulässig.

Beweis.

(b) Ist $x \in \mathbb{R}^m$ zulässig für L und $y \in \mathbb{R}^n$ zulässig für L^*, so gilt

$$f(x) = c^{\mathrm{t}}x \leq y^{\mathrm{t}}Ax = y^{\mathrm{t}}b = f^*(y). \tag{20.2}$$

Ist L (bzw. L^*) unbeschränkt, so muss also L^* (bzw. L) unzulässig sein.

(a) Sei $x_{\max} \in \mathbb{R}^m$ eine Lösung von L. Sei

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & A \\ -1 & c^{\mathrm{t}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(m+1)}$$

und $U := \operatorname{Ker} A_1$. Existiert ein $\binom{t}{w} \in \operatorname{Ker} A_1$ mit $t > 0$ und $w \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}$, so wäre $x_{\max} + w \geq 0$, $A(x_{\max} + w) = b$ und

$$f(x_{\max} + w) = f(x_{\max}) + t > f(x_{\max}).$$

Nach Farkas' Lemma und Beispiel 11.16 existiert ein $y = A_1^{\mathrm{t}}\binom{u}{s} \geq 0$ mit $u \in \mathbb{R}^n$ und $y_1 > 0$. Nun ist $s < 0$ und $A^{\mathrm{t}}u \geq -sc$. Für $v := -\frac{1}{s}u$ gilt schließlich $A^{\mathrm{t}}v \geq c$, d. h. v ist zulässig für L^*.

Jetzt betrachten wir

$$A_2 = \begin{pmatrix} c & -A^{\mathrm{t}} & A^{\mathrm{t}} & 1_m & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & b^{\mathrm{t}} & -b^{\mathrm{t}} & 0 & -c^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m+1)\times 2(n+m+1)}.$$

Angenommen es existieren $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^n$ und $s \in \mathbb{R}$ mit $(x^{\mathrm{t}}, u^{\mathrm{t}}, s)A_2 \geq 0$ und positiver erster Koordinate. Dann ist

$$c^{\mathrm{t}}x > u^{\mathrm{t}}b, \qquad Ax \leq sb, \qquad Ax \geq sb, \qquad x, s \geq 0, \qquad A^{\mathrm{t}}u \geq sc.$$

Sei dabei $s > 0$. Durch Übergang zu $\frac{1}{s}(x^{\mathrm{t}}, u^{\mathrm{t}}, s)$ kann man $s = 1$ annehmen. Dann ist x für L zulässig und u für L^*, aber (20.2) ist verletzt. Also gilt $s = 0$ und $Ax = 0$. Für alle $\lambda, \mu > 0$ ist $x_{\max} + \lambda x$ zulässig für L und $v + \mu u$ zulässig für L^*. Indem man λ oder μ (falls $c^{\mathrm{t}}x = 0$) genügend groß wählt, wird (20.2) wieder ungültig. Daher kann $(x^{\mathrm{t}}, u^{\mathrm{t}}, s)$ nicht existieren.

Mit Farkas' Lemma findet man einen nicht-negativen Vektor $(1, u_+, u_-, z, x, s) \in \operatorname{Ker} A_2$. Das bedeutet

$$Ax = b, \qquad A^{\mathrm{t}}(u_+ - u_-) = c + z \geq c, \qquad b^{\mathrm{t}}(u_+ - u_-) = c^{\mathrm{t}}x - s \leq c^{\mathrm{t}}x.$$

Also ist x zulässig für L und $u := u_+ - u_-$ zulässig für L^*. Wegen $f(x) = c^{\mathrm{t}}x \geq b^{\mathrm{t}}u = f^*(u)$ folgt $s = 0$ aus (20.2). Außerdem muss u eine Lösung für L^* sein und $f(x_{\max}) = c^{\mathrm{t}}x = b^{\mathrm{t}}u = f^*(u)$.

Sei schließlich $y_{\min}$ eine Lösung für L^*. Gilt (2) in Folgerung 20.13 für y, so wäre $A^{\mathrm{t}}(y_{\min} + y) \geq c$ und $f^*(y_{\min} + y) = b^{\mathrm{t}}(y_{\min} + y) < b^{\mathrm{t}}y_{\min} = f^*(y_{\min})$. Also muss (1) gelten, d. h. L ist lösbar. □

Beispiel 20.17. Es kann vorkommen, dass sowohl L als auch L^* unzulässig sind. Zum Beispiel für $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $b = c = (1, 1)^{\mathrm{t}}$.

20.3 Der Simplex-Algorithmus

Definition 20.18.

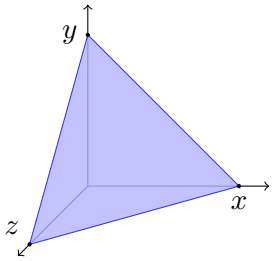
- Die zulässige Menge $P := \{x \in \mathbb{R}^m_{\geq 0} : Ax = b\}$ eines linearen Programms $L = (A, b, c)$ beschreibt einen *Polyeder*. Offenbar ist P konvex. Man nennt $x \in P$ eine *Ecke* von P oder L, wenn auch $P \setminus \{x\}$ konvex ist.
- Für $x \in P$ nennt man $\operatorname{supp} x := \{i : x_i > 0\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$ den *Träger*[1] von x.
- Für $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ und $x \in \mathbb{R}^m$ sei $A_I := (a_{ij} : i = 1, \ldots, n,\ j \in I)$, $x_I := (x_i : i \in I)$ und $I' := \{1, \ldots, m\} \setminus I$. Man nennt I eine *Basismenge* von L, falls A_I invertierbar ist. Ist zusätzlich $A_I^{-1}b \geq 0$, so nennt man I *zulässig*.

[1] engl. *support*

Bemerkung 20.19.

(a) In der Geometrie definiert man Polyeder als Mengen der Form $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$. Beschränkte Polyeder heißen *Polytope*. In $\mathbb{R}^2$ sind Polytope konvexe Vielecke wie der zulässige Bereich in Beispiel 20.2. Die Eckpunkte sind genau diejenigen Punkte, die man umgangssprachlich als Ecken bezeichnen würde. Die Bedingung, dass $P \setminus \{x\}$ konvex bleibt, bedeutet anschaulich, dass man Ecken „abrunden“ kann.

(b) Wir hatten in Bemerkung 20.3 gesehen, wie man durch Einführen von Schlupfvariablen Polyeder der Form $\{x : Ax \leq b\}$ in Polyeder der Form $\{x \geq 0 : Ax = b\}$ transformieren kann. Die geometrische Vorstellung der in Definition 20.18 definierten Polyeder bezieht sich also auf einen echten Unterraum. Zum Beispiel beschreibt $P = \{(x, y, z) \geq 0 : x + y + z = 1\}$ ein gleichseitiges Dreieck auf einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ mit den Eckpunkten e_1, e_2 und e_3.



Lemma 20.20. *Für jeden zulässigen Punkt x eines linearen Programms $L = (A, b, c)$ sind äquivalent:*

(1) x ist eine Ecke.

(2) Für $I := \operatorname{supp} x$ gilt $\operatorname{rk} A_I = |I|$.

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2): Angenommen die Spalten von A_I sind linear abhängig. Dann existiert ein $y \in \mathbb{R}^m$ mit $\operatorname{supp} y \subseteq I$ und $Ay = 0$. Außerdem existiert ein $\epsilon > 0$ mit $x \pm \epsilon y \geq 0$. Nun liegen $x \pm \epsilon y$ im Polyeder P von L und $x = \frac{1}{2}(x - \epsilon y) + \frac{1}{2}(x + \epsilon y)$. Dann wäre $P \setminus \{x\}$ aber nicht konvex. Widerspruch.

(2) $\Rightarrow$ (1): Angenommen $P \setminus \{x\}$ ist nicht konvex. Dann existieren $y, z \in P \setminus \{x\}$ und $0 < \lambda < 1$ mit $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$. Wegen $y, z \geq 0$ gilt $\operatorname{supp} y, \operatorname{supp} z \subseteq I$. Dies zeigt $A_I y_I = b = A_I z_I$ und $y_I - z_I \in \operatorname{Ker} A_I$. Da A_I vollen Rang hat, wäre nun $y = z = x$. □

Beispiel 20.21.

(a) Im Fall $b = 0$ ist $x = 0$ eine Ecke mit $I = \varnothing$.

(b) Ist I eine zulässige Basismenge für L, so existiert genau eine zulässige Ecke x mit $\operatorname{supp} x \subseteq I$, denn $x_I = A_I^{-1} b \geq 0$. Im Fall $\operatorname{supp} x \subsetneq I$ kann x zu mehreren Basismengen gehören.

Folgerung 20.22. *Jedes lineare Programm in m Variablen besitzt höchstens $\sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \leq 2^m$ Ecken.*

Beweis. Jede Ecke x ist durch $I := \operatorname{supp} x$ eindeutig bestimmt, denn $A_I x_I = b$ besitzt nach Lemma 20.20 (höchstens) eine Lösung. Die Anzahl der Teilmengen $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ mit $|I| \leq n$ ist bekanntlich

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \leq \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = (1 + 1)^m = 2^m. \qquad \square$$

Bemerkung 20.23. Die Abschätzung in Folgerung 20.22 ist für $n \geq 2$ nicht optimal. Ist nämlich x eine Ecke, so führt jede Indexmenge I mit $\operatorname{supp} x \subseteq I$ und $\operatorname{rk} A_I = |I|$ zur gleichen Ecke. Man braucht also nur sogenannte *Antiketten* $\{I_1, \ldots, I_k\}$ von $\{1, \ldots, m\}$ zu betrachten, d. h. $I_s \not\subseteq I_t$ für alle $s \neq t$. Ein Satz von SPERNER liefert die schärfere Abschätzung $k \leq \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}$.[2]

Trotzdem kann die Zahl der Ecken exponentiell mit m wachsen. Zum Beispiel besitzt das lineare Programm mit $A = (1_n, 1_n) \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$ und $b = (1, \ldots, 1)^{\mathrm{t}}$ genau $2^n = \sqrt{2}^m$ Ecken (jedes I enthält genau ein Element aus $\{i, i+n\}$ für $i = 1, \ldots, n$).

Satz 20.24 (Hauptsatz der linearen Optimierung)**.** *Ist das lineare Programm $L = (A, b, c)$ lösbar, so wird das Maximum an einer Ecke angenommen.*

Beweis. Sei $x_{\max}$ eine Lösung von L und $I := \operatorname{supp} x_{\max}$. Wir können annehmen, dass $x_{\max}$ keine Ecke ist. Wie im Beweis von Lemma 20.20 existieren $y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ und $\epsilon > 0$ mit $\operatorname{supp} y \subseteq I$, $Ay = 0$ und $x_\pm := x_{\max} \pm \epsilon y \geq 0$. Wegen

$$f(x_{\max}) \pm \epsilon f(y) = f(x_\pm) \leq f(x_{\max})$$

ist $f(y) = 0$. Wir können ϵ so wählen, dass $\operatorname{supp}(x_+) \subsetneq I$ oder $\operatorname{supp}(x_-) \subsetneq I$ gilt. Ggf. ist x_+ bzw. x_- eine Lösung von L mit kleinerem Träger. Wenn wir auf diese Weise fortfahren, gelangen wir nach endlich vielen Schritten zu einer Ecke x mit $f(x) = f(x_{\max})$. □

Bemerkung 20.25. Nach Satz 20.24 und Folgerung 20.22 muss man zur Lösung eines linearen Programms nur endlich viele (aber möglicherweise exponentiell viele) zulässige Ecken betrachten. Trotzdem kann es sein, dass das Maximum an unendlich vielen Punkten angenommen wird, zum Beispiel im trivialen Fall $c = 0$. Mit dem folgenden Satz lässt sich prüfen, ob eine gefundene Ecke eine Lösung ist.

Satz 20.26 (Simplex-Kriterium)**.** *Sei $L = (A, b, c)$ ein lineares Programm mit zulässiger Basismenge I. Ist*

$$\gamma(I) := c_{I'}^{\mathrm{t}} - c_I^{\mathrm{t}} A_I^{-1} A_{I'} \leq 0,$$

so ist die zu I gehörende Ecke eine Lösung von L.

Beweis. O. B. d. A. sei $I = \{1, \ldots, n\}$ und $A = (A_I, A_{I'})$. Für jeden zulässigen Vektor x gilt $A_I x_I + A_{I'} x_{I'} = b$. Es folgt $x_I + A_I^{-1} A_{I'} x_{I'} = A_I^{-1} b$ und

$$f(x) = c^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} x_I \\ x_{I'} \end{pmatrix} = c_I^{\mathrm{t}} (A_I^{-1} b - A_I^{-1} A_{I'} x_{I'}) + c_{I'}^{\mathrm{t}} x_{I'} = c_I^{\mathrm{t}} A_I^{-1} b + \gamma(I) x_{I'} \overset{x \geq 0}{\leq} c_I^{\mathrm{t}} A_I^{-1} b$$

mit Gleichheit, wenn $x_{I'} = 0$, d. h. wenn x die Ecke mit $\operatorname{supp} x \subseteq I$ ist. □

Bemerkung 20.27. In der Praxis ist es aufwendig, alle Ecken zu enumerieren. Die Idee des Simplex-Verfahrens ist es, von einer Ecke x zu einer „benachbarten“ Ecke y mit $f(y) > f(x)$ überzugehen. Benachbart bedeutet anschaulich, dass die Verbindungsstrecke $S := \{\lambda x + (1-\lambda) y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ eine Kante des Polyeders P bildet, d. h. $P \setminus S$ ist konvex.

[2] siehe Skript zu Logik und Mengenlehre

Lemma 20.28. *Sei $L = (A, b, c)$ ein lineares Programm mit zulässiger Basismenge I. Sei x die dazugehörige Ecke (Beispiel 20.21), $y := x_I$ und $M := (m_{ij}) = A_I^{-1} A_{I'}$. Sei $j \in I'$ mit $\gamma(I)_j > 0$.*[3] *Dann gilt:*

(a) Ist die j-te Spalte von M nicht-positiv (d. h. ≤ 0), so ist L unbeschränkt.

(b) Anderenfalls sei $i \in I$ mit

$$\frac{y_i}{m_{ij}} = \min\Big\{\frac{y_k}{m_{kj}} : k \in I,\ m_{kj} > 0\Big\}.$$

Dann ist auch $J := I \setminus \{i\} \cup \{j\}$ eine zulässige Basismenge und für die entsprechende Ecke x' gilt $f(x') \geq f(x)$.

(c) Ist $y > 0$, so gilt $f(x') > f(x)$ in (b).

Beweis.

(a) Sei $\mu > 0$ und $z \in \mathbb{R}^n$ mit $z_{I'} = \mu e_j \geq 0$ und $z_I = y - \mu M_j \geq y = x_I \geq 0$, wobei $M_j \leq 0$ die j-te Spalte von M bezeichnet. Wegen

$$Az = A_I z_I + A_{I'} z_{I'} = Ax - \mu A_I M_j + \mu A_{I'} e_j = b$$

ist z zulässig und

$$f(z) = c_I^{\mathrm{t}} z_I + \mu c_{I'}^{\mathrm{t}} e_j = c^{\mathrm{t}} x - \mu c_I^{\mathrm{t}} M_j + \mu c_{I'}^{\mathrm{t}} e_j = c^{\mathrm{t}} x + \mu \gamma(I)_j \to \infty \qquad (\mu \to \infty).$$

Also ist L unbeschränkt.

(b,c) Offenbar ist $S := A_I^{-1} A_J = (e_1, \ldots, e_{i-1}, M_j, e_{i+1}, \ldots, e_n)$. Durch Entwicklung nach der i-ten Zeile erhält man $\det S = m_{ij} > 0$. Insbesondere ist S invertierbar. Damit muss auch A_J invertierbar sein, d. h. J ist eine Basismenge. Wir definieren $x' \in \mathbb{R}^m$ durch

$$x'_k = \begin{cases} y_k - \frac{y_i}{m_{ij}} m_{kj} & \text{falls } k \in I \setminus \{i\}, \\ \frac{1}{m_{ij}} y_i & \text{falls } k = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Wahl von i gilt $y_k \geq \frac{y_i}{m_{ij}} m_{kj}$ für $k \in I \setminus \{i\}$. Dies zeigt $x' \geq 0$. Außerdem ist

$$\begin{aligned} A_I^{-1} A x' = A_I^{-1} A_J x'_J &= \sum_{k \neq i} \Big(y_k - \frac{y_i}{m_{ij}} m_{kj}\Big) e_k + \frac{y_i}{m_{ij}} M_j \\ &= \sum_{k \in I} \Big(y_k - \frac{y_i}{m_{ij}} m_{kj}\Big) e_k + \frac{y_i}{m_{ij}} M_j = y = x_I \end{aligned}$$

und $Ax' = A_I x_I = Ax = b$. Also ist x' eine zulässige Ecke für J. Schließlich gilt

$$f(x') = \sum_{k \in I} c_k \Big(y_k - \frac{y_i}{m_{ij}} m_{kj}\Big) + \frac{y_i}{m_{ij}} c_j = f(x) - \frac{y_i}{m_{ij}} c_I^{\mathrm{t}} M_j + \frac{y_i}{m_{ij}} c_j = f(x) + \frac{y_i}{m_{ij}} \gamma(I)_j \geq f(x)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $y_i = 0$. □

[3] Wir indizieren die Komponenten von $\gamma(I)$ und die Spalten von M mit I' anstelle von $1, \ldots, n - m$.

Bemerkung 20.29 (Simplex-Algorithmus)**.** Gegeben sei ein lineares Programm $L = (A, b, c)$.

(1) Man bestimme eine zulässige Basismenge I_1 und die dazugehörige Ecke x_1. Dies lässt sich notfalls erreichen, indem man b als Spalte von A anfügt und $\{m+1\}$ zu einer Basismenge ergänzt.

(2) Für $k = 1, 2, \ldots$ wiederhole man:

   (a) Ist das Simplex-Kriterium $\gamma(I_k) \leq 0$ erfüllt, so ist x_k eine Lösung für L.

   (b) Anderenfalls kann man Lemma 20.28 anwenden. Ist Lemma 20.28(a) erfüllt, so ist L unbeschränkt und man kann abbrechen.

   (c) Anderenfalls findet man mit Lemma 20.28(b) eine Ecke x_{k+1} mit $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$.

(3) In der Praxis kann es vorkommen, dass die Schleife in einen unendlichen Zyklus von Ecken $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_l, x_k, \ldots$ gerät. In diesem Fall kann man mit einer neuen Startecke x_1 beginnen oder künstliche Störungen einbauen.

Man kann Beispiele konstruieren, in denen der Simplex-Algorithmus alle (exponentiell viele) Ecken durchläuft, aber in der Praxis tritt dies nur sehr selten auf.

Beispiel 20.30. Wir betrachten wieder das lineare Programm aus Beispiel 20.6:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & . & . \\ 1 & 1 & . & 1 & . \\ . & 3 & . & . & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = (170, 150, 180), \qquad c = (300, 500, 0, 0, 0).$$

Offenbar ist $I_1 = \{3, 4, 5\}$ eine zulässige Basismenge mit Ecke $x_1 = (0, 0, 170, 150, 180)^{\mathrm{t}}$, $f(x_1) = 0$ und $A_{I_1} = 1_3$. Es gilt $\gamma(I) = (300, 500)$ und

$$M_1 = A_{I_1'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir können $j = 1$ in Lemma 20.28 wählen. Dann ist $i = 4$ wegen $170 > 150$. Nun ist $I_2 = \{1, 3, 5\}$ und $x_2 = (150, 0, 20, 0, 180)^{\mathrm{t}}$ mit $f(x_2) = 45.000$. Man berechnet

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

und $\gamma(I_2) = (500, 0) - (300, 0, 0)M = (200, -300)$. Hier muss man $j = 2$ und $i = 3$ wählen. Also ist $I_3 = \{1, 2, 5\}$ und $x_3 = (130, 20, 0, 0, 120)^{\mathrm{t}}$ mit $f(x_3) = 49.000$. Weiter ist

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

und $\gamma(I_3) = (0, 0) - (300, 500, 0)M = (-200, -100)$. Nach dem Simplex-Kriterium ist x_3 eine Lösung. Bis auf die Schlupfvariable x_5 ist dies die in Beispiel 20.2 gefundene Lösung.

21 Gitter und quadratische Formen

21.1 Gitter

Bemerkung 21.1. In den Vektorraumaxiomen wird nicht benutzt, dass der Körper K inverse Elemente bzgl. Multiplikation besitzt. Man kann daher K durch einen beliebigen Ring R ersetzen und spricht dann von *R-Moduln* (genauer: *Linksmoduln*). Im Allgemeinen ist die Theorie der Moduln beliebig kompliziert und hat nicht mehr viel mit linearer Algebra zu tun. Selbst $\mathbb{Z}$-Moduln besitzen in der Regel keine Basis (zum Beispiel ist $\mathbb{F}_2$ auf natürliche Weise ein $\mathbb{Z}$-Modul, in dem jedes Element linear abhängig ist wegen $2 \cdot x = 0$ für $x \in \mathbb{F}_2$). Wir untersuchen in diesem Abschnitt eine Familie von $\mathbb{Z}$-Moduln innerhalb von $\mathbb{R}^n$, die per definitionem eine Basis besitzen.

Definition 21.2. Ein *Gitter* ist eine Untergruppe $\Delta \leq (\mathbb{R}^n, +)$ der Form

$$\Delta = \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i : \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{Z} \Big\} = \mathbb{Z}b_1 + \ldots + \mathbb{Z}b_m,$$

wobei $B := \{b_1, \ldots, b_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ linear unabhängig ist. Ggf. nennt man B eine *Basis* von Δ und $\operatorname{rk} \Delta := m$ den *Rang* von Δ. Im Fall $m = n$ sagt man: Δ hat *vollen* Rang. Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Zeilen $b_1, \ldots, b_m$ nennt man eine *Erzeugermatrix* von Δ. Außerdem nennt man

$$_B[\Delta]_B := AA^{\mathrm{t}} = ([b_i, b_j])_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

die *Gram-Matrix* von Δ bzgl. B.

Bemerkung 21.3.

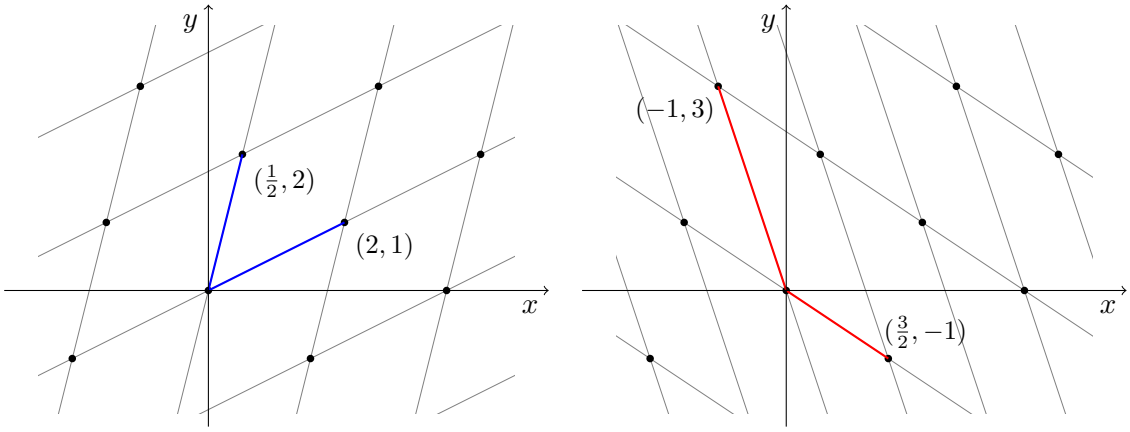
(a) Für jede Basis B eines Gitters Δ gilt $|B| = \dim\langle B \rangle = \dim\langle \Delta \rangle$. Daher hängt $\operatorname{rk} \Delta$ nicht von der Wahl der Basis ab. Indem man $\mathbb{R}^n$ durch $\langle \Delta \rangle$ ersetzt, kann man häufig annehmen, dass Δ vollen Rang hat.

(b) Da die Erzeugermatrix A vollen Rang hat, ist die Gram-Matrix AA^{t} positiv definit (Lemma 12.40).

Beispiel 21.4.

(a) Das *triviale* Gitter mit der Standardbasis $B := \{e_1, \ldots, e_n\}$ besteht aus allen Punkten in $\mathbb{R}^n$ mit ganzzahligen Koordinaten. Die Erzeugermatrix und die Gram-Matrix bzgl. B sind 1_n.

(b) Ein Ausschnitt eines Gitters $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ mit zwei verschiedenen Basen:



(c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit mit Cholesky-Zerlegung $A = R^{\mathrm{t}}R$. Dann existiert ein Gitter mit Erzeugermatrix R^{t} und Gram-Matrix A. Auf diese Weise kann man A ein „kanonisches“ Gitter zuordnen.

(d) Für ein Gitter $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Erzeugermatrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sei

$$\Delta^* := \{x \in \langle\Delta\rangle : \forall d \in \Delta : [x, d] \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Für jedes $x \in \langle\Delta\rangle$ existiert ein $y \in \mathbb{R}^m$ mit $x = yA$. Es gilt

$$x \in \Delta^* \iff \forall b \in B : [x, b] \in \mathbb{Z} \iff xA^{\mathrm{t}} \in \mathbb{Z}^m \iff z := yAA^{\mathrm{t}} \in \mathbb{Z}^m.$$

Für $S := (AA^{\mathrm{t}})^{-1}A = {}_B[\Delta]_B^{-1}A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt daher $\Delta^* = \{zS : z \in \mathbb{Z}^m\}$.[1] Dies zeigt, dass Δ^* ein Gitter mit Erzeugermatrix S ist. Man nennt Δ^* das zu Δ *duale* Gitter. Die Gram-Matrix von Δ^* bzgl. S ist

$$SS^{\mathrm{t}} = {}_B[\Delta]_B^{-1}AA^{\mathrm{t}}{}_B[\Delta]_B^{-1} = {}_B[\Delta]_B^{-1}.$$

Das triviale Gitter Δ ist offenbar *selbstdual*, d. h. $\Delta^* = \Delta$. Im Allgemeinen ist $(\Delta^*)^* = \Delta$, denn

$$(SS^{\mathrm{t}})^{-1}S = {}_B[\Delta]_B S = A.$$

Definition 21.5. Für $n \geq 1$ sei $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Z}^{n\times n} : A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}\}$.

Lemma 21.6. *Für $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ gilt $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ genau dann, wenn $\det A = \pm 1$.*

Beweis. Für $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ gilt $\det A \in \mathbb{Z}$ und $\det(A)^{-1} = \det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$, also $\det A = \pm 1$. Die umgekehrte Inklusion folgt aus Bemerkung 9.24. □

Lemma 21.7. *Seien B und C Basen eines Gitters $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann existiert ein $S \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$ mit $S\,{}_B[\Delta]_B S^{\mathrm{t}} = {}_C[\Delta]_C$.*

Beweis. Seien $G_B, G_C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die Erzeugermatrizen von Δ bzgl. B bzw. C. Dann existiert $S \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ mit $SG_B = G_C$. Es folgt

$${}_C[\Delta]_C = G_C G_C^{\mathrm{t}} = SG_B G_B^{\mathrm{t}} S^{\mathrm{t}} = S\,{}_B[\Delta]_B S^{\mathrm{t}}$$

und $\det({}_C[\Delta]_C) = \det(S)^2 \det({}_B[\Delta]_B) \geq \det({}_B[\Delta]_B)$. Aus Symmetriegründen gilt auch $\det({}_B[\Delta]_B) \geq \det({}_C[\Delta]_C)$. Dies zeigt $\det S = \pm 1$ und $S \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$ nach Lemma 21.6. □

[1] Übrigens ist $S^{\mathrm{t}} = A^+$ die Pseudoinverse von A.

Definition 21.8.

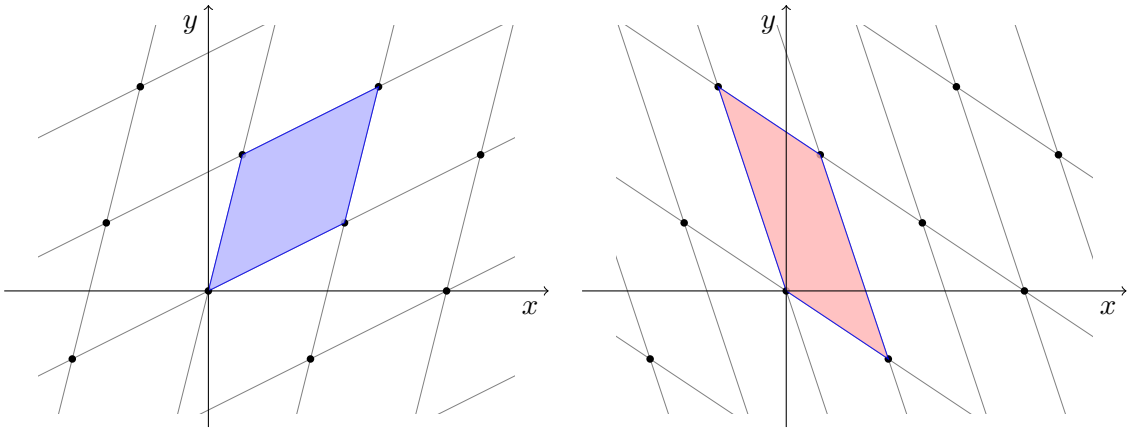
- Ein Gitter Δ heißt *ganz*, wenn ${}_B[\Delta]_B$ für eine Basis B ganzzahlig ist. Nach Lemma 21.7 hängt diese Eigenschaft nicht von der Wahl von B ab.
- Man nennt $\operatorname{disc}\Delta := \sqrt{\det({}_B[\Delta]_B)}$ die *Diskriminante* von Δ. Auch dies ist unabhängig von B.

Beispiel 21.9.

(a) Hat Δ vollen Rang mit Erzeugermatrix A, so gilt $\operatorname{disc}\Delta = |\det A|$. Geometrisch ist $\operatorname{disc}\Delta$ in diesem Fall das Volumen der sogenannten *Fundamentalmasche*

$$\{\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n : 0 \leq \lambda_1, \ldots, \lambda_n \leq 1\}$$

für eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ von Δ (vgl. Beispiel 9.2). Insbesondere gilt $\operatorname{disc}\Delta = 7/2$ für das Gitter aus Beispiel 21.4(b).



(b) Ein Gitter Δ ist genau dann ganz, wenn $\Delta \subseteq \Delta^*$. Im Allgemeinen gilt $\operatorname{disc}(\Delta^*) = \operatorname{disc}(\Delta)^{-1}$.

21.2 Die Minimal-Norm

Definition 21.10. Für ein Gitter $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ sei

$$\min\Delta := \min\big\{|x| : x \in \Delta \setminus \{0\}\big\}$$

die *Minimal-Norm* von Δ.

Bemerkung 21.11.

(a) Da Gitter Gruppen sind, gilt $\min\Delta = \min\big\{|x-y| : x, y \in \Delta, x \neq y\big\}$.

(b) Sei A eine Erzeugermatrix von Δ und $G := AA^{\mathrm{t}}$ die Gram-Matrix. Für $x \in \Delta$ existiert ein $s \in \mathbb{Z}^m$ mit $x = sA$. Es folgt $|x| = |sA| = \sqrt{sGs^{\mathrm{t}}}$. Sei λ (> 0) der kleinste Eigenwert von G. Nach Lemma 18.55 gilt $|x| \geq \sqrt{\lambda}|s|$. Insbesondere gilt $\min\Delta \geq \sqrt{\lambda}$. Gleichheit wird in der Regel nicht eintreten, da es nicht unbedingt einen normierten ganzzahligen Eigenvektor von G gibt. Allerdings existieren nur endlich viele Vektoren $x \in \Delta$ mit $|x| = \min\Delta$. Man nennt sie *kürzeste* Vektoren. Sowohl die Bestimmung der kürzesten Vektoren als auch die Bestimmung von $\min\Delta$ sind für $n > 10$ schwierige algorithmische Probleme. Darauf beruhen moderne Verschlüsselungsverfahren wie LWE[2],

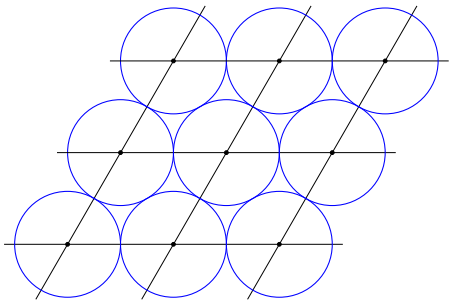
[2]Learning with errors

die – im Gegensatz zu klassischen Verfahren wie RSA – bislang nicht von Quantencomputern gebrochen werden können.

(c) Harriot hat 1591 untersucht, wie man (Kanonen-)Kugeln möglichst dicht im $\mathbb{R}^n$ anordnen kann. Ordnet man die Einheitskugeln regelmäßig an, so bilden die Mittelpunkte ein Gitter Δ mit $\min \Delta \geq 2$ (anderenfalls würden sich Kugeln überschneiden). Die Dichte der Anordnung lässt sich messen, indem man das Volumen der Einheitskugel τ_n durch das Volumen der Fundamentalmasche $\operatorname{disc} \Delta$ teilt: $\rho(\Delta) = \frac{\tau_n}{\operatorname{disc} \Delta}$.

(1) Für $n = 1$ ist $\Delta = \mathbb{Z}2$ optimal mit $\rho(\Delta) = 1$.

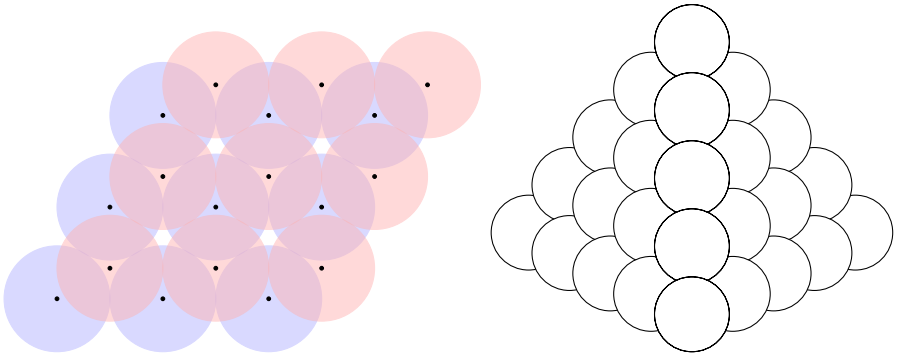
(2) Für $n = 2$ erhält man eine optimale Anordnung durch das hexagonale Gitter $\Delta = \mathbb{Z}(2, 0) + \mathbb{Z}(1, \sqrt{3})$



mit $\min \Delta = 2$ und $\rho(\Delta) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.91$. Das quadratische Gitter $\mathbb{Z}(2, 0) + \mathbb{Z}(0, 2)$ hat nur Dichte $\pi/4 \approx 0.79$.

(3) Für $n = 3$ nimmt man die optimale Anordnung in der Ebene und stapelt diese jeweils versetzt übereinander:

$$\Delta = \mathbb{Z}(2, 0, 0) + \mathbb{Z}(1, \sqrt{3}, 0) + \mathbb{Z}(1, 1/\sqrt{3}, \sqrt{8/3})$$



Es gilt $\min \Delta = 2$ und $\rho(\Delta) = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0.74$. Gauß bewies, dass es kein Gitter mit höherer Dichte gibt (Satz A.14, vgl. Aufgabe III.28). Kepler vermutete 1611, dass es generell unmöglich ist, Kugeln noch dichter anzuordnen (auch unregelmäßig).[3] Dies wurde erst 1998 durch Hales mit Computer bewiesen.[4]

[3] Es gibt unendlich viele Möglichkeiten die Ebenen mit der gleichen Dichte versetzt zu stapeln, aber dies sind formal keine Gitter. Magnesium-Atome formen beispielsweise eine solche Anordnung, die sich nach zwei Schichten periodisch wiederholt.

[4] Seit 2017 gibt es einen mit Computer verifizierten „formalen“ Beweis.

(4) Für $4 \leq n \leq 7$ kennt man die dichteste Kugelpackung nicht. Für $n = 8$ existiert das sogenannte E_8-Gitter mit Erzeuger- und Gram-Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & . & . & . & . & . & . & . \\ -1 & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & -1 & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & -1 & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & -1 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & -1 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & -1 & 1 & . \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & . & . & . & . & . & 1 \\ -2 & 2 & -1 & . & . & . & . & . \\ . & -1 & 2 & -1 & . & . & . & . \\ . & . & -1 & 2 & -1 & . & . & . \\ . & . & . & -1 & 2 & -1 & . & . \\ . & . & . & . & -1 & 2 & -1 & . \\ . & . & . & . & . & -1 & 2 & . \\ 1 & . & . & . & . & . & . & 2 \end{pmatrix}.$$

Man sieht, dass E_8 aus den Vektoren x und $x + \frac{1}{2}(1, \ldots, 1)$ für $x \in \mathbb{Z}^8$ mit $2 \mid x_1 + \ldots + x_8$ besteht. Insbesondere gilt $\min E_8 = \sqrt{2}$. Für das entsprechend skalierte Gitter gilt $\rho(\sqrt{2}E_8) = \frac{\pi^4}{384} \approx 0.25$. Viazovska bewies 2016, dass $\sqrt{2}E_8$ die dichteste Anordnung liefert. Ein Jahr später wurde auch der Fall $n = 24$ gelöst. Viazovska bekam für diese Leistungen 2022 die Fields-Medaille.

Beispiel 21.12. Für das Gitter $\Delta = \mathbb{Z}(2, 1) + \mathbb{Z}(1/2, 2)$ aus Beispiel 21.4(b) sind $\pm(3/2, -1)$ die kürzesten Vektoren mit $\min \Delta = \sqrt{13}/2$.

Satz 21.13. *Eine Untergruppe $U \leq (\mathbb{R}^n, +)$ ist genau dann ein Gitter, wenn für alle $d \in \mathbb{N}$ nur endlich viele $x \in U$ mit $|x| \leq d$ existieren.*

Beweis. Für jedes Gitter gilt die angegebene Beschränkung nach Bemerkung 21.11. Sei umgekehrt $U \leq (\mathbb{R}^n, +)$, sodass die Bedingung gilt. Sei $u_1, \ldots, u_k \in U$ eine größtmögliche Menge linear unabhängiger Vektoren. Dann ist $U \subseteq \langle u_1, \ldots, u_k \rangle =: V$. Im Fall $k = 0$ ist $U = \{0\} = \langle \varnothing \rangle$ ein Gitter vom Rang 0. Sei nun die Behauptung für $k - 1$ bereits bewiesen. Da auch $W := U \cap \langle u_1, \ldots, u_{k-1} \rangle$ die Voraussetzung des Satzes erfüllt, ist W ein Gitter. Sei $b_1, \ldots, b_{k-1}$ eine Basis von W. Wir betrachten

$$S := \{\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_{k-1} b_{k-1} + \lambda u_k : 0 \leq \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1} < 1,\ 0 \leq \lambda \leq 1\} \cap U.$$

Nach der Dreiecksungleichung ist S beschränkt und daher endlich nach Voraussetzung. Wegen $u_k \in S$ existiert ein $b_k = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_{k-1} b_{k-1} + \lambda u_k \in S$ mit $\lambda > 0$ minimal. Offenbar sind $b_1, \ldots, b_k \in U$ linear unabhängig. Jedes Element $u \in U$ hat die Form $u = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_k b_k$ mit $\mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{R}$. Sei $x_k \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq \mu_k - x_k < 1$. Dann existieren $x_1, \ldots, x_{k-1} \in \mathbb{Z}$, sodass

$$u - x_1 b_1 - \ldots - x_k b_k = \lambda_1' b_1 + \ldots + \lambda_{k-1}' b_{k-1} + \lambda_k' u_k \in S$$

mit $0 \leq \lambda_1', \ldots, \lambda_{k-1}' < 1$ und $0 \leq \lambda_k' < \lambda$ gilt. Nach Wahl von b_k folgt $\lambda_k' = 0$ und $\lambda_1' b_1 + \ldots + \lambda_{k-1}' b_{k-1} \in W$. Da $b_1, \ldots, b_{k-1}$ eine Basis von W ist, muss $\lambda_1' = \ldots = \lambda_{k-1}' = 0$ gelten. Dies zeigt $u = x_1 b_1 + \ldots + x_k b_k$. Also ist U ein Gitter mit Basis $b_1, \ldots, b_k$. □

Folgerung 21.14. *Sind $\Delta, \Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ Gitter, so auch $\Delta \cap \Lambda$.*

Beweis. Bekanntlich ist $\Delta \cap \Lambda$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R}^n, +)$. Mit Δ kann auch $\Delta \cap \Lambda$ nur endlich viele Elemente mit beschränkter Norm enthalten. □

21.3 Ganzzahlige Matrizen

Bemerkung 21.15. Die Untersuchung von ganzen Gittern führt zu Matrizen mit ganzzahligen Einträgen. Wir hatten in Abschnitt 10.3 bereits Matrizen mit Polynom-Einträgen konstruiert und festgehalten, dass der Gauß-Algorithmus nicht anwendbar ist, weil dafür dividiert werden müsste. Mit etwas Zahlentheorie[5] entwickeln wir einen Ersatz für den Gauß-Algorithmus in $\mathbb{Z}^{n\times m}$, womit sich Gleichungssysteme über $\mathbb{Z}$ lösen lassen.

Definition 21.16. Für $a, b \in \mathbb{Z}$ schreiben wir $a \mid b$ (*a teilt b*), falls ein $c \in \mathbb{Z}$ mit $b = ac$ existiert. Ein $d \in \mathbb{Z}$ heißt *gemeinsamer Teiler* von $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, falls $d \mid a_1, \ldots, d \mid a_n$. Sei $\mathrm{gT}(a_1, \ldots, a_n)$ die Menge der gemeinsamen Teiler von $a_1, \ldots, a_n$. Man nennt $d \in \mathrm{gT}(a_1, \ldots, a_n)$ *größten gemeinsamen Teiler* und schreibt $\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n) := d$, falls $d \geq 0$ und $e \mid d$ für alle $e \in \mathrm{gT}(a_1, \ldots, a_n)$ gilt. Im Fall $d = 1$ nennen wir $a_1, \ldots, a_n$ *teilerfremd* (wie bei Polynomen).

Bemerkung 21.17.

(a) Sind g und g' größte gemeinsame Teiler von $a_1, \ldots, a_n$, so gilt $g \mid g' \mid g$ und $g = \pm g'$. Wegen $g, g' \geq 0$ ist also $g = g'$, d. h. es existiert höchstens ein größter gemeinsamer Teiler von $a_1, \ldots, a_n$ (dies rechtfertigt die Schreibweise ggT).

(b) Entgegen seines Namens ist der ggT nicht unbedingt der *größte* gemeinsame Teiler. So ist $\mathrm{gT}(0, 0) = \mathbb{Z}$, aber $\mathrm{ggT}(0, 0) = 0$ (beachte $0 \mid 0$). Allgemeiner ist $\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n) = 0$ genau dann, wenn $a_1 = \ldots = a_n = 0$.

(c) Man vergleiche folgendes Lemma mit Lemma 15.6.

Lemma 21.18 (Bézout)**.** *Für $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ existieren $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Z}$ mit $a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = \mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n)$ und $\mathrm{ggT}(b_1, \ldots, b_n) = 1$.*

Beweis. Im Fall $a_1 = \ldots = a_n = 0$ ist $\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n) = 0$ und $b_1 = \ldots = b_n = 1$ erfüllt die Behauptung. Sei also mindestens ein $a_i \neq 0$. Wir betrachten die Menge

$$I := \mathbb{Z}a_1 + \ldots + \mathbb{Z}a_n = \{a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n : b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Z}\}.$$

Wegen $a_i^2 \in I$ enthält I ein positives Element. Sei

$$d := \min\{e \in I : e > 0\}$$

und $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Z}$ mit $d = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$. Für $e \in \mathrm{gT}(a_1, \ldots, a_n)$ gilt $e \mid d$, also auch $\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n) \mid d$. Division mit Rest liefert für jedes i Zahlen $q_i \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq r_i < d$ mit $a_i = q_i d + r_i$. Wegen $r_i = a_i - q_i d \in I$ folgt $r_i = 0$ aus der Minimalität von d. Also ist $d \in \mathrm{gT}(a_1, \ldots, a_n)$ und $d \mid \mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n)$. Dies zeigt $\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n) = d = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$. Wegen $d \mid a_i$ sind die $\frac{a_i}{d}$ ganzzahlig. Aus

$$\frac{a_1}{d} b_1 + \ldots + \frac{a_n}{d} b_n = 1$$

folgt $\mathrm{ggT}(b_1, \ldots, b_n) = 1$. □

Lemma 21.19. *Für $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ existiert ein $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ mit erster Zeile (oder Spalte) $(a_1, \ldots, a_n)$ und $|\det A| = \mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n)$.*

[5] Mehr Details findet man in meinem Zahlentheorie-Skript

Beweis. Im Fall $a_1 = \ldots = a_n = 0$ erfüllt 0_n die Behauptung. Sei also o. B. d. A. $a_1 \neq 0$ (tausche notfalls Spalten/Zeilen). Da die Determinante linear in jeder Zeile (und Spalte) ist, können wir $\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n) = 1$ annehmen. Wir argumentieren durch Induktion nach n. Für $n = 1$ wähle man $A = (a_1)$. Sei nun $n \geq 2$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert $A_1 \in \mathbb{Z}^{(n-1)\times(n-1)}$ mit erster Zeile $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ und $|\det A_1| = \mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_{n-1}) > 0$. Sei $d := \det A_1$. Nach Bézout existieren $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $ds + a_n t = 1$. Sei $b_i := -a_i t/d \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Wir konstruieren $A_2 \in \mathbb{Z}^{(n-1)\times(n-1)}$ aus A_1, indem wir die erste Zeile von A_1 streichen und stattdessen $(b_1, \ldots, b_{n-1}) = -\frac{t}{d}(a_1, \ldots, a_{n-1})$ als letzte Zeile ergänzen. Dann gilt $\det A_2 = (-1)^{n+1} t$. Sei

$$A := \begin{pmatrix} & A_1 & & a_n \\ & & & 0 \\ b_1 & \cdots & b_{n-1} & s \end{pmatrix}.$$

Durch Entwicklung nach der letzten Spalte sieht man

$$\det A = (-1)^{n+1} a_n \det(A_2) + s \det(A_1) = a_n t + ds = 1.$$

Die analoge Aussage für Spalten erhält man durch Transposition. □

Bemerkung 21.20. Der nächste Satz liefert eine ganzzahlige Version der Zeilenstufenform (vgl. Satz 6.10).

Satz 21.21 (Hermite-Normalform)**.** *Für jede Matrix $A \in \mathbb{Z}^{n\times m}$ existiert genau eine nicht-negative Matrix $H = (h_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n\times m}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $H = SA$ für ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$.

(b) Nullzeilen befinden sich am unteren Ende von H.

(c) Für $\tau_i := \min\{1 \leq j \leq m : h_{ij} \neq 0\}$ gilt $\tau_1 < \tau_2 < \ldots$ (falls definiert) und $h_{j,\tau_i} < h_{i,\tau_i}$ für $j = 1, \ldots, i-1$.

Insbesondere ist H eine obere Dreiecksmatrix.

Beweis. Existenz: Der folgende Algorithmus überführt A in eine Matrix H mit den gewünschten Eigenschaften. Wir durchlaufen die Spalten von A von links nach rechts. Sei $(a_1, \ldots, a_n)$ die erste Spalte von A. Nach Bézout existieren $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Z}$ mit $d := a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$ und $\mathrm{ggT}(b_1, \ldots, b_n) = 1$. Nach Lemma 21.19 existiert ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ mit erster Zeile $(b_1, \ldots, b_n)$. Indem wir A durch SA ersetzen, erreichen wir $a_1 = d \geq 0$. Dabei werden $a_2, \ldots, a_n$ durch ganzzahlige Linearkombinationen von $a_1, \ldots, a_n$ ersetzt. Es gilt daher $a_1 \in \mathrm{gT}(a_2, \ldots, a_n)$. Für $i \geq 2$ existieren teilerfremde $b_1, b_i \in \mathbb{Z}$ mit $a_1 b_1 = a_i b_i$. Nach Lemma 21.19 existiert ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ mit i-ter Zeile $(b_1, 0, \ldots, 0, -b_i, 0, \ldots, 0)$. Nachdem wir A durch SA ersetzt haben, gilt $a_i = 0$. Auf diese Weise erreichen wir $a_2 = \ldots = a_n = 0$.

In der zweiten Spalte von A können wir analog $a_{22} \geq 0 = a_{32} = \ldots = a_{n2}$ erreichen. Im Fall $a_{22} = 0$ gehen wir zur dritten Spalte über. Im Fall $a_{12} < 0$ oder $a_{12} > a_{22}$ addieren bzw. subtrahieren wir a_{22} von a_{12} durch Multiplikation mit einer Elementarmatrix von links (dabei wird die erste Spalte von A nicht verändert). Indem man diesen Schritt genügend oft wiederholt, erhält man $0 \leq a_{12} < a_{22}$. Hat man alle Spalten auf diese Weise durchlaufen, so hat A (bzw. H) die gewünschten Eigenschaften.

Eindeutigkeit: Für die Eindeutigkeit von H orientieren wir uns am Beweis von Satz 6.10. Wir können o. B. d. A. annehmen, dass A selbst die Eigenschaften von H erfüllt. Sei a_i (bzw. s_i) die i-te Spalte von A (bzw. S). Dann ist $h_i = Sa_i$ die i-te Spalte von H. Sei $a_i \in \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$. Wir zeigen $a_i = h_i$ und $s_k = e_k$ durch Induktion nach k. Im Fall $k = 0$ ist $a_i = 0$ und $h_i = Sa_i = 0$. Sei nun die Behauptung

bis $k-1$ bereits bewiesen. Die erste Spalte (von links) von A, die nicht in $\langle e_1, \dots, e_{k-1}\rangle$ liegt, hat die Form $a_i = (a_{1i}, \dots, a_{ki}, 0, \dots, 0)^{\mathrm{t}}$ mit $a_{ki} > 0$. Nach Induktionsvoraussetzung und $\tau_k < \tau_{k+1}$ gilt $s_{jk}a_{ki} = h_{ji} = 0$ und $s_{jk} = 0$ für $j > k$. Da S invertierbar ist, folgt $s_{kk} \neq 0$ und $h_{ki} = s_{kk}a_{ki} \neq 0$. Daher muss $i = \tau_k$ und $h_{ki} > 0$ gelten. Für $j < k$ gilt

$$0 \leq h_{ji} = a_{ji} + s_{jk}a_{ki} < h_{ki} = a_{ki}.$$

Aus $0 \leq a_{ji} < a_{ki}$ folgt $s_{jk} = 0$. Wegen $\det S = \pm 1$ ist $s_{kk} = 1$ und $h_{ki} = a_{ki}$. Dies zeigt $s_k = e_k$ und $a_i = h_i$. □

Beispiel 21.22. Hat man ein Gitter Δ mit ganzzahliger Erzeugermatrix A, so kann man mit der Hermite-Normalform eine kanonische Basis bestimmen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 21.23.

(a) Die Eigenschaften der Hermite-Normalform machen keinen Gebrauch von der Ganzzahligkeit. Man kann daher auch rationale Matrizen in die Hermite-Normalform überführen, indem man zwischenzeitlich mit dem Hauptnenner aller Einträge multipliziert und den Algorithmus auf die entstandene ganzzahlige Matrix anwendet.

(b) In der Hermite-Normalform operiert man nur auf den Zeilen (also von links) einer gegebenen Matrix. Erlaubt man auch Spaltenoperationen, so gelangt man zu einer eindeutig bestimmten Diagonalmatrix.

Satz 21.24. *Für $A \in \mathbb{Z}^{n\times m}$ existieren eindeutig bestimmte nicht-negative Zahlen $d_1 \mid d_2 \mid \dots$ mit*

$$SAT = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \qquad \text{(Smith-Normalform)}$$

für gewisse $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ und $T \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$. Man nennt $d_1, \dots, d_{\min\{n,m\}}$ Elementarteiler *von A.*

Beweis. Existenz: Für die Nullmatrix ist die Behauptung klar (beachte $0 \mid 0$). Wie im Beweis von Satz 21.21 kann man $a_{11} > 0 = a_{21} = \dots = a_{n1}$ annehmen. Das gleiche Vorgehen mit den Spalten (also durch Multiplikation mit $T \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$ von rechts) führt zu $A = \mathrm{diag}(d, A_1)$. Ist nicht jeder Eintrag von A_1 durch d teilbar, so addiert man eine entsprechende Spalte von A_1 zur ersten Spalte von A (die entsprechende Elementarmatrix hat Determinante 1). Dann fängt man von vorne an und reduziert d auf diese Weise weiter. Nach endlich vielen Schritten sind alle Einträge von A_1 durch d teilbar. Nun wendet man das Verfahren auf A_1 an. Dabei bleibt die Teilbarkeit durch d in jedem Schritt erhalten. Am Ende erhält man die gesuchte Diagonalmatrix.

Eindeutigkeit: Sei $D_k(A)$ der ggT aller Determinanten von $k \times k$-Untermatrizen von A. Die Spalten von AT sind ganzzahlige Linearkombinationen der Spalten von A. Dies gilt auch für $k \times k$-Untermatrizen. Also ist

$$D_k(A) \mid D_k(AT) \mid D_k(ATT^{-1}) = D_k(A).$$

Analog gilt $D_k(A) = D_k(SA)$ und daher $D_k(A) = D_k((d_i\delta_{ij})) = d_1 \dots d_k$. Also sind die Elementarteiler eindeutig durch A bestimmt. □

Bemerkung 21.25.

(a) Ist A quadratisch, so ist $|\det A|$ das Produkt der Elementarteiler von A. Der obige Beweis zeigt wie man die Elementarteiler durch Unterdeterminanten charakterisieren kann.

(b) Im Gegensatz zum Gauß-Algorithmus ist das Verfahren für die Smith-Normalform wesentlich aufwendiger.

(c) Die Smith-Normalform erlaubt es, ganzzahlige lineare Gleichungssysteme $Ax = b$ zu lösen. Sei dafür $SAT = D = (d_i\delta_{ij})$ wie in Satz 21.24 mit $d_1, \ldots, d_k > 0 = d_{k+1} = \ldots = d_{\min\{n,m\}}$. Das einfachere System $Dy = Sb = (b_1, \ldots, b_n)^{\mathrm{t}}$ ist genau dann lösbar, wenn $d_i \mid b_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt. Die Lösungen lauten dann $y = (b_1/d_1, \ldots, b_k/d_k, *, \ldots, *)$, wobei $*$ für eine beliebige ganze Zahl steht. Die Lösungen von $Ax = b$ erhält man durch $x = Ty$.

Beispiel 21.26. Wir suchen alle $x \in \mathbb{Z}^3$ mit

$$Ax := \begin{pmatrix} 21 & -5 & 26 \\ 3 & -1 & 4 \\ -8 & 2 & -10 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 47 \\ 7 \\ -18 \end{pmatrix} =: b. \tag{21.1}$$

Der Algorithmus im Beweis von Satz 21.24 (modulo offensichtlicher Vereinfachungen) ergibt:

$$\begin{pmatrix} 21 & -5 & 26 \\ 3 & -1 & 4 \\ -8 & 2 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -5 & 21 & 26 \\ 2 & -8 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 6 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: D.$$

Für

$$S := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{Z}), \qquad T := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{Z})$$

gilt $SAT = D$. Daher ist (21.1) äquivalent zu

$$Dy = Sb = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $y := T^{-1}x$. Dies zeigt $y = (-3, -2, a)$ mit $a \in \mathbb{Z}$. Also ist $x = Ty = (a - 4, 5 - a, 6 - a)$ für $a \in \mathbb{Z}$.

Satz 21.27. *Seien $\Lambda \subseteq \Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ Gitter. Dann existiert eine Basis $b_1, \ldots, b_k$ von Δ und eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $d_1 \mid d_2 \mid \ldots \mid d_l$, sodass $d_1b_1, \ldots, d_lb_l$ eine Basis von Λ ist.*

Beweis. Existenz: Seien $a_1, \ldots, a_k$ und $c_1, \ldots, c_l$ zunächst beliebige Basen von Δ bzw. Λ. Dabei gilt $l = \operatorname{rk}\Lambda \leq \operatorname{rk}\Delta = k$. Wir schreiben $c_i = \sum_{j=1}^{k} x_{ij}a_j$ mit $x_{ij} \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, \ldots, l$ und setzen $A := (x_{ij}) \in \mathbb{Z}^{l\times k}$. Nach Satz 21.24 existieren $S = (s_{ij}) \in \mathrm{GL}(l, \mathbb{Z})$ und $T = (t_{ij}) \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{Z})$ mit $A = S(\delta_{ij}d_i)T$ und $d_1 \mid \ldots \mid d_l$. Die Elemente $b_i := \sum_{j=1}^{k} t_{ij}a_j \in \Delta$ für $i = 1, \ldots, k$ bilden eine Basis von Δ. Wegen

$$c_i = \sum_{j=1}^{k} x_{ij}a_j = \sum_{j=1}^{k}\sum_{m=1}^{l} s_{im}d_m t_{mj}a_j = \sum_{m=1}^{l} s_{im}d_m b_m$$

ist $\{d_1 b_1, \ldots, d_l b_l\}$ eine Basis von Λ.

Eindeutigkeit: Sei $b'_1, \ldots, b'_k$ eine weitere Basis von Δ und $d'_1 \mid \ldots \mid d'_l$, sodass $d'_1 b'_1, \ldots, d'_l b'_l$ eine Basis von Λ ist. Dann existieren $S = (s_{ij}) \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{Z})$ und $T = (t_{ij}) \in \mathrm{GL}(l, \mathbb{Z})$ mit $b'_i = \sum_{j=1}^{k} s_{ij} b_j$ für $1 \le i \le k$ und $d'_i b'_i = \sum_{j=1}^{l} t_{ij} d_j b_j$ für $1 \le i \le l$. Ein Koeffizientenvergleich zeigt $d'_i s_{ij} = t_{ij} d_j$ für $1 \le i, j \le l$ und $s_{ij} = 0$ für $l < j \le k$. Für die $l \times k$-Matrizen gilt

$$(\delta_{ij} d'_i) S = T(\delta_{ij} d_i).$$

Aus der Eindeutigkeit der Smith-Normalform folgt $d'_i = d_i$ für $i = 1, \ldots, l$. □

21.4 Sätze von Hermite und Minkowski

Lemma 21.28. *Jedes Gitter $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ besitzt eine Basis $b_1, \ldots, b_k$ mit $|b_1| = \min \Delta$.*

Beweis. Sei $b_1, \ldots, b_k \in \Delta$ eine beliebige Basis. Ein kürzester Vektor $v \in \Delta$ hat die Form $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_k b_k$ mit teilerfremden $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{Z}$. Nach Lemma 21.19 existiert ein $S \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{Z})$ mit erster Spalte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Durch Basiswechsel (Lemma 21.7) kann man daher $|b_1| = |v| = \min \Delta$ annehmen. □

Satz 21.29 (Hermite). *Für jedes Gitter $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ vom Rang k gilt*

$$\boxed{\min \Delta \le \left(\frac{4}{3}\right)^{(k-1)/4} \sqrt[k]{\operatorname{disc} \Delta}.}$$

Beweis. Sei $b_1, \ldots, b_k$ eine Basis von Δ und $G = (g_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ die entsprechende Gram-Matrix. Nach Lemma 21.28 können wir $\min \Delta = |b_1| = \sqrt{g_{11}}$ annehmen. Für $k = 1$ gilt $\sqrt{g_{11}} = \operatorname{disc} \Delta$ wie behauptet. Sei $k \ge 2$ und die Behauptung für $k - 1$ bereits bewiesen. Die Vektoren

$$c_i := b_i - \frac{[b_i, b_1]}{|b_1|^2} b_1 = b_i - \frac{g_{1i}}{g_{11}} b_1 \in \mathbb{R}^n$$

für $2 \le i \le k$ sind orthogonal zu b_1. Wir betrachten die Gitter Λ mit Basis $c_2, \ldots, c_k$ und Λ_1 mit Basis $b_1, c_2, \ldots, c_k$. Für die Gram-Matrizen gilt $G_{\Lambda_1} = S^{\mathrm{t}} G S = \operatorname{diag}(g_{11}, G_\Lambda)$, wobei

$$S := \begin{pmatrix} 1 & -g_{12}/g_{11} & \cdots & -g_{1k}/g_{11} \\ & \ddots & 0 & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{Q})$$

Determinante 1 hat. Dies zeigt $\operatorname{disc} \Delta = \operatorname{disc} \Lambda_1 = \sqrt{g_{11}} \operatorname{disc}(\Lambda)$. Nach Induktion existiert ein $y = x_2 c_2 + \ldots + x_k c_k \in \Lambda$ mit $x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{Z}$ und

$$|y| = \min \Lambda \le \left(\frac{4}{3}\right)^{(k-2)/4} \left(\frac{\operatorname{disc} \Delta}{\sqrt{g_{11}}}\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Außerdem existiert ein $x_1 \in \mathbb{Z}$ mit

$$\mu := \left| x_1 + \frac{g_{12}}{g_{11}} x_2 + \ldots + \frac{g_{1k}}{g_{11}} x_k \right| \le \frac{1}{2}.$$

Man rechnet leicht $S^{-1} = 2 \cdot 1_k - S$ nach (die Einträge außerhalb der Hauptdiagonale wechseln das Vorzeichen). Für $v := x_1 b_1 + \ldots + x_k b_k \in \Delta$ gilt daher

$$\begin{aligned} g_{11} = (\min \Delta)^2 \le |v|^2 = xGx^{\mathrm{t}} = xS^{-\mathrm{t}} G_{\Lambda_1} S^{-1} x^{\mathrm{t}} = \mu^2 g_{11} + (x_2, \ldots, x_k) G_\Lambda (x_2, \ldots, x_k)^{\mathrm{t}} \\ \le \frac{g_{11}}{4} + |y|^2 \le \frac{g_{11}}{4} + \Big(\frac{4}{3}\Big)^{(k-2)/2} \Big(\frac{\operatorname{disc}(\Delta)^2}{g_{11}}\Big)^{\frac{1}{k-1}}. \end{aligned}$$

Umstellen ergibt

$$g_{11} \le \Big(\frac{4}{3}\Big)^{k/2} \Big(\frac{\operatorname{disc}(\Delta)^2}{g_{11}}\Big)^{\frac{1}{k-1}}, \qquad g_{11}^k \le \Big(\frac{4}{3}\Big)^{k(k-1)/2} \operatorname{disc}(\Delta)^2. \qquad \square$$

Beispiel 21.30. Ein Gitter mit Gram-Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ liefert Gleichheit in Hermites Schranke. Wir werden den exponentiellen Faktor $(4/3)^{(k-1)/4}$ durch den polynomialen Faktor $\sqrt{k}$ ersetzen.

Satz 21.31 (Minkowskis Linearformensatz)**.** *Sei $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gitter mit vollem Rang. Für alle $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $d_1 \ldots d_n \ge \operatorname{disc} \Delta$ existiert ein $x \in \Delta \setminus \{0\}$ mit $|x_i| \le d_i$ für $i = 1, \ldots, n$.*

Beweis (Rado). Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Erzeuger-Matrix von Δ.

Fall 1: $\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$.
Nach der Hermite-Normalform können wir annehmen, dass A eine obere Dreiecksmatrix ist. Dann ist

$$d_1 \ldots d_n \ge \operatorname{disc} \Delta = |\det A| = |a_{11} \ldots a_{nn}|.$$

Für ganze Zahlen $0 \le \alpha_i < |a_{ii}|$ und $0 \le \delta_i \le d_i$ betrachten wir das Gleichungssystem $xA = \alpha + \delta$. Wir zeigen durch Induktion nach n, dass bei gegebenem δ genau ein α existiert, sodass das System eine ganzzahlige Lösung x besitzt. Im Fall $n = 1$ sind α_1 und x_1 durch

$$\alpha_1 = x_1 a_{11} - \delta_1 \equiv -\delta_1 \pmod{|a_{11}|}$$

eindeutig bestimmt. Sei $n \ge 2$ und $B := A_{nn}$. Induktiv existieren eindeutige $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, sodass $x_1, \ldots, x_{n-1}$ eine ganzzahlige Lösung von $xB = \alpha + \delta$ ist. Nun sind α_n und x_n durch

$$\alpha_n = x_1 a_{1n} + \ldots + x_n a_{nn} - \delta_n \equiv a_{1n} x_1 + \ldots + x_{n-1} a_{n-1,n} - \delta_n \pmod{|a_{nn}|}$$

eindeutig bestimmt (wegen $a_{ni} = 0$ für $i < n$ kommt x_n nur in dieser Gleichung vor).

Offenbar gibt es $(\lfloor d_1 \rfloor + 1) \ldots (\lfloor d_n \rfloor + 1) > d_1 \ldots d_n$ mögliche Vektoren δ, aber nur $|a_{11} \ldots a_{nn}| \le d_1 \ldots d_n$ mögliche α. Für mindestens ein α müssen also $\delta \ne \delta'$ existieren, sodass $yA = \alpha + \delta$ und $zA = \alpha + \delta'$ ganzzahlige Lösungen $y \ne z$ haben. Für $x := (y - z)A \in \Delta \setminus \{0\}$ gilt $|x_i| = |\delta_i - \delta_i'| \le d_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Fall 2: $\Delta \subseteq \mathbb{Q}^n$.
Sei m ein gemeinsamer Nenner aller Einträge in $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$. Dann kann man Fall 1 auf $m\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ und $md_1, \ldots, md_n$ anwenden. Dies liefert ein $x \in m\Delta \setminus \{0\}$ mit $|x_i| \le md_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Offenbar erfüllt $\frac{1}{m} x \in \Delta$ die Behauptung.

Fall 3: $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$.
Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ mit $\lim_{k \to \infty} A_k = A$ und $|\det A_k| \le |\det A|$ für $k \in \mathbb{N}$ (das geht leicht durch Skalierung einer Zeile). Nach Fall 2 existieren $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ mit $|(x_k A_k)_i| \le d_i$ für $k \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \ldots, n$. Wegen $|x_k| = |(x_k A_k) A_k^{-1}| \le |d| |A_k^{-1}|$ ist die Folge $(x_k)_k$ beschränkt. Sie muss daher eine konstante Teilfolge $x := x_{k_1} = x_{k_2} = \ldots$ enthalten. Nun gilt

$$|(xA)_i| = \lim_{j \to \infty} |(x A_{k_j})_i| \le d_i$$

für $i = 1, \ldots, n$. $\square$

Bemerkung 21.32. Der Linearformensatz ist ein Spezialfall von *Minkowskis Gitterpunktsatz*, der die Existenz von Gittervektoren in gewissen konvexen Mengen garantiert. Das entsprechende geometrische Argument wird in Aufgabe III.29 skizziert.

Folgerung 21.33. *Für jedes Gitter Δ vom Rang k gilt* $\boxed{\min \Delta \leq \sqrt{k}\sqrt[k]{\operatorname{disc}\Delta}.}$

Beweis. Da die Aussage nur von der Gram-Matrix von Δ abhängt, können wir $\Delta \subseteq \mathbb{R}^k$ nach Beispiel 21.4 annehmen. Nach dem Linearformensatz existiert ein $x \in \Delta$ mit $|x_i| \leq \sqrt[k]{\operatorname{disc}\Delta}$ für $i = 1, \ldots, k$. Es folgt

$$\min \Delta \leq |x| \leq \sqrt{k \operatorname{disc}(\Delta)^{2/k}} = \sqrt{k}\sqrt[k]{\operatorname{disc}\Delta}. \qquad \square$$

Bemerkung 21.34. Eine Rechnung zeigt, dass die Abschätzung aus Folgerung 21.33 für $k \geq 23$ schärfer ist als Hermites Schranke. Beide Schranken sind für $k \geq 3$ jedoch nicht optimal. Die kleinste Zahl γ_k mit $\min \Delta \leq \sqrt{\gamma_k}\sqrt[k]{\operatorname{disc}\Delta}$ für alle Gitter Δ vom Rang k nennt man die k-te *Hermite-Konstante* (vgl. Bemerkung 21.50). Mit Maßtheorie hat Blichfeldt

$$\gamma_k \leq \frac{2}{\pi}\Gamma\Big(\frac{k}{2}+2\Big)^{2/k} \leq \frac{2}{\pi}\Big(\Big\lfloor\frac{k+3}{2}\Big\rfloor!\Big)^{2/k}$$

bewiesen, wobei Γ die eulersche Gammafunktion ist. Bislang kennt man nur die folgenden Werte:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	24
γ_n^n	1	$\frac{4}{3}$	2	4	8	$\frac{64}{3}$	64	2^8	2^{48}

Die Werte $\gamma_2^2 = 4/3$ und $\gamma_3^3 = 2$ werden in Satz 21.59 und Satz A.13 hergeleitet. Für $n = 8$ liefert E_8 aus Bemerkung 21.11 den optimalen Wert $\gamma_8 = 2$.

21.5 Der LLL-Algorithmus

Bemerkung 21.35. Viele Probleme für Gitter Δ lassen sich algorithmisch lösen, indem man eine Basis aus möglichst „kurzen“, „nahezu orthogonalen“ Vektoren konstruiert. Über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ kann man mit Gram-Schmidt stets eine Orthonormalbasis konstruieren. Über $\mathbb{Z}$ ist die Situation komplizierter. Im ersten Schritt bringen wir die Gram-Matrix auf eine Blockdiagonalgestalt mit möglichst kleinen Blöcken.

Definition 21.36. Ein Gitter $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *zerlegbar*, falls Gitter $\Delta_1, \Delta_2 \subsetneq \Delta$ mit $\Delta = \Delta_1 \oplus \Delta_2$ und $\Delta_1 \subseteq \Delta_2^\perp$ (Definition 11.13) existieren. Ggf. nennt man $\Delta = \Delta_1 \perp \Delta_2$ eine *orthogonale Zerlegung*. Ist $\Delta \neq \{0\}$ nicht zerlegbar, so heißt Δ *unzerlegbar*.

Bemerkung 21.37. Ein Gitter Δ ist genau dann zerlegbar, wenn eine Basis B mit ${}_B[\Delta]_B = \operatorname{diag}(A_1, A_2)$ existiert.

Satz 21.38 (Eichler)**.** *Jedes Gitter Δ besitzt eine orthogonale Zerlegung $\Delta = \Delta_1 \perp \ldots \perp \Delta_k$ in bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmte unzerlegbare Gitter $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$.*

Beweis. Da der Rang nur endlich oft kleiner werden kann, lässt sich Δ stets in unzerlegbare Gitter $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ orthogonal zerlegen. Wir nennen $x \in \Delta \setminus \{0\}$ *minimal*, falls x nicht die Summe kürzerer Vektoren ist, d. h. für $y, z \in \Delta$ mit $x = y + z$ gilt $|y| \geq |x|$ oder $|z| \geq |x|$. Da nur endlich viele Vektoren in Δ eine vorgegebene Norm haben (Satz 21.13), lässt sich jedes $x \in \Delta$ als Summe minimaler Elemente schreiben. Wegen $|x_1 + \ldots + x_k|^2 = |x_1|^2 + \ldots + |x_k|^2$ für $x_i \in \Delta_i$ liegt jedes minimale Element in einem Δ_i. Sei $x \in \Delta_i$ minimal als Element von Δ_i. Seien $y, z \in \Delta$ mit $x = y + z$. Seien $y = y_1 + \ldots + y_k$ und $z = z_1 + \ldots + z_k$ die eindeutigen Zerlegungen mit $y_j, z_j \in \Delta_j$ für $j = 1, \ldots, k$. Dann gilt $x = y_i + z_i$ und

$$|y|^2 = |y_1|^2 + \ldots + |y_k|^2 \geq |y_i|^2 \geq |x|^2$$

oder $|z| \geq |x|$. Also ist x auch minimal in Δ.

Sei $M \subseteq \Delta$ die Menge aller minimalen Elemente. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf M durch

$$x \sim y \ :\Longleftrightarrow\ \exists z_1, \ldots, z_s \in M : x = z_1, y = z_s, [z_i, z_{i+1}] \neq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, s-1.$$

Elemente aus unterschiedlichen Äquivalenzklassen sind orthogonal und damit linear unabhängig. Daher kann es nur endlich viele Äquivalenzklassen $M_1, \ldots, M_l \subseteq M$ geben. Jedes M_i liegt in einem Δ_j und erzeugt als Gruppe ein Gitter $\Lambda_i \subseteq \Delta_j$ (die Menge aller ganzzahligen Linearkombinationen von Elementen aus M_i). Nach Definition ist

$$\Lambda_1 + \ldots + \Lambda_l = \Lambda_1 \perp \ldots \perp \Lambda_l.$$

Existiert ein $x \in \Delta_j \setminus \Lambda_i$, so kann man x in minimale Elemente (innerhalb Δ_j) zerlegen, wovon mindestens eins nicht in M_i liegt. Dann müsste Δ_j noch weitere Äquivalenzklassen von M enthalten und man hätte eine orthogonale Zerlegung $\Delta_j = \Lambda_i \perp \Gamma$. Dies widerspricht der Unzerlegbarkeit von Δ_j. Also ist $\Delta_j = \Lambda_i$. Analog folgt $k = l$ und $\Delta_i = \Lambda_i$ für $i = 1, \ldots, k$ nach Umnummerierung. □

Satz 21.39. *Für jedes unzerlegbare ganze Gitter Δ vom Rang $m \geq 2$ gilt* $\min \Delta \geq \sqrt{2}$.

Beweis. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ die Gram-Matrix von Δ bzgl. einer Basis. Angenommen es existiert ein $x \in \mathbb{Z}^m$ mit $xAx^{\mathrm{t}} = 1$. Dann ist $\mathrm{ggT}(x_1, \ldots, x_m) = 1$. Nach Lemma 21.19 existiert ein $S \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$ mit erster Spalte x. Indem wir A durch $S^{\mathrm{t}}AS$ ersetzen, erreichen wir $a_{11} = 1$. Nun existiert eine obere Dreiecksmatrix $T \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$ mit Einsen auf der Hauptdiagonale, sodass $T^{\mathrm{t}}AT = \mathrm{diag}(1, A_1)$ mit $A_1 \in \mathbb{Z}^{(m-1)\times(m-1)}$ gilt. Dies widerspricht Bemerkung 21.37. □

Lemma 21.40. *Sei $\Delta \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Gitter mit Basis $v_1, \ldots, v_k$. Sei $b_1, \ldots, b_k$ die Orthogonalbasis aus dem Gram-Schmidt-Verfahren angewendet auf $v_1, \ldots, v_k$ (ohne Normierung). Dann gilt* $\mathrm{disc}\,\Delta = |b_1| \ldots |b_k|$.

Beweis. Sei $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ die Erzeugermatrix mit den Zeilen $v_1, \ldots, v_k$. Sei B die Matrix mit Zeilen $b_1, \ldots, b_k$. Nach dem Gram-Schmidt-Verfahren existiert eine untere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{k \times k}$ mit Einsen auf der Hauptdiagonale und $RA = B$. Wegen $\det R = 1$ gilt

$$\mathrm{disc}\,\Delta = \sqrt{\det(AA^{\mathrm{t}})} = \sqrt{\det(BB^{\mathrm{t}})} = \sqrt{\det(\mathrm{diag}(|b_1|^2, \ldots, |b_k|^2))} = |b_1| \ldots |b_k|. \qquad \square$$

Bemerkung 21.41.

(a) Im Folgenden sei $\lfloor x \rceil \in \mathbb{Z}$ der gerundete Wert von $x \in \mathbb{R}$, d. h. $|x - \lfloor x \rceil| \leq \frac{1}{2}$ (es spielt keine Rolle, ob man $*.5$ auf- oder abrundet).

(b) Seien $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig und $b_1, \dots, b_k$ die dazu gehörige Gram-Schmidt-Orthogonalbasis. Dann existiert ein $w_k \in \langle b_1, \dots, b_{k-1}\rangle = \langle v_1, \dots, v_{k-1}\rangle$ mit $v_k = b_k + w_k$. Daher ist b_k das Bild der Projektion von v_k auf $\langle b_1, \dots, b_{k-1}\rangle^\perp$. Insbesondere ändert sich b_k nicht, wenn man v_k durch ein Element aus $v_k + \langle v_1, \dots, v_{k-1}\rangle$ ersetzt.

Definition 21.42. Sei $\frac{1}{4} < \delta < 1$. Sei $v_1, \dots, v_k$ eine Basis eines Gitters $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ und $b_1, \dots, b_k$ die dazu gehörige Gram-Schmidt-Orthogonalbasis. Sei $\mu_{ij} := \frac{[v_i, b_j]}{|b_j|^2}$ für $j < i$. Man nennt $v_1, \dots, v_k$ *δ-reduziert*, falls die folgenden Bedingungen gelten:

- (Längen-Bedingung) $|\mu_{ij}| \leq \frac{1}{2}$ für alle $1 \leq j < i \leq k$,
- (Lovász-Bedingung) $|b_i|^2 \geq (\delta - \mu_{i,i-1}^2)|b_{i-1}|^2$ für alle $2 \leq i \leq k$.

Satz 21.43 (LLL-Algorithmus[6])**.** *Der folgende Algorithmus überführt eine Basis $v_1, \dots, v_k$ eines Gitters $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ in eine δ-reduzierte Basis.*

(1) Berechne die Gram-Schmidt-Orthogonalbasis $b_1, \dots, b_k$ aus $v_1, \dots, v_k$.

(2) Berechne μ_{ij} für $1 \leq j < i \leq k$.

(3) Setze $i = 2$.

(4) Solange $i \leq k$ wiederhole:

(a) Für $j = i-1, i-2, \dots, 1$:

- *Ersetze v_i durch $v_i - \lfloor \mu_{ij} \rceil v_j$.*
- *Aktualisiere μ_{il} für $l = 1, \dots, j$.*

(b) Wenn die Lovász-Bedingung für v_i gilt: erhöhe i.

(c) Anderenfalls: tausche v_i mit v_{i-1} und gehe zu Schritt (1).

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass der Algorithmus terminiert. Die Zahlen

$$d_s := |b_1| \dots |b_s| \qquad\qquad D := d_1 \dots d_k$$

ändern sich nur in Schritt (1). Angenommen v_i verletzt die Lovász-Bedingung, d. h. $|b_i|^2 < (\delta - \mu_{i,i-1}^2)|b_{i-1}|^2$. Durch den Tausch $v_i \leftrightarrow v_{i-1}$ bleiben $d_1, \dots, d_{i-2}$ unberührt, während b_{i-1} durch

$$b'_{i-1} = v_i - \sum_{j<i-1} \mu_{ij} b_j = b_i + \mu_{i,i-1} b_{i-1}$$

ersetzt wird. Wegen $[b_{i-1}, b_i] = 0$ ist

$$|b'_{i-1}|^2 = |b_i|^2 + \mu_{i,i-1}^2 |b_{i-1}|^2 < \delta |b_{i-1}|^2.$$

Daher wird d_{i-1} durch

$$|b_1| \dots |b_{i-2}||b'_{i-1}| < \sqrt{\delta} d_{i-1}$$

[6] Gesprochen: Tripel-L-Algorithmus. Benannt nach A. Lenstra, H. Lenstra und L. Lovász.

ersetzt. Für $j \geq i$ erzeugen $v_1, \ldots, v_j$ und $v_1, \ldots, v_i, v_{i-1}, \ldots, v_j$ offensichtlich das gleiche Gitter Δ_j. Daher ändern sich $d_i, \ldots, d_k$ nach Lemma 21.40 nicht. Insgesamt wird D also um mindestens den Faktor $\sqrt{\delta} < 1$ verkleinert. Nach Lemma 21.40 und Hermite gilt

$$d_j = \operatorname{disc} \Delta_j \geq \Big(\frac{3}{4}\Big)^{j(j-1)/4} \big(\min \Delta_j\big)^j \geq \Big(\frac{3}{4}\Big)^{j(j-1)/4} \big(\min \Delta\big)^j.$$

Daher ist D nach unten durch eine positive Konstante beschränkt, die nur von Δ abhängt. Dies zeigt, dass die Lovász-Bedingung nur endlich oft verletzt sein kann. Also wird nach endlich vielen Schritten $i = k + 1$ erreicht und der Algorithmus terminiert.

Am Ende des Algorithmus ist die Lovász-Bedingung für $v_1, \ldots, v_k$ erfüllt. In Schritt (4) wird v_i verändert. Nach Bemerkung 21.41 bleiben $b_1, \ldots, b_k$ davon unberührt. Für $j = i - 1$ ersetzt man μ_{ij} durch

$$\frac{[v_i - \lfloor \mu_{ij} \rceil v_j, b_j]}{|b_j|^2} = \frac{[v_i, b_j]}{|b_j|^2} - \lfloor \mu_{ij} \rceil = \mu_{ij} - \lfloor \mu_{ij} \rceil$$

(beachte $v_j \in b_j + \langle b_1, \ldots, b_{j-1} \rangle$). Anschließend gilt $|\mu_{i,i-1}| \leq 1/2$. Für $j = i - 2$ erhält man analog $|\mu_{i,i-2}| \leq 1/2$, während $\mu_{i,i-1}$ nicht mehr verändert wird, da j absteigend durchlaufen wird. Am Ende gilt $|\mu_{ij}| \leq 1/2$ für alle $j < i$, d. h. die Längen-Bedingung ist erfüllt. Insgesamt ist $v_1, \ldots, v_k$ δ-reduziert. □

Bemerkung 21.44. Man kann zeigen, dass der LLL-Algorithmus polynomiale Laufzeit in k besitzt. Größere Werte von δ (d. h. nahe bei 1) liefern kürzere Basisvektoren bei längerer Laufzeit. In vielen Implementierungen wird $\delta = 3/4$ als Kompromiss gewählt. Tatsächlich terminiert der Algorithmus auch für $\delta = 1$, aber nicht unbedingt in polynomialer Laufzeit (ohne Beweis).

Satz 21.45. *Sei $v_1, \ldots, v_k$ eine δ-reduzierte Basis eines Gitters $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei $\rho := \frac{2}{\sqrt{4\delta - 1}}$. Dann gilt*

$$|v_1| \leq \rho^{k-1} \min \Delta, \qquad |v_1| \ldots |v_k| \leq \rho^{k(k-1)/2} \operatorname{disc}(\Delta).$$

Beweis. Sei $b_1, \ldots, b_k$ die Gram-Schmidt-Orthogonalbasis zu $v_1, \ldots, v_k$. Es gilt $\sigma := \rho^2 = \frac{1}{\delta - 1/4} > \frac{4}{3}$. Aus der δ-Reduktion folgt

$$|b_i|^2 \geq (\delta - \mu_{i,i-1}^2)|b_{i-1}|^2 \geq \sigma^{-1}|b_{i-1}|^2 \geq \ldots \geq \sigma^{j-i}|b_j|^2$$

für $j < i$. Sei $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_i v_i = \eta_1 b_1 + \ldots + \eta_i b_i \in \Delta$ ein kürzester Vektor mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_i \in \mathbb{Z}$, $\eta_1, \ldots, \eta_i \in \mathbb{R}$ und $\lambda_i \neq 0$. Nach Konstruktion von $b_1, \ldots, b_k$ gilt $\eta_i = \lambda_i$. Insbesondere ist $|\eta_i| \geq 1$. Da $b_1, \ldots, b_k$ paarweise orthogonal sind, folgt

$$(\min \Delta)^2 = |v|^2 = \eta_1^2|b_1|^2 + \ldots + \eta_i^2|b_i|^2 \geq |b_i|^2 \geq \sigma^{1-i}|b_1|^2 = \sigma^{1-i}|v_1|^2 \geq \sigma^{1-k}|v_1|^2$$

und $|v_1| \leq \rho^{k-1} \min \Delta$. Wir zeigen

$$1 + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{i-1} \sigma^j \leq \sigma^{i-1}$$

durch Induktion nach i. Für $i = 1$ ist $1 = \sigma^0$. Sei $i \geq 2$ und die Behauptung für $i - 1$ bereits bewiesen. Dann ist

$$1 + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{i-1} \sigma^j \leq \sigma^{i-2} + \frac{1}{4}\sigma^{i-1} = \sigma^{i-2}\Big(1 + \frac{1}{4}\sigma\Big) \leq \sigma^{i-1}.$$

Wie oben ist daher

$$|v_i|^2 = \left|b_i + \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{ij} b_j\right|^2 = |b_i|^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{ij}^2 |b_j|^2 \leq |b_i|^2 + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{i-1} \sigma^{i-j} |b_i|^2 \leq \sigma^{i-1} |b_i|^2.$$

Es folgt

$$|v_1| \dots |v_k| \leq \rho^{k(k-1)/2} |b_1| \dots |b_k| \overset{21.40}{=} \rho^{k(k-1)/2} \operatorname{disc}(\Delta). \qquad \square$$

Bemerkung 21.46. Für $\delta = 3/4$ erhält man $\rho = \sqrt{2} \approx 1.41$. Mit $\delta \to 1$ nähert sich ρ dem Faktor $2/\sqrt{3} \approx 1.15$ aus der Hermite-Schranke an. Darauf kommen wir in Bemerkung 21.67 zurück. Die Abschätzung für $|v_1|$ suggeriert, dass v_1 unter den Basisvektoren der kürzeste ist. Dies ist jedoch nicht immer der Fall wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 21.47. Wir betrachten ein Gitter Δ mit Gram-Matrix

$$\begin{pmatrix} 14 & 7 & 5 & 3 & -2 \\ 7 & 11 & 3 & 6 & 3 \\ 5 & 3 & 17 & -5 & 4 \\ 3 & 6 & -5 & 11 & 3 \\ -2 & 3 & 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

und $\operatorname{disc} \Delta = 169$. Hermite liefert $\min \Delta \leq \frac{4}{3} \sqrt[5]{169} \approx 3.72$. Der LLL-Algorithmus mit $\delta = 3/4$ bzw. $\delta = 9/10$ liefert reduzierte Basen mit Gram-Matrizen

$$\begin{pmatrix} 14 & 7 & 4 & -4 & 5 \\ 7 & 11 & 1 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 7 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & -1 & 10 & 1 \\ 5 & -1 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 11 & -5 & -4 & 3 \\ -1 & -5 & 10 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 11 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Es gibt bis auf Vorzeichen nur einen kürzesten Vektor und $\min \Delta = \sqrt{7} \approx 2.65$.

21.6 Quadratische Formen

Bemerkung 21.48. Wir verändern unseren Blickwinkel auf Gitter, indem wir die Erzeugermatrix vernachlässigen und stattdessen nur noch Gram-Matrizen betrachten. Wir kennen dann zwar den Rang, aber nicht mehr den übergeordneten euklidischen Raum. Die Situation ist hier ähnlich wie mit Bilinearformen und deren Gram-Matrizen. In Bemerkung 12.4 hatten wir quadratische Formen über Bilinearformen eingeführt. Wir wiederholen die Definition mit $\mathbb{Z}$ anstelle eines Körpers.

Definition 21.49.

- Für eine symmetrische Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nennt man die Abbildung

$$q = q_C \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x C x^{\mathrm{t}} = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$$

  eine *quadratische Form* vom Rang n mit *Gram-Matrix* C.

- Man nennt q_C
  - *nicht-ausgeartet*, falls $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.
  - *positiv* (bzw. *negativ*), falls C positiv (bzw. negativ) definit ist, d. h. $q(x) > 0$ (bzw. $q(x) < 0$) für alle $x \neq 0$. Ist q positiv, so nennt man

    $$\min q := \min\bigl\{q(x) : x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}\bigr\}$$

    das *Minimum* von q.
  - *ganz*, falls $C \in \mathbb{Z}^{n\times n}$.
- Man nennt $\det q := \det C$ die *Determinante* von q.
- Zwei quadratische Formen q_A und q_B heißen *äquivalent*, falls ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ mit $S^{\mathrm{t}}AS = B$ existiert.

Bemerkung 21.50.

(a) Die Symmetrie von C ist unwesentlich, denn für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist $C := \frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{t}})$ symmetrisch mit $q_A = q_C$. Ist A ganzzahlig, so muss C jedoch nicht ganzzahlig sein. Manche Autoren definieren ganze quadratische Formen daher durch die Bedingung $q_C(x) \in \mathbb{Z}$ für alle $x \in \mathbb{Z}^n$. Dies bedeutet $c_{ii} \in \mathbb{Z}$ und $2c_{ij} \in \mathbb{Z}$ für alle $i \neq j$.

(b) Ist q ausgeartet, so kann man durch Übergang zu einer äquivalenten Form eine Variable eliminieren und den Rang reduzieren. Wir sind hauptsächlich an positiven quadratischen Formen interessiert (vgl. Aufgabe III.31). Ist q negativ, so kann man zur positiven Form $-q$ wechseln und Resultate übertragen.

(c) Jedes Gitter Δ mit Gram-Matrix G definiert eine positive quadratische Form q_G mit $q_G(x_1, \ldots, x_k) = |x|^2$ für alle $x \in \Delta$, wobei $x_1, \ldots, x_k$ die Koeffizienten bzgl. der gewählten Basis sind. Ein Basiswechsel von Δ entspricht nach Lemma 21.7 dem Übergang zu einer äquivalenten quadratischen Form. Umgekehrt haben wir in Beispiel 21.4 gesehen, wie man aus einer positiv definiten Matrix ein Gitter konstruiert. Auf diese Weise kann man zwischen Gittern und positiven quadratischen Formen hin- und herwechseln. Allerdings gibt es Gitter mit der gleichen Gram-Matrix in unterschiedlichen Dimensionen. Man beachte, dass $\min q_G = (\min \Delta)^2$ und $\det q = \mathrm{disc}(\Delta)^2$ gilt. Die Hermite-Schranke hat deshalb die Form

$$\min q \leq \Bigl(\frac{4}{3}\Bigr)^{(k-1)/2} \sqrt[k]{\det q}.$$

(d) Äquivalente quadratische Formen q_A und q_B haben die gleiche Determinante und nehmen die gleichen Werte an. Insbesondere ist $\min q_A = \min q_B$, falls die Formen positiv sind. So wie wir eine Gitterbasis mit dem LLL-Algorithmus reduziert haben, werden wir eine quadratische Form durch eine möglichst „einfache“ äquivalente Form ersetzen.

(e) Wie bei Gittern gibt es für ein vorgegebenes $d > 0$ nur endlich viele $x \in \mathbb{Z}^n$ mit $q(x) \leq d$ (Bemerkung 21.11). Außerdem existiert nach Lemma 21.28 eine äquivalente Form q_C mit $c_{11} = \min q$.

Satz 21.51. *Jede ganze quadratische Form q ist zu einer Form q_C mit*

$$C = \begin{pmatrix} * & * & & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & * \\ 0 & & * & * \end{pmatrix} \geq 0$$

äquivalent.

Beweis. Der Beweis verläuft ähnlich wie in Satz 21.24. Sei $q = q_A$. Sei $(a_1, \ldots, a_n)$ die erste Zeile/Spalte von A und $b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{Z}$ mit

$$d := \mathrm{ggT}(a_2, \ldots, a_n) = a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

Nach Lemma 21.19 existiert ein $U \in \mathrm{GL}(n-1, \mathbb{Z})$ mit erster Spalte $(b_2, \ldots, b_n)$. Sei $S := \mathrm{diag}(1, U) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$. Dann hat AS an Position $(1,2)$ den Eintrag d. Wiederholt man diesen Schritt, so teilt a_2 schließlich jede der Zahlen $a_2, \ldots, a_n$. Wie üblich erreicht man $a_i = 0$ für $i = 3, \ldots, n$. Durch die Multiplikation von S^{t} von links an AS wird die erste Zeile nicht verändert. Da $S^{\mathrm{t}}AS$ symmetrisch ist, hat die erste Spalte von A nun die gleiche Gestalt. Man verfährt mit den Zeilen $2, \ldots, n-1$ analog. Am Ende hat man A in die gesuchte Matrix C überführt. □

Beispiel 21.52.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 21.53.

(a) Satz 21.51 eignet sich nicht, um Äquivalenzklassen quadratischer Formen zu zählen, denn unendlich viele solcher *Tridiagonalmatrizen* sind zueinander äquivalent. Für *binäre* quadratische Formen (d. h. $n = 2$) liefert Satz 21.51 lediglich eine Vorzeichen-Reduktion. Diesen Fall behandeln wir in Satz 21.59.

(b) Eine ganze positive quadratische Form q heißt *unimodular*, falls $\det q = 1$. Sei q_C unimodular mit $n \leq 5$. Wegen $(4/3)^2 < 2$ ist $\min q = 1$ nach Hermite. Wie in Satz 21.39 konstruiert man eine äquivalente Form mit $C = \mathrm{diag}(1, C_1)$ und $\det C_1 = 1$. Man kann nun das gleiche Argument mit q_{C_1} wiederholen. Schließlich ist q zu q_{1_n} äquivalent. Insbesondere ist q bis auf Äquivalenz die einzige unimodulare quadratische Form vom Rang n. Nach einem Satz von Mordell gilt dies auch für $n \in \{6, 7\}$. Für $n = 8$ bestimmt das in Bemerkung 21.11 eingeführte E_8-Gitter eine unimodulare Form q mit $\min q = 2$. Insbesondere ist q nicht zu q_{1_8} äquivalent.

Satz 21.54. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $d \in \mathbb{R}$ existieren bis auf Äquivalenz nur endlich viele ganze positive quadratische Formen q mit Rang n und $\det q \leq d$.*

Beweis. Sei q eine quadratische Form vom Rang n mit $\det q \leq d$. Sei Δ ein entsprechendes Gitter (Bemerkung 21.50). Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine δ-reduzierte Basis von Δ (zum Beispiel für $\delta = 3/4$). Durch Übergang zu einer äquivalenten quadratischen Form kann man q_C mit $c_{ii} = |v_i|^2$ für $i = 1, \ldots, n$ annehmen. Nach Satz 21.45 ist $c_{11} \ldots c_{nn}$ durch eine Funktion in d beschränkt. Da C positiv definit ist, gilt außerdem $c_{ii}c_{jj} - c_{ij}^2 > 0$, d. h. $|c_{ij}| < \sqrt{c_{ii}c_{jj}}$ für $i \neq j$. Daher gibt es nur endlich viele Möglichkeiten für C. □

Definition 21.55. Eine positive quadratische Form q mit Gram-Matrix $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt (*Minkowski*)-*reduziert*, falls für $i = 1, \ldots, n$ gilt:

- $c_{ii} \leq q(x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}^n$ mit $\mathrm{ggT}(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = 1$,
- $c_{i,i+1} \geq 0$ falls $i < n$.

Satz 21.56 (Minkowski)**.** *Jede positive quadratische Form ist zu einer reduzierten Form äquivalent.*

Beweis. Wir reduzieren eine positive quadratische Form q mit Gram-Matrix C schrittweise. Sei $1 \leq i \leq n$. Unter den Vektoren $x \in \mathbb{Z}^n$ mit $\mathrm{ggT}(x_i, \ldots, x_n) = 1$ können wir nach Bemerkung 21.50 einen mit minimalem $q(x)$ wählen. Nach Lemma 21.19 existiert ein $T \in \mathrm{GL}(n - i + 1, \mathbb{Z})$ mit erster Spalte $(x_i, \ldots, x_n)$. Dann ist

$$S := \begin{pmatrix} 1 & & & x_1 & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & x_{i-1} & 0 \\ & & & & \\ & & & T & \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}).$$

Ersetzt man C durch $S^{\mathrm{t}}CS$, so bleiben $c_{11}, \ldots, c_{i-1,i-1}$ unverändert, während c_{ii} jetzt die erste Minkowski-Bedingung erfüllt. Auf diese Weise erreicht man, dass die Bedingung für $c_{11}, \ldots, c_{nn}$ gilt. Die Vorzeichen von $c_{i,i+1}$ lassen sich durch $S = \mathrm{diag}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ mit $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{\pm 1\}$ verändern ($c_{11}, \ldots, c_{nn}$ bleiben unverändert). □

Beispiel 21.57. Sei q die quadratische Form zu dem Gitter $\Delta \subseteq \mathbb{R}^5$ aus Beispiel 21.47. Die Gram-Matrix

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 10 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

definiert eine äquivalente reduzierte Form. Im Vergleich zur δ-Reduktion sind die Diagonalelemente noch kleiner geworden.

Bemerkung 21.58.

(a) Sei q_C reduziert. Sei $x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, $g := \mathrm{ggT}(x_1, \ldots, x_n)$ und $y_i := x_i/g$. Dann gilt $c_{11} \leq q(y_1, \ldots, y_n) = g^{-2}q(x) \leq q(x)$. Dies zeigt $c_{11} = \min q$. Außerdem ist $c_{11} \leq q(e_2) = c_{22} \leq q(e_3) = c_{33} \leq \ldots \leq c_{nn}$. Für $i < j$ gilt

$$c_{jj} \leq q(e_i \pm e_j) = c_{ii} \pm 2c_{ij} + c_{jj},$$

d. h. $2|c_{ij}| \leq c_{ii}$.

(b) Nach Bemerkung 21.50 können nur endlich viele x die Ungleichung $c_{ii} \leq q(x)$ verletzen. Tatsächlich hängt die Anzahl der zu prüfenden Minkowski-Bedingungen nur von n ab und nicht von q (ohne Beweis). Allerdings wächst diese Anzahl exponentiell mit n. Für $n \geq 10$ ist es sehr aufwendig eine gegebene quadratische Form zu reduzieren. Die Reduktion nach Korkine-Zolotarev liefert einen Kompromiss zwischen der Effizienz des LLL-Algorithmus und der Güte der Minkowski-Reduktion. Darauf gehen wir nicht im Detail ein.

(c) Die Diagonaleinträge c_{ii} einer reduzierten quadratischen Form q_C sind über die Minkowski-Bedingung eindeutig bestimmt. Außerdem existieren nur endlich viele Vektoren $x \in \mathbb{Z}^n$ mit $q_C(x) = c_{ii}$. Daher existieren nur endlich viele Matrizen $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, sodass auch die äquivalente Form $q_{S^{\mathrm{t}}CS}$ reduziert ist. Dies zeigt, dass jede positive quadratische Form zu höchstens endlich vielen reduzierten Formen äquivalent ist. Unter diesen kann man einen kanonischen Repräsentanten wählen, indem man eine Ordnung auf den Matrixeinträgen festlegt (z.B. unter allen äquivalenten Formen sei c_{12} minimal etc.). Für $n \leq 2$ gibt es generell nur eine reduzierte Form pro Äquivalenzklasse.

Satz 21.59 (Gauss)**.** *Eine positive quadratische Form $q = q_C$ ist genau dann reduziert, wenn $0 \leq 2c_{12} \leq c_{11} \leq c_{22}$. Ggf. ist $c_{11}c_{22} \leq \frac{4}{3}\det(q)$. Ist q_D reduziert und zu q äquivalent, so gilt $C = D$.*

Beweis. Sei $a := c_{11}$, $b := c_{12}$ und $c := c_{22}$. Ist q reduziert, so gilt $0 \leq 2b \leq a \leq c$ nach Bemerkung 21.58. Sei umgekehrt $0 \leq 2b \leq a \leq c$ gegeben. Für $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} q(x,y) &= ax^2 + 2bxy + cy^2 \geq a(x^2+y^2) + 2bxy \\ &\geq a(x^2+y^2) - a|xy| = a(|x|-|y|)^2 + a|xy| \geq a \end{aligned} \tag{21.2}$$

mit Gleichheit, falls $(x, y) = (1, 0)$. Daher ist $a = \min q \leq q(x_1, x_2)$ für $\mathrm{ggT}(x_1, x_2) = 1$. Außerdem ist $c = q(0, 1) \leq q(x_1, x_2)$ für $\mathrm{ggT}(x_2) = 1$. Also ist q reduziert.

Für die Eindeutigkeit sei $S = \left(\begin{smallmatrix} x & u \\ y & v \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ mit $S^{\mathrm{t}}CS = \left(\begin{smallmatrix} a & b' \\ b' & c' \end{smallmatrix}\right)$ und $0 \leq 2b' \leq a \leq c'$ (beachte $a = \min q$). O. B. d. A. sei $c' \leq c$. Für (x, y) gilt Gleichheit in (21.2). Dafür gibt es zwei Fälle:

Fall 1: $y \neq 0$.
Aus (21.2) folgt $c = a \leq c' \leq c$. Also ist $c = c'$. Aus $a^2 - b^2 = \det C = a^2 - (b')^2$ und $b' \geq 0$ erhält man $b = b'$.

Fall 2: $(x, y) = (\pm 1, 0)$.
Indem man S durch $-S$ ersetzt, kann man $x = 1$ annehmen. Dann ist $v = \det S = \pm 1$. Aus

$$ua - \frac{a}{2} \leq ua \pm b = b' \leq \frac{a}{2}$$

folgt $u \leq 1$. Im Fall $u < 0$ wäre $b' < 0$. Für $u = 0$ ist $S = \mathrm{diag}(1, \pm 1)$ und $C = D$. Sei also $u = 1$. Dann ist $b = a/2 = b'$. Aus $ac - b^2 = \det C = ac' - b^2$ folgt $c = c'$. □

Bemerkung 21.60.

(a) Die Schranke $c_{11}c_{22} \leq \frac{4}{3}\det(q)$ entspricht der Abschätzung aus Satz 21.45 für $\delta \to 1$.

(b) Sei Δ ein Gitter mit δ-reduzierter Basis v_1, v_2 und Gram-Matrix $C = (c_{ij})$. Dann gilt

$$\frac{|c_{12}|}{c_{11}} = \frac{|[v_2, v_1]|}{|v_1|^2} = |\mu_{21}| \leq \frac{1}{2},$$

d. h. $2|c_{12}| \leq c_{11}$. Die (einzige) Lovász-Bedingung lautet

$$(\delta - \mu_{21}^2)|v_1|^2 \leq |b_2|^2 = |v_2 - \mu_{21}v_1|^2 = |v_2|^2 - 2\mu_{21}[v_1, v_2] + \mu_{21}^2|v_1|^2 = |v_2|^2 - \mu_{21}^2|v_1|^2,$$

d. h. $\delta c_{11} \leq c_{22}$. Für $\delta = 1$ ist q_C reduziert, wenn man das Vorzeichen von c_{12} ignoriert.

(c) Der folgende Algorithmus reduziert eine positive binäre quadratische Form q_C:

(1) Falls $c_{11} > c_{22}$, tausche c_{11} und c_{22}.

(2) Sei $\lambda := \lfloor c_{12}/c_{11} \rceil$. Subtrahiere das λ-fache der ersten Zeile/Spalte von der zweiten Zeile/Spalte von C. Anschließend gilt $2|c_{12}| \leq c_{11}$.

(3) Gilt $c_{11} > c_{22}$, so gehe zu (1).

(4) Ersetze c_{12} durch $|c_{12}|$.

(d) Die Äquivalenzklassen der positiven quadratischen Formen q_C mit Rang 2 und $\det q \leq 10$ sind durch folgende Parameter gegeben:

$\det q$	1	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10
c_{11}	1	1	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	3	2	1	3	2	1	2	1
c_{12}	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
c_{22}	1	2	3	2	4	2	3	5	3	6	4	7	3	4	8	3	5	9	5	10

Es gibt solche Tabellen für $n \leq 5$ im Internet (vgl. Aufgabe III.33).[7]

(e) Für $n \geq 3$ existieren äquivalente positive reduzierte quadratische Formen mit unterschiedlicher Gram-Matrix. Betrachten wir dazu $q_k := q_{C_k}$ mit

$$C_k := \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & 2 & 1 \\ k & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

für $k \in \{0, 1\}$. Nach Beispiel 21.52 sind q_0 und q_1 äquivalent. Nach Beispiel 12.35 ist q_0 positiv und $\min q_0 = 2$. Wegen $c_{ii} = 2 = \min q_k$ für $i = 1, 2, 3$ und $c_{12} = c_{23} = 1$ sind q_0 und q_1 reduziert.

21.7 Sukzessive Minima

Definition 21.61. Sei $q\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ eine positive quadratische Form. In Anlehnung an Courant-Fischer definieren wir die *sukzessiven Minima*

$$\mu_i(q) := \min_{\substack{s_1,\ldots,s_i \in \mathbb{Z}^n \\ \text{linear unabhängig}}} \max\{q(s_1), \ldots, q(s_i)\}.$$

Bemerkung 21.62. Offenbar ist $\min q = \mu_1(q) \leq \ldots \leq \mu_n(q)$. Ist q_C reduziert, so gilt

$$\mu_i(q) \leq \max\{q(e_1), \ldots, q(e_i)\} = c_{ii}$$

für $i = 1, \ldots, n$. Im Allgemeinen gilt aber nicht unbedingt Gleichheit.

Beispiel 21.63. Sei

$$C = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & 1/2 \\ . & 1 & . & . & 1/2 \\ . & . & 1 & . & 1/2 \\ . & . & . & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 5/4 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$q(x) = x_1^2 + \ldots + x_4^2 + \frac{5}{4}x_5^2 + x_1x_5 + \ldots + x_4x_5 = \sum_{i=1}^{4}\Big(x_i + \frac{1}{2}x_5\Big)^2 + \frac{1}{4}x_5^2 \geq 1$$

[7] `https://www.math.rwth-aachen.de/homes/Gabriele.Nebe/LATTICES/`

für $x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ ist q positiv und reduziert. Andererseits ist

$$B := \big\{e_1, \dots, e_4, (-1,-1,-1,-1,2)\big\}$$

linear unabhängig mit $q(b) = 1$ für $b \in B$. Dies zeigt $\mu_5(q) = 1 < \frac{5}{4} = c_{55}$.

Lemma 21.64. *Für jede positive quadratische Form q vom Rang n existieren linear unabhängige Vektoren $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{Z}^n$ mit $q(s_i) = \mu_i(q)$ für $i = 1, \dots, n$.*

Beweis. Offenbar existiert $s_1 \in \mathbb{Z}^n$ mit $q(s_1) = \mu_1(q)$. Seien $s_1, \dots, s_k$ mit $q(s_i) = \mu_i(q)$ für $i = 1, \dots, k$ bereits gewählt. Nach Definition existieren linear unabhängige $t_1, \dots, t_{k+1}$ mit $q(t_i) \le \mu_{k+1}(q)$ für $i = 1, \dots, k+1$. Mindestens einer der t_i, sagen wir t_1 muss linear unabhängig zu $s_1, \dots, s_k$ sein. Sei $i \le k+1$ minimal mit $\mu_i(q) = \mu_{k+1}(q)$. Aus

$$\mu_i(q) \le \max\big\{q(s_1), \dots, q(s_{i-1}), q(t_1)\big\} \le \mu_{k+1}(q)$$

folgt $q(t_1) = \mu_{k+1}(q)$. Wir können daher $s_{k+1} := t_1$ setzen. Die Behauptung folgt nun induktiv. □

Bemerkung 21.65. Der folgende Satz verbessert Hermites Schranke (Bemerkung 21.50).

Satz 21.66 (Minkowski)**.** *Für jede positive quadratische Form q vom Rang n gilt*

$$\boxed{\mu_1(q) \dots \mu_n(q) \le \Big(\frac{4}{3}\Big)^{n(n-1)/2} \det(q).}$$

Beweis. Sei $S \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ mit Spalten $s_1, \dots, s_n$ wie in Lemma 21.64 (Achtung: S liegt nicht unbedingt in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$). Sei $q = q_C$ und $S^{\mathrm{t}}CS = R^{\mathrm{t}}R$ die Cholesky-Zerlegung von $S^{\mathrm{t}}CS$. Sei

$$D := \mathrm{diag}(\mu_1(q), \dots, \mu_n(q)), \qquad C_1 := S^{-\mathrm{t}}R^{\mathrm{t}}D^{-1}RS^{-1}$$

und $q_1 := q_{C_1}$. Dann gilt

$$\det q_1 = \det(D)^{-1} \det(S^{-\mathrm{t}}R^{\mathrm{t}}RS^{-1}) = \frac{\det q}{\mu_1(q) \dots \mu_n(q)}.$$

Sei $x \in \mathbb{Z}^{n\times 1} \setminus \{0\}$, $y := S^{-1}x$ und $z := Ry$. Sei $k := \max\{1 \le i \le n : y_i \ne 0\}$. Dann ist $x = Sy = y_1 s_1 + \ldots + y_k s_k$ linear unabhängig zu $s_1, \dots, s_{k-1}$. Insbesondere ist $q(x) \ge \mu_k(q)$. Da R eine obere Dreiecksmatrix ist, gilt außerdem $z_{k+1} = \ldots = z_n = 0$. Daher ist

$$q_1(x) = y^{\mathrm{t}}R^{\mathrm{t}}D^{-1}Ry = z^{\mathrm{t}}D^{-1}z = \frac{z_1^2}{\mu_1(q)} + \ldots + \frac{z_k^2}{\mu_k(q)} \ge \frac{1}{\mu_k(q)}|z|^2 = \frac{1}{\mu_k(q)}y^{\mathrm{t}}R^{\mathrm{t}}Ry = \frac{1}{\mu_k(q)}q(x) \ge 1.$$

Insbesondere ist q_1 positiv und

$$1 \le (\min q_1)^n \le \Big(\frac{4}{3}\Big)^{n(n-1)/2} \det(q_1) = \Big(\frac{4}{3}\Big)^{n(n-1)/2} \frac{\det q}{\mu_1(q) \dots \mu_n(q)}$$

nach Hermite (Bemerkung 21.50). □

Bemerkung 21.67.

(a) Der Beweis zeigt, dass man $(4/3)^{(n-1)/2}$ in Minkowskis Schranke durch die n-te Hermite-Konstante γ_n ersetzen darf (Beispiel 21.30).

(b) Für eine δ-reduzierte Gitterbasis $v_1, \ldots, v_n$ gilt nach Satz 21.45 mit $\delta \to 1$ asymptotisch die gleiche Schranke $|v_1|^2 \ldots |v_n|^2 \leq (4/3)^{n(n-1)/2} \det(q)$.

(c) Eine ganze positive quadratische Form q heißt *universell*, falls $q\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{N}_0$ surjektiv ist. Ein Satz von Lagrange aus der Zahlentheorie besagt, dass die quadratische Form

$$q(x) = x 1_4 x^{\mathrm{t}} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

universell ist, d. h. jede natürliche Zahl ist die Summe von vier Quadraten.[8] Der 15-*Satz* von Conway besagt, dass eine ganze positive quadratische Form bereits dann universell ist, wenn sie die Werte 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14 und 15 annimmt.

[8] siehe Zahlentheorie-Skript

Aufgaben

Aufgabe III.1 (Binäre Exponentiation)**.** Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$.

(a) Entwerfen Sie einen Algorithmus zur effizienten Berechnung von A^k durch iteriertes Quadrieren.

(b) Zeigen Sie, dass man auf diese Weise mit höchstens $2\lfloor \log_2(k)\rfloor$ Matrixmultiplikationen auskommt (dabei ist $\lfloor \log_2(k)\rfloor$ die größte ganze Zahl z mit $2^z \leq k$).

Aufgabe III.2 (Heron-Verfahren)**.** Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Folge

$$x_0 := 1, \qquad x_{n+1} := \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big)$$

quadratisch gegen $\sqrt{a}$ konvergiert, d. h. $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$ und $|x_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{a}|^2$ für $n \in \mathbb{N}$. Begründen Sie, warum sich die Anzahl der korrekten Nachkommastellen von x_n in jedem Iterationsschritt verdoppelt.

Aufgabe III.3. Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ vom Rang k. Zeigen Sie, dass $B, C \in K^{n\times k}$ mit $A = BC^{\mathrm{t}}$ existieren. Wie kann man damit Berechnungen beschleunigen und Speicherbedarf reduzieren, wenn $k \ll n$?

Aufgabe III.4. Beweisen oder widerlegen Sie: Ähnliche Matrizen in $\mathbb{C}^{n\times n}$ haben die gleiche Konditionszahl.

Aufgabe III.5. Zeigen Sie, dass $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ den gleichen Rang wie die Pseudoinverse A^+ hat.

Aufgabe III.6. Beweisen oder widerlegen Sie: $(AB)^+ = B^+A^+$ für alle $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{C}^{m\times k}$.

Aufgabe III.7. Zeigen Sie: Hat das System $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ mindestens eine Lösung, so haben alle Lösungen die Form $A^+b + (1_m - A^+A)y$ mit $y \in \mathbb{C}^m$.

Aufgabe III.8. Bestimmen Sie die größte (endliche) Zahl, die man mit dem Datentyp `float` (Bemerkung 18.29) darstellen kann.

Aufgabe III.9. Sei $A \in K^{n\times n}$ mit Hauptminoren $\det A_k \neq 0$ für $k = 1, \ldots, n-1$ (siehe Bemerkung 12.43). Zeigen Sie, dass eine eindeutige LR-Zerlegung in der Form $A = LR$ existiert (siehe Satz 18.35).

Aufgabe III.10 (Bruhat-Zerlegung)**.** Zeigen Sie, dass für jede Matrix $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ Permutationsmatrizen P, Q, untere Dreiecksmatrizen L_1, L_2 und obere Dreiecksmatrizen R_1, R_2 mit $A = L_1PL_2 = R_1QR_2$ existieren.

Aufgabe III.11 (Polardarstellung)**.** Zeigen Sie, dass für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Matrizen $U \in \mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ und $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $A = UP$ existieren, wobei P positiv semidefinit ist. Im Fall $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ sind U und P eindeutig bestimmt.

Aufgabe III.12 (HADAMARD-Ungleichung)**.** Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Spalten $s_1, \ldots, s_n$. Zeigen Sie:

(a) $|\det A| \leq |s_1| \ldots |s_n|$ mit Gleichheit genau dann, wenn $s_1, \ldots, s_n$ paarweise orthogonal sind oder $s_i = 0$ für ein i gilt.
Hinweis: QR-Zerlegung.

(b) Ist A positiv semidefinit, so gilt $\det A \leq a_{11} \ldots a_{nn}$.

Aufgabe III.13. Sei $p \in \mathbb{R}$ mit $p \geq 1$. Beweisen Sie für $x, y \in \mathbb{C}^n$ die MINKOWSKI-*Ungleichung*

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p}.$$

Folgern Sie, dass

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \qquad (x \in \mathbb{C}^n)$$

eine Norm auf $\mathbb{C}^n$ definiert.
Hinweis: Man kann $\|x\|_p + \|y\|_p = 1$ annehmen und die Konvexität der Funktion $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $r \mapsto r^p$ benutzen (Definition A.3).

Aufgabe III.14. Sei $\|.\|$ eine Norm, die auf $\mathbb{C}^{n\times 1}$ für alle n definiert ist. Zeigen Sie, dass

$$\|A\| = \max_{0\neq x\in\mathbb{C}^{m\times 1}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

eine Matrixnorm auf $\mathbb{C}^{n\times m}$ definiert.

Aufgabe III.15. Formulieren und beweisen Sie das Orthonormalisierungsverfahren mit Householder-Transformationen und Givens-Rotationen aus Bemerkung 18.89 für $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

Aufgabe III.16. Zeigen Sie $\lim_{k\to\infty} \left(1_n + \frac{1}{k}A\right)^k = \exp A$ für alle $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Aufgabe III.17. Zeigen Sie, dass $\exp A$ positiv definit ist, falls $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch ist.

Aufgabe III.18. Seien $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Zeigen Sie folgende Beziehung zwischen Kronecker-Summe und Kronecker-Produkt:

$$\exp(A \oplus B) = \exp(A) \otimes \exp(B).$$

Aufgabe III.19. Zeigen Sie:

(a) Die Anzahl der Permutationen in S_n mit genau k Zyklen (einschließlich 1-Zyklen) beträgt

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} := \frac{n!}{k!} \sum_{\substack{1 \le l_1, \ldots, l_k \le n \\ l_1 + \ldots + l_k = n}} \frac{1}{l_1 \ldots l_k}.$$

Hinweis: Man nennt $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ *Stirling-Zahl* der ersten Art.

(b) Für $n \ge 2$ gibt es genauso viele Permutationen in S_n mit einer geraden Zyklenzahl wie mit einer ungeraden Zyklenzahl, d. h. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$.

(c) Sei $N \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nilpotent und

$$A := -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} N^k \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Dann gilt $\exp A = 1_n - N$.

Aufgabe III.20. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stochastische Matrizen. Zeigen Sie, dass AB stochastisch ist.

Aufgabe III.21. Sind $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und A^{-1} stochastisch, so ist A eine Permutationsmatrix.

Aufgabe III.22. Sei $0 < p, q < 1$ und $A := \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\lim_{k \to \infty} A^k$.

Aufgabe III.23. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nicht-negativ und unzerlegbar. Zeigen Sie $(1_n + A)^{n-1} > 0$.

Aufgabe III.24. Sei V ein K-Vektorraum der Dimension n. Man nennt $A \subseteq V$ *affin abhängig*, falls paarweise verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K^\times$ mit $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k = 0$ und $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 0$ existieren. Anderenfalls heißt A *affin unabhängig*. Zeigen Sie:

(a) Es existiert eine affin unabhängige Menge mit $n + 1$ Elementen.

(b) Jede Menge aus mindestens $n + 2$ Elementen ist affin abhängig.

(c) Genau dann ist $A \subseteq V$ affin abhängig, wenn $\{v - w : w \in A \setminus \{v\}\}$ für ein $v \in A$ linear abhängig ist.

Aufgabe III.25. Sei V ein K-Vektorraum. Eine *affine* Linearkombination von $v_1, \ldots, v_k \in V$ ist eine Summe der Form $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ und $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$.[9] Die Menge aller affinen Linearkombinationen von Elementen aus $\Delta \subseteq K^n$ nennt man die *affine Hülle* $\operatorname{aff} \Delta$.

(a) Beschreiben Sie die affine Hülle zweier Punkte in $\mathbb{R}^n$.

(b) Zeigen Sie, dass eine Menge $\Delta \subseteq V$ genau dann unter affinen Linearkombinationen abgeschlossen ist (d. h. $\operatorname{aff} \Delta = \Delta$), wenn ein $x \in \Delta$ existiert, sodass $\Delta - x$ ein Unterraum von V ist.

Aufgabe III.26. Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Zeigen Sie folgende Varianten von Folgerung 20.13:

(a) Genau dann existiert ein x mit $Ax \le b$, wenn $y^{\mathrm{t}} b \ge 0$ für alle $y \ge 0$ mit $y^{\mathrm{t}} A = 0$ gilt.
Hinweis: Betrachten $(1_n, A, -A)$.

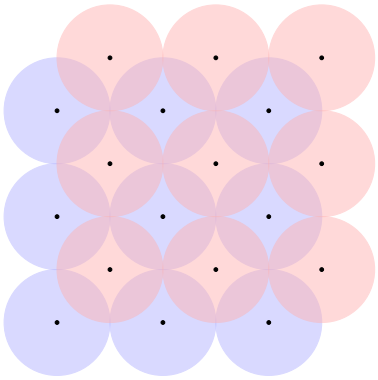
[9] Im Gegensatz zu Konvexkombinationen sind die λ_i nicht beschränkt.

(b) Genau dann existiert ein $x \geq 0$ mit $Ax \leq b$, wenn $y^{\mathrm{t}}b \geq 0$ für alle $y \geq 0$ mit $y^{\mathrm{t}}A \geq 0$ gilt.

Aufgabe III.27. Zeigen Sie, dass eine Untergruppe $U \leq (\mathbb{R}^n, +)$ bereits dann ein Gitter ist, wenn nur endlich viele $x \in U$ mit $|x| < 1$ existieren.
Hinweis: Bolzano-Weierstraß.

Aufgabe III.28.

(a) Bestimmen Sie das Gitter $\Delta \subseteq \mathbb{R}^3$ zu der quadratischen Anordnung von Einheitskugeln (die Kugeln in jeder Ebene berühren Kugeln in der darunter liegenden Ebene, siehe Bemerkung 21.11):



(b) Berechnen Sie $\min \Delta$ und die Dichte $\rho(\Delta)$.

(c) Begründen Sie, warum diese Anordnung kein Gegenspiel zu Keplers Vermutung ist.

Aufgabe III.29. Sei $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gitter mit vollem Rang und $\delta := \frac{1}{\sqrt{n}} \min \Delta$. Sei $F \subseteq \mathbb{R}^n$ die Fundamentalmasche von Δ (Beispiel 21.9). Sei $W := (-\delta/2, \delta/2)^n \subseteq \mathbb{R}^n$ der offene Würfel mit Mittelpunkt 0 und Seitenlänge δ. Zeigen Sie:

(a) Für verschiedene $x, y \in \Delta$ ist $(x + W) \cap (y + W) = \varnothing$.

(b) Es existieren $x_1, \ldots, x_k \in \Delta$ mit $W \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (x_i + F)$.

(c) Für das Volumen gilt

$$\delta^n = \operatorname{vol} W = \operatorname{vol}\big(F \cap ((W - x_1) \cup \ldots \cup (W - x_k))\big) \leq \operatorname{vol} F = \operatorname{disc} \Delta,$$

d. h. $\min \Delta \leq \sqrt{n} \sqrt[n]{\operatorname{disc} \Delta}$.

(d) Für das duale Gitter Δ^* gilt $(\min \Delta)(\min \Delta^*) \leq n$.

(e) Für jede positive quadratische Form q vom Rang n gilt $\min q \leq n \sqrt[n]{\det q}$.

Aufgabe III.30. Sei q_C eine reduzierte positive quadratische Form vom Rang 2. Zeigen Sie für das sukzessive Minimum $\mu_2(q) = c_{22}$.

Aufgabe III.31. Sei q eine *indefinite* quadratische Form vom Rang 2, d. h. es existieren $x, y \in \mathbb{Z}^2$ mit $q(x) < 0 < q(y)$. Sei $d := -\det(q)$ keine Quadratzahl. Zeigen Sie:

(a) $d > 0$.

(b) q ist zu einer Form q_C mit $0 < c_{12} < \sqrt{d} < |c_{11}| + c_{12} \leq |c_{22}| + c_{12}$ äquivalent.

(c) Bis auf Äquivalenz gibt es nur endlich viele ganze indefinite quadratische Formen vom Rang 2 und Determinante $-d$ (auch wenn d ein Quadrat ist).

(d) Bestimmen Sie bis auf Äquivalenz alle ganzen indefiniten quadratischen Formen q vom Rang 2 mit $\det q \geq -4$.

Bemerkung: Im Gegensatz zu positiven binären quadratischen Formen gibt es für indefinite Formen keine kanonische Normalform.

Aufgabe III.32. Zeigen Sie, dass eine positive quadratische Form q_C vom Rang 3 genau dann reduziert ist, wenn gilt:

$$0 \leq 2c_{12} \leq c_{11} \leq c_{22}, \qquad 2|c_{13}| \leq c_{11},$$
$$0 \leq 2c_{23} \leq c_{22} \leq c_{33}, \qquad 2(c_{12} + c_{23} - c_{13}) \leq c_{11} + c_{22}.$$

Aufgabe III.33. Bestimmen Sie alle reduzierten ganzen quadratischen Formen vom Rang 3 mit Determinante ≤ 5. Welche davon sind äquivalent?

Aufgabe III.34. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit. Zeigen Sie $\min q_{A\otimes B} \leq (\min q_A)(\min q_B)$.
Bemerkung: KITAOKA hat bewiesen, dass für quadratische Formen mit Rang ≤ 43 Gleichheit gilt. Für Rang 292 existieren Beispiele für die strikte Ungleichung.

Anhang

Konvexe Optimierung

Bemerkung A.1. Wir untersuchen in diesem Abschnitt Optimierungsprobleme mit einer konvexen (oder konkaven) Zielfunktion unter linearen Nebenbedingungen. Da in diesem Konzept der Simplex-Algorithmus nicht funktioniert, gibt es keinen Grund, die Nebenbedingungen durch Einführen von Schlupfvariablen auf die Standardform zu bringen. Wir betrachten daher konvexe Mengen der Form

$$M := \{x \in \mathbb{R}^m : Ax \leq b\}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\operatorname{rk} A = m < n$ und $b \in \mathbb{R}^n$ (Bemerkung 20.3). Wie üblich heißt $x \in M$ *Ecke*, falls $M \setminus \{x\}$ konvex ist. Für $I \subseteq \{1,\dots,n\}$ sei $A_I := (a_{ij} : i \in I, j = 1,\dots,m)$. Wir nennen I eine *Basismenge*, falls A_I invertierbar ist. Ggf. ist $|I| = m$.

Satz A.2. *Sei $M := \{x \in \mathbb{R}^m : Ax \leq b\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Genau dann ist $x \in M$ eine Ecke, wenn eine Basismenge I mit $A_I x = b_I$ existiert.*

Beweis. Sei I eine Basismenge mit $A_I x = b_I$. Seien $y, z \in M$ und $0 < \lambda < 1$ mit $x = \lambda y + (1-\lambda)z$. Aus

$$b_I = \lambda A_I y + (1-\lambda) A_I z \leq \lambda b_I + (1-\lambda) b_I = b_I$$

folgt $A_I y = b_I$ und $A_I z = b_I$. Da A_I invertierbar ist, gilt $y = x = z$. Also ist x eine Ecke.

Sei umgekehrt x eine Ecke. Sei I die Menge der Indizes i mit $\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = b_i$. Nehmen wir $\operatorname{rk} A_I < m$ an. Dann existiert ein $y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ mit $A_I y = 0$. Für $i \notin I$ gilt $\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j < b_i$. Daher existiert ein $\epsilon > 0$ mit $x \pm \epsilon y \in M$. Wegen $x = \frac{1}{2}(x + \epsilon y) + \frac{1}{2}(x - \epsilon y)$ kann x keine Ecke sein. Also ist $\operatorname{rk} A_I = m$. Daher existiert eine Basismenge $J \subseteq I$ mit $A_J x = b_J$. □

Definition A.3. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ heißt

- *konvex*, falls
$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$
für alle $x, y \in M$ und $0 < \lambda < 1$ gilt. Gilt im Fall $x \neq y$ die echte Ungleichung, so nennt man f *strikt* konvex.
- (*strikt*) *konkav*, falls $-f$ (strikt) konvex ist, d. h.
$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

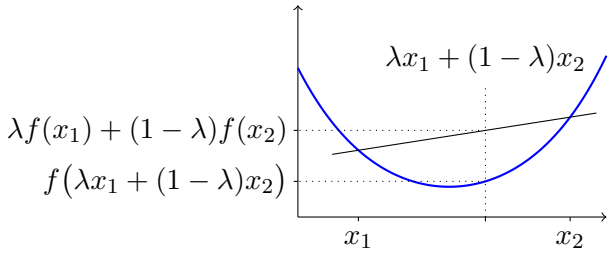
Bemerkung A.4.

(a) Jede lineare Funktion ist konvex und konkav.

(b) Ist $f\colon M \to \mathbb{R}$ konvex, so ist $N := \{(x, y) \in M \times \mathbb{R} : f(x) \leq y\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ konvex, denn für $f(x_i) \leq y_i$ und $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \leq \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2.$$

(c) In der Analysis zeigt man, dass f genau dann konvex ist, wenn die Hesse-Matrix $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$ für alle $x \in M$ positiv semidefinit ist (vgl. Beispiel 12.35). Für $n = 1$ bedeutet dies $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in M$, d. h. die Steigung des Graphen nimmt kontinuierlich zu.



Satz A.5. *Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax \leq b\} \neq \varnothing$ konvex und $f\colon M \to \mathbb{R}$ konvex (bzw. konkav). Besitzt f ein Maximum (bzw. Minimum) auf M, so wird dieses an einer Ecke angenommen.*

Beweis. Wir argumentieren wie im Beweis von Satz 20.24. Sei $x \in M$ ein Maximum von f. Sei $I(x) = I$ die Menge der Indizes i mit $\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j = b_i$. Nehmen wir $\operatorname{rk} A_I < m$ an. Wie im Beweis von Satz A.2 existieren $y \in \mathbb{R}^m$ und $\epsilon > 0$ mit $x_\pm := x \pm \epsilon y \in M$. Da f konvex ist, gilt

$$f(x) = f\Big(\frac{1}{2}x_+ + \frac{1}{2}x_-\Big) \leq \frac{1}{2}f(x_+) + \frac{1}{2}f(x_-) \leq \max\big\{f(x_+), f(x_-)\big\} \leq f(x)$$

und $f(x_+) = f(x) = f(x_-)$. Da wir stets annehmen, dass A vollen Rang hat, gilt $Ay \neq 0$. Wir können daher ϵ so wählen, dass $I(x_+) \supsetneq I$ oder $I(x_-) \supsetneq I$ gilt. Anschließend ersetzen wir x durch x_+ (bzw. x_-) und wiederholen das Argument. Nach endlich vielen Schritten erreicht man $\operatorname{rk} A_I = m$. Dann ist x eine Ecke. Der Beweis für konkave Funktionen verläuft analog. □

Bemerkung A.6. Ist f *strikt* konvex (bzw. konkav), so kann das Maximum (bzw. *Minimum*) *nur* an Ecken angenommen werden (dafür braucht man Satz A.2 nicht).

Satz A.7 (Ungleichung vom harmonischen, geometrischen, arithmetischen und quadratischen Mittel)**.** *Für alle positiven $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x_1 = \ldots = x_n$.

Beweis (Cauchy). Die erste Ungleichung folgt aus der zweiten, indem man x_i durch $1/x_i$ ersetzt. Die dritte Ungleichung (mit Gleichheitsfall) folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, angewendet auf die Vektoren $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(1, \ldots, 1)$. Wir zeigen die zweite Ungleichung durch eine ungewöhnliche Induktion nach n. Für $n = 1$ gilt Gleichheit. Für $n = 2$ ist

$$\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} - x_1x_2 = \frac{(x_1 - x_2)^2}{4} \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x_1 = x_2$. Sei nun die Aussage für n erfüllt. Dann ist

$$x_1 \ldots x_{2n} \leq \Big(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{x_i}{n}\Big)^n \leq \Big(\sum_{i=1}^{2n} \frac{x_i}{2n}\Big)^{2n}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x_1 = \ldots = x_{2n}$. Also gilt die Behauptung für $2n$. Sei nun $A := \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{n-1}$. Dann ist

$$x_1 \ldots x_{n-1} A \leq \Big(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{n} + \frac{A}{n}\Big)^n = \Big(\frac{A(n-1)}{n} + \frac{A}{n}\Big)^n = A^n$$

und $x_1 \ldots x_{n-1} \leq A^{n-1}$ mit Gleichheit genau dann, wenn $x_1 = \ldots = x_{n-1}$. Damit gilt die Behauptung für $n-1$. Kombiniert man beide Induktionsschritte, so erhält man die Aussage für $2n-1, 2n-2, \ldots, n+1$. □

Satz A.8. *Für jede positiv semidefinite Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt $\sqrt[n]{\det A} \leq \operatorname{tr}(A)/n$ mit Gleichheit genau dann, wenn A eine Skalarmatrix ist.*

Beweis. Nach Aufgabe II.23 hat A nicht-negative Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Nach Bemerkung 10.35 gilt

$$\sqrt[n]{\det A} = \sqrt[n]{\lambda_1 \ldots \lambda_n} \leq \frac{1}{n}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(A)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$. Da A nach dem Spektralsatz diagonalisierbar ist, muss A ggf. eine Skalarmatrix sein. □

Lemma A.9. *Für $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \geq 0$ gilt*

$$\sqrt[n]{(x_1 + y_1) \ldots (x_n + y_n)} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} + \sqrt[n]{y_1 \ldots y_n}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, y_n)$ linear abhängig sind oder $x_i = 0 = y_i$ für ein i.

Beweis. O. B. d. A. sei $x_i + y_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$ (anderenfalls sind beide Seiten 0). Nach der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel gilt

$$1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i + y_i} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i + y_i} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i + y_i}} + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i + y_i}} = \frac{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} + \sqrt[n]{y_1 \ldots y_n}}{\sqrt[n]{(x_1 + y_1) \ldots (x_n + y_n)}}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\frac{x_i}{x_i+y_i} = \frac{x_j}{x_j+y_j}$ und $\frac{y_i}{x_i+y_i} = \frac{y_j}{x_j+y_j}$ für alle i, j. Dies bedeutet $x_1 y_i = x_i y_1$ für $i = 1, \ldots, n$. Ist x oder y der Nullvektor, so sind die Vektoren linear abhängig. Anderenfalls gilt o. B. d. A. $x_1 \neq 0$ und $y_i = \frac{y_1}{x_1} x_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Also sind x und y linear abhängig. □

Lemma A.10 (Simultane Diagonalisierung)**.** *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ positiv definit und $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ positiv semidefinit. Dann existiert ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ mit $S^* A S = 1_n$ und $S^* B S = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.*

Beweis. Nach Aufgabe II.23 existiert eine hermitesche Wurzel $\sqrt{A}$ von A. Offenbar ist auch $C := \sqrt{A}^{-1} B \sqrt{A}^{-1}$ hermitesch. Sei $U \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ mit $U^* C U = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (Spektralsatz). Die Behauptung gilt nun für $S := \sqrt{A}^{-1} U$. □

Satz A.11 (Minkowski-Ungleichung)**.** *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ positiv definit und $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ positiv semidefinit. Dann gilt*

$$\sqrt[n]{\det(A + B)} \geq \sqrt[n]{\det A} + \sqrt[n]{\det B}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $B = \lambda A$ für ein $\lambda \geq 0$. Insbesondere ist $\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$.

Beweis. Nach Lemma A.10 existiert ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ mit $S^* A S = 1_n$ und

$$D := S^* B S = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Indem wir von links und rechts mit $\sqrt[n]{\det(S^*)}$ bzw. $\sqrt[n]{\det S}$ multiplizieren, können wir $A = 1_n$ und $B = D$ annehmen. Nach Voraussetzung ist $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$. Aus Lemma A.9 folgt

$$\sqrt[n]{\det(1_n + D)} = \sqrt[n]{(1+\lambda_1)\ldots(1+\lambda_n)} \geq 1 + \sqrt[n]{\lambda_1 \ldots \lambda_n} = \sqrt[n]{\det 1_n} + \sqrt[n]{\det D}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\lambda := \lambda_1 = \ldots = \lambda_n$. Für die Ausgangsmatrix bedeutet dies $B = S^{-*} D S^{-1} = \lambda A$.

Die zweite Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned} \det(A+B) &= \sqrt[n]{\det(A+B)}^n \geq \left(\sqrt[n]{\det A} + \sqrt[n]{\det B} \right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt[n]{\det A}^k \sqrt[n]{\det B}^{n-k} \geq \det(A) + \det(B). \end{aligned}$$ □

Satz A.12. *Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Die Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ aller positiv definiten Matrizen mit Hauptdiagonale v ist konvex. Die Abbildung $\mathcal{M} \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \sqrt[n]{\det A}$ ist strikt konkav.*

Beweis. Seien $A, B \in \mathcal{M}$ und $0 < \lambda < 1$. Offenbar hat $C := \lambda A + (1-\lambda) B$ Hauptdiagonale v. Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$x C x^{\mathrm{t}} = \lambda x A x^{\mathrm{t}} + (1-\lambda) x B x^{\mathrm{t}} > 0.$$

Dies zeigt $C \in \mathcal{M}$. Nach der Minkowski-Ungleichung gilt

$$\sqrt[n]{\det C} \geq \sqrt[n]{\det(\lambda A)} + \sqrt[n]{\det((1-\lambda)B)} = \lambda \sqrt[n]{\det A} + (1-\lambda) \sqrt[n]{\det B}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\lambda \mu A = (1-\lambda) B$ für ein $\mu > 0$ gilt. Da A und B die gleiche Hauptdiagonale haben, folgt $\lambda \mu = (1-\lambda)$ und $A = B$. Also ist $A \mapsto \sqrt[n]{\det A}$ strikt konkav. □

Satz A.13 (Oppenheim)**.** *Sei q_C eine reduzierte positive quadratische Form vom Rang 3. Dann gilt*

$$c_{11} c_{22} c_{33} \leq c_{11} c_{22} c_{33} + \frac{1}{2} c_{11} c_{22} (c_{33} - c_{22}) + \frac{1}{2} c_{11} c_{33} (c_{22} - c_{11}) \leq 2 \det(q).$$

Gilt $c_{11} c_{22} c_{33} = 2 \det(q)$, so ist q äquivalent zu der quadratischen Form mit Gram-Matrix

$$\frac{c_{11}}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beweis (Barnes). Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^{3 \times 3}$ die Menge der reduzierten positiv definiten Matrizen mit Hauptdiagonale (a, b, c), wobei $a \leq b \leq c$. Für

$$C := \begin{pmatrix} a & x & z \\ x & b & y \\ z & y & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$$

gilt $0 \le x \le a/2$, $0 \le y \le b/2$, $z \le a/2$, $-z \le a/2$ und $x + y - z \le (a+b)/2$ nach Aufgabe III.32. Man kann daher $\mathcal{M}$ mit der konvexen Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ aller (x, y, z) mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \le \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \\ a \\ a \\ a+b \end{pmatrix} =: v$$

identifizieren. Nach der Sarrus-Regel gilt

$$\det C = abc + 2xyz - ay^2 - bz^2 - cx^2.$$

Nach Satz A.12 und Bemerkung A.6 wird das Minimum von $C \mapsto \sqrt[3]{\det C}$ (und damit auch das Minimum von det) auf M nur an Ecken angenommen. Nach Satz A.2 ergeben sich die Ecken, indem man drei linear unabhängige Zeilen von A wählt und das entsprechende Gleichungssystem löst. Es gibt acht Möglichkeiten aus den ersten sechs Zeilen von A drei linear unabhängig auszuwählen. Die Wahl $(x, y, z) = (a, b, -a)$ erfüllt jedoch nicht die letzte Ungleichung. Wählt man die siebte Zeile als Gleichheit, so ist $z = \frac{1}{2}(a+b) - x - y$. Dies liefert zwei weitere Ecken:

I	$2(x,y,z)$	$\det C$	I	$2(x,y,z)$	$\det C$
$\{1,3,5\}$	(a,b,a)	$abc - \frac{1}{4}(ab^2 + a^2c)$	$\{1,3,7\}$	$(a,b,0)$	$abc - \frac{1}{4}(ab^2 + a^2c)$
$\{1,4,5\}$	$(a,0,a)$	$abc - \frac{1}{4}a^2(b+c)$	$\{1,4,7\}$	$(a,0,-b)$	wie $I = \{1,4,6\}$ mit $a = b$
$\{1,4,6\}$	$(a,0,-a)$	$abc - \frac{1}{4}a^2(b+c)$	$\{1,6,7\}$	$(a,b-a,-a)$	$abc - \frac{1}{4}(ab^2 + a^2c)$
$\{2,3,5\}$	$(0,b,a)$	$abc - \frac{1}{4}(ab^2 + a^2b)$	$\{2,3,7\}$	$(0,b,-a)$	wie $I = \{2,3,6\}$
$\{2,3,6\}$	$(0,b,-a)$	$abc - \frac{1}{4}(ab^2 + a^2b)$	$\{2,6,7\}$	$(0,b,-a)$	
$\{2,4,5\}$	$(0,0,a)$	$abc - \frac{1}{4}a^2b$	$\{3,6,7\}$	$(0,b,-a)$	
$\{2,4,6\}$	$(0,0,-a)$	$abc - \frac{1}{4}a^2b$	$\{4,6,7\}$	$(b,0,-a)$	wie $I = \{1,4,6\}$ mit $a = b$

Offenbar ist $\det C \ge abc - \frac{1}{4}(ab^2 + a^2c)$ und

$$abc \le abc + \frac{1}{2}ab(c-b) + \frac{1}{2}ac(b-a) \le 2\det(C).$$

Gleichheit gilt nur, wenn $a = b = c$ und $2(x, y, z) \in \{(a,a,a), (a,a,0), (a,0,\pm a), (0,a,\pm a)\}$. Nach Beispiel 21.52 gilt $(a,a,a) \sim (a,a,0)$. Durch Permutation von x, y, z und Vorzeichenwechsel sieht man $(a,a,0) \sim (a,0,\pm a) \sim (0,a,\pm a)$. □

Satz A.14 (Gauss)**.** *Für jedes Gitter $\Delta \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt $\rho(\Delta) \le \frac{\pi}{3\sqrt{2}}$. Gilt Gleichheit, so hat die Gram-Matrix von Δ die Form*

$$c \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

bei geeigneter Basiswahl.

Beweis. Sei C die Gram-Matrix von Δ. Durch Basiswechsel können wir annehmen, dass q_C reduziert ist. Wie in Bemerkung 21.11 ordnen wir Einheitskugeln mit Mittelpunkten in Δ an. Da sich die Kugeln nicht überschneiden, gilt $c_{11} = \min(\Delta)^2 \ge 4$. Aus Oppenheim folgt $\det C \ge 2^5$. Dies zeigt

$$\rho(\Delta) = \frac{4\pi}{3\,\mathrm{disc}(\Delta)} = \frac{4\pi}{3\sqrt{\det C}} \le \frac{\pi}{3\sqrt{2}}.$$

Gilt Gleichheit, so kann man nach Oppenheim eine Basis von Δ konstruieren, sodass C die angegebene Form hat. □

Satz A.15 (FISCHER-Ungleichung)**.** *Sei* $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ B^* & C \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *positiv definit. Dann gilt* $\det M \leq \det(A)\det(C)$ *mit Gleichheit genau dann, wenn* $B = 0$.

Beweis. Nach dem Sylvester-Kriterium sind A, C sowie A^{-1}, C^{-1} positiv definit. Mit Aufgabe II.23 gilt

$$D := \operatorname{diag}(\sqrt{A}, \sqrt{C})^{-1} M \operatorname{diag}(\sqrt{A}, \sqrt{C})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{A}^{-1} B \sqrt{C}^{-1} \\ \sqrt{C}^{-1} B^* \sqrt{A}^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Aus Satz A.8 folgt

$$\det(A)^{-1}\det(C)^{-1}\det(M) = \det D \leq (\operatorname{tr}(D)/n)^n = 1,$$

also $\det M \leq \det(A)\det(C)$. Gleichheit gilt genau dann, wenn D eine Skalarmatrix ist, d. h. $\sqrt{A}^{-1} B \sqrt{C}^{-1} = 0 = B$. □

Folgerung A.16. *Sei* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *positiv definit und* $A^{-1} = (b_{ij})$. *Dann ist* $a_{ii}b_{ii} \geq 1$ *für* $i = 1, \ldots, n$.

Beweis. Nach der Formel für die komplementäre Matrix $\widetilde{A}$ ist $b_{ii} = \det(A_{ii})/\det(A)$. Durch Vertauschen der ersten und i-ten Zeile/Spalte ist A ähnlich zu $\left(\begin{smallmatrix} a_{ii} & B \\ B^* & A_{ii} \end{smallmatrix}\right)$. Aus Fischer folgt $\det A \leq a_{ii}\det(A_{ii}) = a_{ii}b_{ii}\det(A)$. □

Stichwortverzeichnis

A

Abbildung, 19
- adjungierte, 129
- affine, 51
- antilineare, 179
- bijektive, 19
- diagonalisierbare, 65
  - simultan, 137
- duale, 62
- halbeinfache, 162
- hermitesche, 129
- injektive, 19
- konkave, 265
  - strikt, 265
- konvexe, 265
  - strikt, 265
- lineare, 50
- nilpotente, 140
- normale, 129
- orthogonale, 105
- separable, 162
- surjektive, 19
- symmetrische, 105
- trigonalisierbare, 136
  - simultan, 138
- unitäre, 129

Ableitung, 160
Absolutglied, 87
Additionstheoreme, 107
Adjunkte, 74
affin (un)abhängig, 261
affine Hülle, 261
affiner Raum, 28
allgemeiner Entwicklungssatz, 84
AlphaEvolve, 188
Äquivalenzklasse, 18
Äquivalenzrelation, 18
Assoziativgesetz, 21, 23
Auslöschung, 192
Aussage, 11
- äquivalente, 11

Austauschsatz, 32
Auswahlaxiom, 13, 17
Axiom, 13

B

Banach-Tarski-Paradoxon, 13
Banachraum, 198
Banachs Fixpunktsatz, 199
Barnes, 268
Basis
- duale, 59
- eines Gitters, 236
- eines Vektorraums, 30

Basisergänzungssatz, 32
Basismenge, 231, 265
- zulässige, 231

Basistransposition, 85
Basiswechsel, 57
Basiswechselmatrix, 54
Bauer-Fike, 205
Begleitmatrix, 150
Betrag, 100
- komplexer Zahl, 109

Bézout, 148
Bidualraum, 60
Bijektion, 19
Bild, 19
Bilinearform, 115
- alternierende, 115
- antisymmetrische, 115
- ausgeartete, 115
- indefinite, 122
- Index, 120
- negativ (semi)definite, 122
- positiv (semi)definite, 122
- symmetrische, 115

binäre Exponentiation, 259
Binet-Formel, 96
Blichfeldt, 247
Blockdiagonalmatrix, 39
Bruhat-Zerlegung, 259
Bubblesort, 85

C

Cantor, 13, 21
Carathéodory, 228
Cartan-Dieudonné, 113
Cauchy, 266
Cauchy-Binet-Formel, 72
Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 101, 128
Cauchys Reißverschluss-Satz, 213
Cayley-Hamilton, 97
Ceres, 196

Chan-Li, 134
Charakteristik, 116
charakteristisches Polynom
  einer Abbildung, 93
  einer Matrix, 93
Chinesischer Restsatz, 160
Cholesky-Verfahren, 208
Cholesky-Zerlegung, 196
Collatz-Wielandt, 222
Conway, 258
Courant-Fischer, 213
Cramers Regel, 76

D
Darstellungsmatrix, 54
De Morgans Regeln, 12, 15
Dedekind-Identität, 82
Definitionsbereich, 19
Determinante
  einer Abbildung, 72
  einer Matrix, 69
  einer quadratischen Form, 252
Determinantensatz, 71
Dezimalbruch, 15
Diagonalisierbarkeit, 65
  simultane, 137
    für Bilinearformen, 267
Diagonalisierungsargument, 21
Diagonalmatrix, 36
Differentialgleichung, 219
Differenz, 14
Dimension, 33
Dimensionsformel, 34
direktes Produkt, 24
Diskriminante, 238
Distributivgesetz, 12, 15, 24
Division mit Rest, 89
Drehspiegelung, 113
Drehung, 107
Dreiecksmatrix, 67
  strikte, 67
Dreiecksungleichung, 102, 128, 198
Dualitätssatz, 230
Dualraum, 59
Durchschnitt, 14

E
Ecke, 231, 265
Eichler, 247
Eigenraum, 64
Eigenvektor, 64
Eigenwert, 64
Einheitsmatrix, 35
Einheitswurzeln, 109
Einschränkung, 20
Einwegfunktion, 22
Elementarmatrix, 43
Elementarteiler, 243
Endomorphismus, 64
Erzeugendensystem, 30
Erzeugermatrix, 236
euklidischer Algorithmus, 147
euklidischer Raum, 100
Euler, 113
Exponentialfunktion, 22, 216

F
Faktorraum, 28
Faltungssatz, 185
Farkas' Lemma, 229
FFT, *siehe* Fourier-Transformation
Fibonacci-Zahlen, 95
Fillmore, 58
Fischer-Ungleichung, 270
Fitting, 138
Flanders-Wimmer, 172
Fourier-Matrix, 185
Fourier-Transformation
  diskrete, 185
  kontinuierliche, 186
  schnelle, 186
Francis-Algorithmus, 206
Frobenius, 156
Frobenius-Norm, 201
Frobenius-Normalform, 151
Frobenius-Ungleichung, 83
Fuglede, 179
Fundamentalmasche, 238
Fundamentalsatz der Algebra, 110
Funktion, *siehe* Abbildung
Funktional, 59
Funktionalanalysis, 34
Funktionalgleichung, 217

G
Galois-Verbindung, 60
Gauß, 255, 269
Gauß-Algorithmus, 44
  mit Pivotisierung, 193
Gauß-Seidel-Verfahren, 199
geometrische Reihe, 214
Gershgorin, 209
Gitter, 236
  Basis
    δ-reduziert, 249
  duales, 237
  E_8, 240
  ganzes, 238
  selbstduales, 237
  (un)zerlegbares, 247
Givens-Rotation, 211
Gleichungssystem, 41

(in)homogenes, 41
lösbares, 41
überbestimmtes, 42
unterbestimmtes, 42
Gleitkommazahlen, 192
Gödels Unvollständigkeitssätze, 13
Goldbachs Vermutung, 11
Golden-Thompson-Ungleichung, 218
goldener Schnitt, 95
Google-Matrix, 225
Gradmaß, 102
Gram-Matrix
einer Bilinearform, 116
einer quadratischen Form, 251
eines Gitters, 236
Gram-Schmidt-Verfahren, 103
modifiziertes, 210
Gruppe, 23
abelsche, 23
affine, 84
allgemeine lineare, 39
alternierende, 79
orthogonale, 105
spezielle lineare, 72
spezielle orthogonale, 107
spezielle unitäre, 131
symmetrische, 76
unitäre, 129, 131

H

Hadamard-Produkt, 173
Hadamard-Ungleichung, 260
Hales, 239
Hamiltons Schiefkörper, 181
Harriot, 239
Harvey-van der Hoeven, 186
Håstad, 168
Hauptachsensatz, 111
Hauptdiagonale, 36
Hauptminor, 125
Hauptraum, 138
Hauptraumzerlegung, 139
Hauptsatz lineare Optimierung, 233
Hermite, 245
Hermite-Konstante, 247
Hermite-Normalform, 242
Heron-Verfahren, 259
Hesse-Matrix, 123
Hessenberg-Matrix, 207
Hilbert-Matrix, 189
Hintereinanderausführung, 20
Homogenität, 101, 127, 198
Homomorphiesatz, 54
Homomorphismus, 50
Homöomorphismus, 50
Horner-Schema, 90
Householder-Transformation, 178, 211
Hyperebene, 33
Hyperwürfel, 68

I

Identität, 20
Imaginärteil, 109
Index, 120
Inklusionsabbildung, 20
Interpolation, 91
Invariante, 68
inverses Element, 23
Isomorphiesatz
erster, 53
zweiter, 53
Isomorphismus, 50

J

Jacob, 152
Jacobi, 217
Jordan-Chevalley-Zerlegung, 164
Jordan-Normalform, 142
Jordanblock, 140
verallgemeinerter, 163

K

Karatsuba-Algorithmus, 184
Kardinalzahl, 21
kartesisches Produkt, 17
Kepler, 239
Kern, 51
Kitaoka, 263
Koeffizient, 87
führender, 87
Koeffizientenmatrix, 41
erweiterte, 41
Kommutativgesetz, 23
Komplement, 32
duales, 60
orthogonales, 104, 118
komplexe Konjugation, 110
Komposition, 20
Konditionszahl, 189, 202
Kongruenz
von Matrizen, 118
von Polynomen, 159
Kontinuumshypothese, 13, 21
Kontraktion, 199
Kontraposition, 12
konvexe Hülle, 228
Konvexkombination, 228
Koordinatendarstellung, 31
Korkine-Zolotarev, 254
Körper, 24
angeordneter, 109
der algebraischen Zahlen, 171
der komplexen Zahlen, 109

der rationalen Funktionen, 161
mit drei Elementen, 82
mit vier Elementen, 158
mit zwei Elementen, 24
Korrespondenzsatz, 82
Kosinus, 102
Kosinussatz, 177
Kreuzpolytop, 228
Kreuzprodukt, 105
Kronecker-Capelli, 41
Kronecker-Delta, 35
Kronecker-Produkt, 167
Kronecker-Summe, 170

L

Lagrange-Polynom, 91
Länge
eines Zyklus, 77
Laplace-Entwicklung, 73
Large-Language-Model, 188
Leibniz-Formel, 79
Leitkoeffizient, 87
Lights Out, 85
linear (un)abhängig, 30
lineares Programm, 227
duales, 230
lösbares, 227
unbeschränktes, 227
unzulässiges, 227
Linearfaktor, 92
Linearkombination, 26
affine, 261
konvexe, 228
LLL-Algorithmus, 249
Logarithmentafel, 185
Logarithmus, 22
Lösungsmenge, 41
Lovász-Bedingung, 249
LR-Zerlegung, 194
LWE, 238

M

Mantisse, 192
Markov-Ketten, 219
Matrix, 35
adjungierte, 130
ähnliche, 57
antisymmetrische, 117
äquivalente, 47
Block-, 38
diagonal-dominante, 209
diagonalisierbare, 65
simultan, 179
dünnbesetzte, 73
gut/schlecht konditionierte, 189
hermitesche, 130
positiv (semi)definite, 179
inverse, 38
invertierbare, 38
komplementäre, 74
kongruente, 118
konvergiert, 203
konvergiert quasi, 206
nicht-negative, 219
nilpotente, 140
normale, 130
orthogonale, 107
positive, 219
quadratische, 35
reguläre, 38
schiefsymmetrische, 117
singuläre, 38
stochastische, 219
symmetrische, 36
transponierte, 36
trigonalisierbare, 132, *136*
simultan, 180
unitäre, 130
(un)zerlegbare, 219
vertauschbare, 38
zeilen-äquivalente, 43
zyklische, 224
Matrixnorm, 201
induzierte, 201
submultiplikative, 201
Matrizeninversion, 47
Mazur-Ulam, 106
Menge
abzählbare, 21
disjunkte, 14
gleichmächtige, 19
konvexe, 228
leere, 14
(un)endliche, 13
überabzählbare, 21
Mercator-Reihe, 219
Merkregel, 37, 53, 54, 56, 66, 90, 112
Methode der kleinsten Quadrate, 196
Millenniumsproblem, 12
Min-Max-Satz, 213
Minimal-Norm, 238
Minimalpolynom, 96
Minkowski, 29, 254, 257
Minkowski-Raum, 121
Minkowski-Ungleichung, 260, 267
Minkowskis Gitterpunktsatz, 247
Minkowskis Linearformensatz, 246
Mirsky, 95
von Mises, 222
Modul, 236
Modus ponens, 12
Moore-Penrose, 191

Mordell, 253
Multilinearform, 116, *178*
alternierende, 178

N
Neumann-Reihe, 214
neutrales Element, 23
Newton-Verfahren, 111
Norm, 100, 127, *197*
äquivalente, 198
Normalform
Frobenius, 151
Hermite, 242
Jordan, 142
Smith, 243
Weierstraß, 151
Normalgleichungssystem, 196
Nullmatrix, 35
Nullpolynom, 87
Nullraum, 25
Nullstelle, 90
doppelte, 92
einfache/mehrfache, 92
Nullvektor, 25

O
Oppenheim, 268
Oppenheim-Ungleichung, 174
Ordnungsrelation, 18
lexikografische, 143
totale, 18
Orthogonalbasis, 118
orthogonale Zerlegung, 247
Orthonormalbasis, 103
bzgl. Bilinearform, 118

P
Page-Rang, 224
Paradoxon, 12
Parallelogrammgleichung, 101
Partition
einer Menge, 14
einer Zahl, 140
Permutation, 76
Permutationsmatrix, 78
Perron, 220
Perron-Frobenius, 221
Piazzi, 196
Pivot, 193
Polardarstellung, 195, 260
Polarisierung, 116
Polyeder, 231
Polynom, 87
Ableitung, 160
Begleitmatrix, 150
Grad, 87
irreduzibles, 147
kongruente, 159
konstantes, 87
normiertes, 87
separables, 160
teilerfremde, 147
Polytop, 232
Potenzmenge, 15
Potenzmethode, 205
Prädikat, 11
Primärzerlegung, 149
Primfaktorzerlegung in $K[X]$, 148
Produktregel, 161
Projektion, 51
Pseudoinverse, 191
Pythagoras, 101
trigonometrischer, 177

Q
QR-Verfahren, 206
QR-Zerlegung, 195
quadratische Form, 116, *251*
äquivalente, 252
binäre, 253
ganze, 252
indefinite, 263
Minimum, 252
nicht-ausgeartete, 252
positive, 252
reduzierte, 254
unimodulare, 253
universelle, 258
Quantenmechanik, 218

R
Rado, 246
Rang
einer Abbildung, 51
einer Matrix, 40
eines Gitters, 236
Rayleigh-Quotient, 213
Realteil, 109
Rechte-Hand-Regel, 105
Relation, 17
antisymmetrische, 18
asymmetrische, 18
reflexive, 17
symmetrische, 17
transitive, 18
triviale, 18
Repräsentantensystem, 18
Rest, 89
Ring, 37
Roth, 172, 173
RSA, 239
Rückwärtssubstitution, 197
Ruffinis Regel, 90

Russells Antinomie, 13

S

Sarrus-Regel, 79
SAT-Problem, 12
Satz vom ausgeschlossenen Dritten, 12
Satz vom Widerspruch, 12
Schatzman, 208
Schlupfvariable, 227
Schönhage-Strassen-Algorithmus, 186
Schur
    Produktsatz, 174
Schur-Horn, 134
Schur-Produkt, 173
Schur-Zerlegung, 132
    reelle, 179
Schurs Lemma, 157
Selectionsort, 78
Sesquilinearform, 127
Signum, 78, 85
Simplex-Algorithmus, 235
Simplex-Kriterium, 233
Singulärwertzerlegung, 189
Sinus, 103
Sinussatz, 177
Skalar, 25
Skalarmatrix, 36
Skalarprodukt, 100, 127
Smith-Normalform, 243
Spaltenoperation, 43
Spaltenvektor, 35
Spann, 29
Spektralradius, 214
Spektralsatz, 131
Spektrum, 131
Spiegelung
    in $\mathbb{R}^2$, 108
    in $\mathbb{R}^n$, 113
Spur
    einer Abbildung, 58
    einer Matrix, 58
Standardbasis, 30
Standardmatrix, 36
Standardskalarprodukt, 101, 127
Steinitz, 32
Stirling-Zahl, 261
Strassen-Algorithmus, 187
sukzessive Minima, 256
Summe von Unterräumen, 29, 65
    direkte, 29
Summenregel, 161
Sylvester-Gleichung, 171
Sylvester-Kriterium, 124
Sylvester-Ungleichung, 83
Sylvesters Determinanten-Formel, 176
Sylvesters Trägheitssatz
    für hermitesche Matrizen, 133
    für symmetrische Bilinearformen, 120
symplektischer Raum, 122

T

Taussky, 180
Teiler, 89
    gemeinsamer, 241
        größter, 241
Teilmenge, 14
    echte, 14
Tensorprodukt, 167
Träger, 231
Transitivität, 12
Translation, 84
Transposition, 77
Tridiagonalmatrix, 253
Tripel, 17
Tupel, 17

U

Übergangsmatrix, 219
Umkehrfunktion, 21
Umkehrung, 12
Ungleichung HM-GM-AM-QM, 266
unitärer Raum, 127
Untergruppe, 26
    echte, 27
Unterraum, 27
    echter, 27
    F-invarianter, 181
    f-invarianter, 136
    zyklischer, 150
Urbild, 19

V

Vandermonde-Matrix, 74
Variable, 87
Vektor, 25
    kurzer, 238
    normierter, 100, 127
    orthogonale, 100, 127
Vektorisierung, 169
Vektorprodukt, 105
Vektorraum, 25
    endlich erzeugter, 30
    endlich-dimensionaler, 33
    euklidischer, 100
    isomorphe, 50
    unitärer, 127
Venn-Diagramm, 14
Vereinigung, 14
    disjunkte, 14
Verkettung, 20
Viazovska, 240
Vielfachheit
    algebraische, 92

geometrische, 64
vollständige Induktion, 16
Vorwärtssubstitution, 197
Vorzeichen, 78

W
Weierstraß-Normalform, 151
Wertebereich, 19
Wielandt, 223
Wilkinson, 206
Winkel, 102
orientierter, 107

Z
Zahlen
ganze, 14
komplexe, 109
natürliche, 14
rationale, 14
reelle, 15
Zassenhaus-Algorithmus, 48
Zeilenoperation, 43
Zeilenstufenform, 44
Zeilenvektor, 35
Zentralisator, *155*, 181
Zerfällungskörper, 158
Zermelo-Fraenkel-System, 13
Zirkelschluss, 31
Zorns Lemma, 33
Zyklus, 77
disjunkte, 77