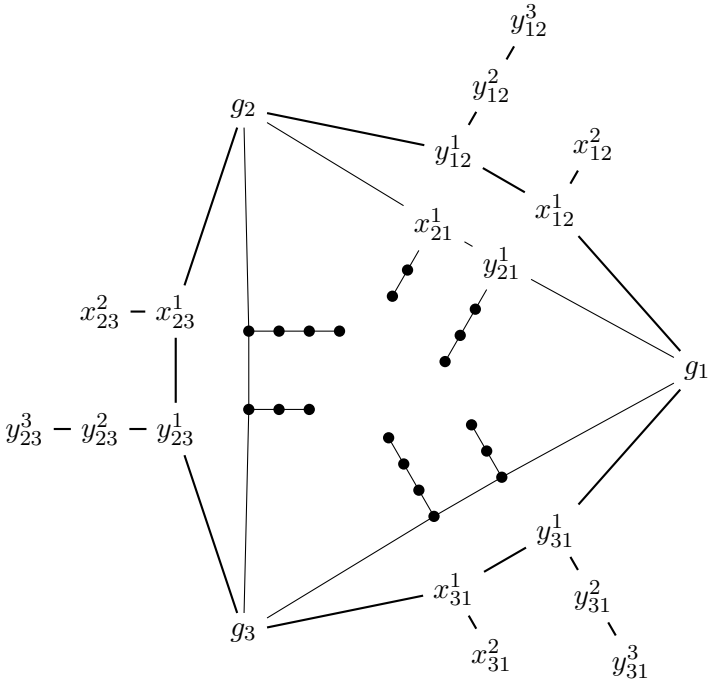
Diskrete Mathematik

Vorlesung im Sommersemester 2021

Benjamin Sambale
Leibniz Universität Hannover

Version: 28. November 2026



Inhaltsverzeichnis

Vorwort 2

Kombinatorik **4**

1 Endliche Mengen 4
2 Permutationen und Partitionen 11
3 Rekursionen und Differenzen 22
4 Formale Potenzreihen 30
5 Erzeugende Funktionen 39
6 Zählen bis auf Symmetrie 45

Graphentheorie **51**

1 Eulersche Touren und Hamiltonsche Kreise 51
2 Nachbarn und Zusammenhang 57
3 Isomorphe Graphen 61
4 Planare und bipartite Graphen 67
5 Färben von Graphen 74
6 Bäume 79

Aufgaben **86**

Anhang **104**

Stichwortverzeichnis **106**

Vorwort

Dieses Skript entstand aus einer $4+2$-Vorlesung im Sommersemester 2021 (14 Wochen) an der Leibniz Universität Hannover. Die Veranstaltung richtete sich hauptsächlich an Bachelor-Studierende der Mathematik sowie an Studierende in fachübergreifenden Bachelorstudiengängen (Lehramt). Es wurden Kenntnisse der Algebra 1 vorausgesetzt.

Die diskrete Mathematik beschäftigt sich mit Objekten, die in gewisser Weise *endlich* sind (z. B. endliche Mengen, Graphen, endlich-dimensionale Vektorräume). Sie unterscheidet sich in diesem Punkt von der Analysis, wo *kontinuierliche* (nicht etwa „indiskrete“) Objekte untersucht werden (z. B. reelle Zahlen, Grenzwerte, unendliche Reihen, Integrale). Die diskrete Mathematik ist somit ein sehr umfangreiches Gebiet, aus dem wir in dieser Vorlesung nur die Teilbereiche *Kombinatorik* und *Graphentheorie* studieren. Einige Abschnitte des Skripts (insbesondere Kapitel 3 und Kapitel 2) wurden in der Vorlesung nicht besprochen.

Literatur:

- M. Aigner, *Diskrete Mathematik*, 6. Auflage, Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2006
- R. Diestel, *Graphentheorie*, 5. Auflage, Springer Verlag, Heidelberg, 2017

Ich danke ganz besonders David Munkacsi für sein sehr genaues Lesen und zahlreiche Fehlermeldungen in der erweiterten Version des Skripts. Für Fehlerhinweise danke ich außerdem: Luca Blaas, Karl Böhlke, Lars Kühne, Lara Lütkemeyer, Luca Pawletzki, Claude Sonnet (4.6), Inga Stolley, Júlia Víllora Martí und Alexander Witt.

Kombinatorik

Bemerkung. Kombinatorik ist die Lehre vom Abzählen diskreter Objekte:

- (leicht) Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist $\binom{n}{k}$.
- (mittel) Die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen auf $\{1, \ldots, n\}$ ist $[n!/e]$.
- (schwer) Die Anzahl der Partitionen von $5n + 4$ ist durch 5 teilbar.
- (sehr schwer) Jede Landkarte lässt sich mit vier Farben färben, sodass benachbarte Länder verschiedene Farben haben.
- (ungelöst) Wie viele magische Quadrate der Größe 6×6 gibt es?

1 Endliche Mengen

Definition 1.1.

- Leere Menge: $\varnothing$.
- Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$.
- Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$.
- Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$.
- Reelle Zahlen: $\mathbb{R}$ (Analysis).
- Komplexe Zahlen: $\mathbb{C} = \{a + b\mathrm{i} : a, b \in \mathbb{R}\}$.
- Für eine Menge A sei $|A|$ die Mächtigkeit von A. Man nennt A *endlich*, falls $|A| < \infty$ und anderenfalls *unendlich*. Wir unterscheiden mit der Schreibweise $|A| = \infty$ keine Kardinalitäten (abzählbar, überabzählbar etc.). Zwei Mengen A und B heißen *gleichmächtig*, falls eine Bijektion $A \to B$ existiert.
- Sind A_i $(i \in I)$ Mengen, so auch ihr *kartesisches Produkt* $\bigtimes_{i \in I} A_i = \big\{(a_i : i \in I) : a_i \in A_i\big\}$. Im Fall $A = A_i$ für alle $i \in I$ schreiben wir auch $A^I := \bigtimes_{i \in I} A$. Für $I = \{1, \ldots, n\}$ schreiben wir $A_1 \times \ldots \times A_n$ und $A^n = A \times \ldots \times A$ (n Faktoren).
- Sind A_i $(i \in I)$ Mengen, so auch ihre *disjunkte Vereinigung*

$$\bigsqcup_{i \in I} A_i := \bigcup_{i \in I} \{(a, i) : a \in A_i\} \subseteq \big(\bigcup_{i \in I} A_i\big) \times I.$$

  Für $I = \{1, \ldots, n\}$ schreiben wir $A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n$.

- Für eine Menge A ist $2^A := \{B \subseteq A\}$ die *Potenzmenge* von A. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\binom{A}{k} := \{B \subseteq A : |B| = k\} \subseteq 2^A$$

die Menge der k-elementigen Teilmengen von A.

Bemerkung 1.2. Für Mengen A und I kann man A^I mit der Menge aller Abbildungen $I \to A$ identifizieren, indem man $(a_i)_{i\in I} \in A^I$ durch $f\colon I \to A$ mit $f(i) := a_i$ ersetzt.

Satz 1.3. *Für endliche Mengen $A, B, A_1, \ldots, A_n$ gilt*

(i) $|A_1 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \ldots |A_n|$ *und* $|A^n| = |A|^n$.

(ii) $|A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n| = |A_1| + \ldots + |A_n|$.

(iii) *A und B sind genau dann gleichmächtig, falls* $|A| = |B|$.

(iv) $|2^A| = 2^{|A|}$.

Beweis.

(i) Für jedes Element $(a_1, \ldots, a_n) \in A_1 \times \ldots \times A_n$ gibt es $|A_1|$ Möglichkeiten, a_1 zu wählen, $|A_2|$ Möglichkeiten für a_2 usw. Umgekehrt liefert jede solche Wahl genau ein Element von $A_1 \times \ldots \times A_n$.

(ii) Jedes Element in $A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n$ liegt in genau einer der Mengen $\{(a, i) : a \in A_i\}$. Dabei gilt $|\{(a, i) : a \in A_i\}| = |A_i|$.

(iii) Sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und $f\colon A \to B$ eine Bijektion. Dann gilt $B = \{f(a_1), \ldots, f(a_n)\}$ mit $f(a_i) \neq f(a_j)$ für $i \neq j$. Dies zeigt $|B| = n = |A|$. Sei umgekehrt $|A| = |B|$ und $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ sowie $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Dann ist $f\colon A \to B$, $a_i \mapsto b_i$ eine Bijektion.

(iv) Sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Für $B \subseteq A$ sei $f(B) := (x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ mit $x_i = 1 \iff a_i \in B$. Dann ist $f\colon 2^A \to \{0, 1\}^n$, $B \mapsto f(B)$ eine Bijektion. Aus (iii) und (i) folgt

$$|2^A| = |\{0, 1\}^n| = |\{0, 1\}|^n = 2^n = 2^{|A|}. \qquad \square$$

Definition 1.4.

- Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $n! := \prod_{k=1}^{n} k$ die *Fakultät* von n. Beachte: $0! = 1$ (leeres Produkt).
- Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definiert man den *Binomialkoeffizienten*

$$\boxed{\binom{a}{k} := \frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}.}$$

- Für $n, k_1, \ldots, k_s \in \mathbb{N}_0$ mit $n = k_1 + \ldots + k_s$ sei

$$\boxed{\binom{n}{k_1, \ldots, k_s} := \frac{n!}{k_1! \ldots k_s!}}$$

der *Multinomialkoeffizient* von n und $k_1, \ldots, k_s$.

Bemerkung 1.5. Es gilt $\binom{a}{0} = 1$ (leeres Produkt) und $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n \in \mathbb{N}_0$. Für $k \leq n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k, n-k}$$

und

$$\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}}$$

(siehe Bemerkung 1.14). Man kann die Binomialkoeffizienten daher mit dem *pascalschen Dreieck* berechnen:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & & \binom{1}{1} & & & & & 1 & & & 1 & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & & \binom{2}{1} & & & \binom{2}{2} & & & & 1 & & & 2 & & & 1 & \\
 & & & \binom{3}{0} & & & \binom{3}{1} & & & \binom{3}{2} & & & \binom{3}{3} & & & 1 & & & 3 & & & 3 & & & 1 \\
 & & \binom{4}{0} & & & \binom{4}{1} & & & \binom{4}{2} & & & \binom{4}{3} & & & \binom{4}{4} & 1 & & & 4 & & & 6 & & & 4 & & & 1
\end{array}$$

Bemerkung 1.6 („Variation mit Wiederholung“)**.** Für endliche Mengen A und B existieren nach Satz 1.3 genau $|B^A| = |B|^{|A|}$ Abbildungen $A \to B$.

Beispiel 1.7. Ein 4-stelliges Zahlenschloss besitzt $10^4 = 10.000$ mögliche Zustände (wähle $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{0, 1, \dots, 9\}$ in Bemerkung 1.6). Wenn ein Dieb pro Sekunde einen Zustand prüft, braucht er durchschnittlich ca. 83 Minuten, um das Schloss zu knacken.[1]

Satz 1.8 („Variation ohne Wiederholung“)**.** *Für endliche Mengen A und B existieren genau $\binom{|B|}{|A|}|A|!$ injektive Abbildungen $A \to B$.*

Beweis. Im Fall $|A| > |B|$ gibt es keine injektiven Abbildungen $A \to B$ und in der Tat ist $\binom{|B|}{|A|} = 0$. Sei nun $k := |A| \leq |B| =: n$ und $A = \{a_1, \dots, a_k\}$. Für jede injektive Abbildung $f\colon A \to B$ gibt es n Möglichkeiten für $f(a_1)$. Ist $f(a_1)$ festgelegt, so bleiben noch $n-1$ Möglichkeiten für $f(a_2) \in B \setminus \{f(a_1)\}$ usw. Die Anzahl der injektiven Abbildungen ist also $n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k}k!$. □

Beispiel 1.9 (Geburtstagsparadoxon)**.** Für Personen $P_1, \dots, P_n$ betrachten wir die Abbildung

$$f\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, 365\},$$

die i auf den Geburtstag von P_i abbildet (Schaltjahre, Zwillinge etc. vernachlässigt). Nach Bemerkung 1.6 gibt es 365^n solche Abbildungen, wovon $\binom{365}{n}n!$ injektiv sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben, ist daher

$$1 - \binom{365}{n}\frac{n!}{365^n}$$

(Laplace-Formel). Für $n = 23$ erhält man bereits $> 50\%$.

[1] Das war die 32.000-Euro-Frage bei der Fernseh-Show „Wer wird Millionär“ am 26.04.21.

Bemerkung 1.10.

(i) Der Fall $|A| > |B|$ in Satz 1.8 liefert das *Dirichletsche Schubfachprinzip*: Verteilt man n Objekte in $k < n$ Schubladen, so muss mindestens eine Schublade mehrere Objekte enthalten. Beispiel: In Hannover gibt es zwei Personen mit der gleichen Anzahl von Haaren auf dem Kopf, denn niemand hat mehr Haare als Hannover Einwohner hat (> 500.000).

(ii) Im Fall $|A| = |B|$ ist jede injektive Abbildung $A \to B$ auch bijektiv (vorausgesetzt $|A| < \infty$). Bijektionen $A \to A$ heißen *Permutationen* auf A. Bekanntlich bilden die Permutationen auf A die *symmetrische Gruppe* $\mathrm{Sym}(A)$ bzgl. Komposition von Abbildungen. Das neutrale Element ist id_A und das Inverse zu $f \in \mathrm{Sym}(A)$ ist die Umkehrabbildung f^{-1}. Wir setzen $S_n := \mathrm{Sym}(\{1, \dots, n\})$. Nach Satz 1.8 ist

$$|\mathrm{Sym}(A)| = |S_{|A|}| = \binom{|A|}{|A|} |A|! = |A|!.$$

Beispiel 1.11.

$$S_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Satz 1.12 („Kombination ohne Wiederholung“)**.** *Für jede endliche Menge A und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\boxed{\left| \binom{A}{k} \right| = \binom{|A|}{k}.}$$

Beweis. Sei $K := \{1, \dots, k\}$. Jede k-elementige Teilmenge $B \subseteq A$ ist das Bild einer injektiven Abbildung $f \colon K \to A$. Haben zwei solche Abbildungen f und g das gleiche Bild, so ist $f^{-1} \circ g \colon K \to K$ injektiv, also in $\mathrm{Sym}(K)$. Jedes B entsteht daher durch genau $|\mathrm{Sym}(K)| = k!$ viele injektive Abbildungen. Die Behauptung folgt nun aus Satz 1.8. □

Beispiel 1.13. Beim Lotto „6 aus 49“ gibt es $\binom{49}{6} = 13.983.816$ Möglichkeiten und die Wahrscheinlichkeit für einen 4er ist

$$\frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{645}{665896} \approx 0{,}1\%.$$

Bemerkung 1.14.

(i) Die Bijektion $\binom{A}{k} \to \binom{A}{|A|-k}$, $B \mapsto A \setminus B$ erklärt die Symmetrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Ebenso lässt sich die Identität $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ kombinatorisch interpretieren: Für $a \in A$ gibt es genau $\binom{|A \setminus \{a\}|}{k-1}$ Teilmengen $B \in \binom{A}{k}$, die a enthalten, und $\binom{|A \setminus \{a\}|}{k}$ Teilmengen $B \in \binom{A}{k}$, die a nicht enthalten.

(ii) Nach Satz 1.3 und Satz 1.12 ist

$$2^n = |2^{\{1,\dots,n\}}| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Dies ist ein Spezialfall des bekannten *Binomialsatzes* (setze $a = b = 1$)

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}} \qquad (a, b \in \mathbb{C}).$$

Lemma 1.15 (Polynom-Methode). *Zwei Polynome $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[X]$ sind identisch, wenn sie an unendlich vielen Stellen $x \in \mathbb{C}$ übereinstimmen.*

Beweis. Nach Voraussetzung hat $\alpha - \beta$ unendlich viele Nullstellen. Nach Algebra 1 muss $\alpha - \beta$ das Nullpolynom sein (anderenfalls wäre die Anzahl der Nullstellen durch den Grad beschränkt). □

Satz 1.16 (VANDERMONDE-Identität). *Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\boxed{\binom{a_1 + \ldots + a_n}{k} = \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{N}_0^n \\ k_1 + \ldots + k_n = k}} \binom{a_1}{k_1} \cdots \binom{a_n}{k_n}.}$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung zunächst nur für $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. Seien $A_1, \ldots, A_n$ Mengen mit $|A_i| = a_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Wir bestimmen $\left|\binom{A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n}{k}\right|$ auf zwei Weisen. Nach Satz 1.12 ist einerseits

$$\left|\binom{A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n}{k}\right| = \binom{|A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n|}{k} = \binom{a_1 + \ldots + a_n}{k}.$$

Jede k-elementige Teilmenge von $A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n$ setzt sich andererseits zusammen aus k_i-elementigen Teilmengen von A_i für $i = 1, \ldots, n$ und $k_1 + \ldots + k_n = k$. Für jede dieser Teilmengen gibt es $\left|\binom{A_i}{k_i}\right| = \binom{a_i}{k_i}$ Möglichkeiten. Dies zeigt

$$\left|\binom{A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n}{k}\right| = \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{N}_0^n \\ k_1 + \ldots + k_n = k}} \binom{a_1}{k_1} \cdots \binom{a_n}{k_n}.$$

Wir halten nun $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{N}$ fest und ersetzen a_n durch eine Unbekannte X. Dann sind beide Seiten der Gleichung Polynome in X, die an unendlich vielen Stellen $x \in \mathbb{N}$ übereinstimmen. Nach der Polynom-Methode sind die Polynome gleich und die Gleichung gilt auch, wenn man für X eine komplexe Zahl a_n einsetzt. Man kann jetzt $a_1, \ldots, a_{n-2}, a_n$ festhalten und das Argument mit a_{n-1} wiederholen usw. □

Beispiel 1.17. Der Spezialfall $n = 2$ und $a_1 = a_2 = k$ in Satz 1.16 liefert

$$\binom{2k}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \binom{k}{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}^2.$$

Satz 1.18 („Variation mit Wiederholung“ II). *Seien $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und B endliche Mengen und $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ mit $|B| = k_1 + \ldots + k_n$. Dann existieren genau $\binom{|B|}{k_1,\ldots,k_n}$ Abbildungen $f\colon B \to A$ mit $|f^{-1}(a_i)| = k_i$ für $i = 1, \ldots, n$.*

Beweis. Sei $|B| = k$ und $f\colon B \to A$ mit $|f^{-1}(a_i)| = k_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Nach Satz 1.12 gibt es $\binom{k}{k_1}$ Möglichkeiten für $f^{-1}(a_1)$. Ist $f^{-1}(a_1)$ festgelegt, so verbleiben noch $\binom{k-k_1}{k_2}$ Möglichkeiten für $f^{-1}(a_2)$ usw. Also gibt es

$$\binom{k}{k_1}\binom{k-k_1}{k_2} \cdots \binom{k-k_1-\ldots-k_{n-1}}{k_n} = \frac{k!(k-k_1)! \ldots (k-k_1-\ldots-k_{n-1})!}{k_1!(k-k_1)!k_2!(k-k_1-k_2)! \ldots k_n!} = \binom{k}{k_1, \ldots, k_n}$$

Möglichkeiten für f. □

Beispiel 1.19.

(i) Ein *Anagramm* ist eine Permutation der Buchstaben eines Worts.[2] Nach Satz 1.18 gibt es $\binom{9}{3,2,1,1,1,1} = 30.240$ Anagramme von RAMANUJAN (wähle $A = \{a, n, r, m, u, j\}$, $B = \{1, \ldots, 9\}$, $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $k_3 = \ldots = k_6 = 1$). Zum Beispiel JANUARMAN oder MANJURANA.

(ii) Es gibt $\binom{32}{10,10,10,2} = 2.753.294.408.504.640$ Möglichkeiten, 32 Skatkarten an drei Spieler zu verteilen (wähle $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, \ldots, 32\}$, $k_1 = k_2 = k_3 = 10$ und $k_4 = 2$ in Satz 1.18). Möchte man die Spieler nicht unterscheiden, so reduziert sich die Anzahl um den Faktor $3! = 6$. Die Anzahl der möglichen Spielverläufe ist sehr viel größer und höchstwahrscheinlich nicht genau bekannt.

Bemerkung 1.20. Nach Bemerkung 1.6 und Satz 1.18 ist

$$n^k = |\{1, \ldots, n\}^k| = \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}_0^n \\ k_1+\ldots+k_n=k}} \binom{k}{k_1, \ldots, k_n}.$$

Dies ist ein Spezialfall des *Multinomialsatzes*

$$\boxed{(a_1 + \ldots + a_n)^k = \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}_0^n \\ k_1+\ldots+k_n=k}} \binom{k}{k_1, \ldots, k_n} a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n}} \qquad (a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C})$$

(Aufgabe 6). Für $n = 2$ erhält man den Binomialsatz.

Definition 1.21. Für eine beliebige Menge A bezeichnet man die Elemente aus $\mathbb{N}_0^A$ als *Multimengen* über A. Man kann eine Multimenge $M := (m_a)_{a\in A}$ als „Teilmenge“ von A interpretieren, wobei jedes $a \in A$ genau m_a-mal vorkommt (im Fall $m_a \leq 1$ für alle $a \in A$ ist M also eine echte Menge). Dementsprechend setzt man $|M| := \sum_{a\in A} m_a$. Wir werden Multimengen oft in der Form $\{a, a, b, c, c, c, \ldots\}$ notieren, wobei wie bei Mengen die Reihenfolge der Elemente keine Rolle spielt.

Satz 1.22 („Kombination mit Wiederholung“)**.** *Eine n-elementige Menge besitzt genau*

$$\boxed{\left(\binom{n}{k}\right) := \binom{n+k-1}{k}}$$

k-elementige Multimengen ($n, k \in \mathbb{N}_0$).

Beweis. O. B. d. A. sei $A = \{1, \ldots, n\}$. Man kann dann die k-elementigen Multimengen über A mit den Tupeln $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ mit $a_1 \leq \ldots \leq a_k$ identifizieren. Sei A_k die Menge dieser k-Tupel und sei $B_k = \binom{\{1,\ldots,n+k-1\}}{k}$. Dann sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} f\colon A_k &\to B_k, \\ (a_1, \ldots, a_k) &\mapsto \{a_1, a_2 + 1, \ldots, a_k + k - 1\} \\ g\colon B_k &\to A_k, \\ \{b_1, \ldots, b_k\} &\mapsto (b_1, b_2 - 1, \ldots, b_k - k + 1) \end{aligned}$$

zueinander inverse Bijektionen. Aus Satz 1.12 folgt $|A_k| = |f(A_k)| = \binom{n+k-1}{k}$. □

[2] Galileo veröffentlichte seine Entdeckung der Saturnringe (Altissimvm planetam tergeminvm observavi) als Anagramm SMAISMRMILMEPOETALEVMIBVNENVGTTAVIRAS, welches jedoch niemand entziffern konnte.

Beispiel 1.23.

(i) Die 3-elementigen Multimengen von $\{1,2\}$ sind $\{1,1,1\}$, $\{1,1,2\}$, $\{1,2,2\}$ und $\{2,2,2\}$.

(ii) Beim gleichzeitigen Werfen von drei identischen Würfeln gibt es $\left(\binom{6}{3}\right) = \binom{8}{3} = 56$ mögliche Ereignisse, die allerdings nicht alle gleichwahrscheinlich sind.

Bemerkung 1.24.

(i) Für $1 \leq k \leq n$ gilt

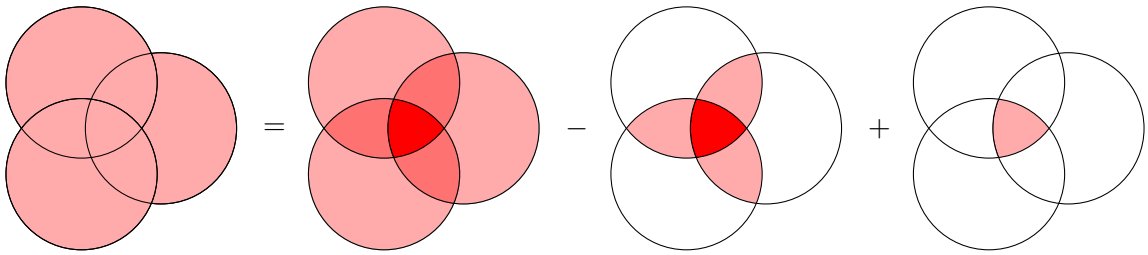
$$\left(\binom{n+1}{k}\right) = \binom{n+k}{k} = \binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k-1}{k} = \left(\binom{n+1}{k-1}\right) + \left(\binom{n}{k}\right).$$

(ii) Zusammenfassung:

	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
Variation	n^k	$n(n-1)\dots(n-k+1)$
Kombination	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Bemerkung 1.25. Für endliche Mengen A und B ist bekanntlich $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Offenbar gilt auch

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$



Dies lässt sich wie folgt verallgemeinern.

Satz 1.26 (Inklusions-Exklusions-Prinzip)**.** *Für endliche Mengen $A_1, \dots, A_n$ gilt*

$$\boxed{|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|.}$$

Beweis. Wir zählen, wie oft ein Element $a \in A_1 \cup \dots \cup A_n$ auf der rechten Seite berücksichtigt wird. Dafür sei o. B. d. A. $a \in A_1 \cap \dots \cap A_l$ und $a \notin A_i$ für $i > l$. Dann wird a genau dann gezählt, wenn $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, l\}$ gilt. Im k-ten Summanden wird a also $(-1)^{k+1}\binom{l}{k}$-mal gezählt. Insgesamt wird a auf der rechten Seite genau

$$\sum_{k=1}^{l} (-1)^{k+1} \binom{l}{k} = 1 - \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} = 1 - (1-1)^l = 1$$

Mal gezählt. Dies zeigt die Behauptung. □

Definition 1.27. Wie üblich heißen $a, b \in \mathbb{N}$ *teilerfremd*, falls 1 der einzige gemeinsame positive Teiler von a und b ist, d. h. $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$. Man nennt

$$\varphi(n) := \big|\{1 \le a \le n : \mathrm{ggT}(a,n) = 1\}\big| \qquad (n \in \mathbb{N})$$

die *eulersche φ-Funktion*.

Satz 1.28. *Sei $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ die Primfaktorzerlegung von $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\boxed{\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k} (p_i^{a_i} - p_i^{a_i - 1}).}$$

Beweis. Für $i = 1, \dots, k$ sei $A_i := \{1 \le a \le n : p_i \mid a\}$. Dann ist $A := \{1 \le a \le n : \mathrm{ggT}(a,n) \ne 1\} = A_1 \cup \dots \cup A_k$. Für $1 \le i_1 < \dots < i_l \le k$ ist

$$A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l} = \Big\{ j p_{i_1} \dots p_{i_l} : j = 1, \dots, \frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_l}} \Big\}.$$

Mit Satz 1.26 folgt

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= |\{1, \dots, n\} \setminus A| = n - |A| = n + \sum_{l=1}^{k} (-1)^l \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_l \le k} \frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_l}} \\ &= n\Big(1 - \frac{1}{p_1}\Big) \dots \Big(1 - \frac{1}{p_k}\Big) = (p_1^{a_1} - p_1^{a_1 - 1}) \dots (p_k^{a_k} - p_k^{a_k - 1}). \end{aligned}$$

□

Beispiel 1.29. $\varphi(100) = \varphi(2^2 \cdot 5^2) = (2^2 - 2)(5^2 - 5) = 2 \cdot 20 = 40$.

Bemerkung 1.30. In der Algebra beweist man Satz 1.28 meist mit dem chinesischen Restsatz.

2 Permutationen und Partitionen

Definition 2.1.

- Sei A eine Menge und $\sigma \in \mathrm{Sym}(A)$. Man nennt $a \in A$ *Fixpunkt* von σ, falls $\sigma(a) = a$. Besitzt σ keine Fixpunkte, so nennt man σ *fixpunktfrei*.
- Für $x \in \mathbb{R}$ sei $[x] \in \mathbb{Z}$ mit $|x - [x]| < \frac{1}{2}$ oder $[x] = x + \frac{1}{2}$ („Runden“).

Satz 2.2 (Montmort)**.** *Die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen in S_n beträgt $[n!/e]$, wobei $e = 2{,}718\dots$ die eulersche Zahl ist.*

Beweis. Für $i = 1, \dots, n$ sei $F_i := \{\sigma \in S_n : \sigma(i) = i\}$. Die Anzahl f_n der fixpunktfreien Permutationen von S_n ist dann $f_n = |S_n \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_n)| = n! - |F_1 \cup \dots \cup F_n|$. Für $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ ist

$$|F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}| = |\mathrm{Sym}(\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\})| = (n-k)!.$$

Satz 1.26 zeigt

$$f_n = n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} (n-k)! = n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Nun ist

$$\left|\frac{n!}{e} - f_n\right| = \left|n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\right| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \pm \ldots < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

und $f_n = [n!/e]$. □

Beispiel 2.3.

(i) Die fixpunktfreien Permutationen von S_4 sind $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$.

(ii) Beim vorweihnachtlichen Wichteln schenken sich n Personen gegenseitig etwas, indem sie vorher Lose ziehen, auf denen steht, an wen das Geschenk zu richten ist. Dies beschreibt eine Permutation auf $\{1, \ldots, n\}$, die genau dann fixpunktfrei ist, wenn keine Person ihr eigenes Los zieht. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person ihr eigenes Los zieht, beträgt daher $1 - \frac{[n!/e]}{n!} \approx 1 - \frac{1}{e} \approx 63\%$.

(iii) Die im zweiten Weltkrieg benutzte Verschlüsselungsmaschine *Enigma* permutiert die 26 Buchstaben des lateinischen Alphabets. Um die Verschlüsselung vermeintlich sicherer zu machen, wurden nur fixpunktfreie Permutationen eingesetzt. Dies war jedoch eine entscheidende Schwachstelle, die es den Alliierten ermöglichte, die Enigma zu entschlüsseln.[3]

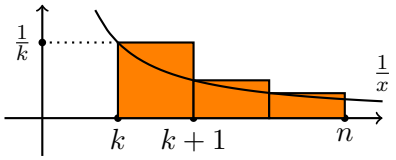
Beispiel 2.4 (Sekretärinnenproblem)**.** Es werden n Bewerber auf eine offene Stelle nacheinander zum Vorstellungsgespräch geladen. Direkt nach jedem Gespräch soll dem Bewerber mitgeteilt werden, ob er genommen oder abgelehnt wurde. Im ersten Fall ist das Verfahren beendet und es werden keine weiteren Bewerber berücksichtigt. Mit welcher Strategie findet man einen möglichst guten Bewerber?

Man lehne zunächst die ersten $k < n$ Bewerber konsequent ab und wähle unter den verbleibenden $n - k$ den ersten, der besser als die ersten k Bewerber ist (möglicherweise muss man alle Bewerber ablehnen, womit die Strategie gescheitert ist). Die Reihenfolge der Bewerber beschreibt eine Permutation $\sigma \in S_n$, wobei $\sigma(1)$ die Position des besten Bewerbers ist und $\sigma(2)$ die Position des zweitbesten usw. Sei

$$m := \min\{i \leq n : \sigma(i) < \sigma(1)\}.$$

Die obige Strategie findet genau dann den besten Bewerber, wenn $\sigma(1) > k$ und $\sigma(m) \leq k$ gilt. Die Wahrscheinlichkeit, dass $\sigma(1)$ an Stelle l steht, beträgt $1/n$. Die Wahrscheinlichkeit für $\sigma(m) \leq k$ ist dann $\frac{k}{l-1}$. Die Erfolgswahrscheinlichkeit der Strategie ist daher

$$\sum_{l=k+1}^{n} \frac{1}{n} \frac{k}{l-1} = \frac{k}{n} \sum_{l=k}^{n-1} \frac{1}{l} \geq \frac{k}{n} \int_k^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{k}{n}(\log n - \log k).$$

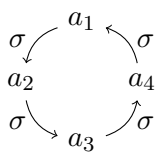


Die Funktion $f(x) = \frac{x}{n}(\log n - \log x)$ hat Ableitung $f'(x) = \frac{1}{n}(\log n - \log x - 1)$ und nimmt daher ihr Maximum bei $x = n/e$ an. Für $k = [n/e]$ ist die Erfolgswahrscheinlichkeit also ca. $f(n/e) = 1/e \approx 37\%$ (für „große“ n). Man kann zeigen, dass dies die beste Strategie ist. Für $n = 20$ ergibt sich $k = 7$ und ca. 38%.

[3] https://de.wikipedia.org/wiki/Enigma_(Maschine)#Kryptographische_Schw%C3%A4chen

Definition 2.5. Für eine Menge A nennt man $\sigma \in \mathrm{Sym}(A)$ einen (k-)*Zyklus* (oder Zyklus der *Länge* k), falls paarweise verschiedene $a_1, \ldots, a_k \in A$ existieren, sodass

$$\sigma(x) = \begin{cases} a_{i+1} & \text{falls } x = a_i \text{ mit } i < k, \\ a_1 & \text{falls } x = a_k, \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$



Man schreibt dann $\sigma = (a_1, \ldots, a_k)$. Diese Schreibweise ist eindeutig bis auf „Rotation“, d. h.

$$\sigma = (a_2, \ldots, a_k, a_1) = \ldots = (a_k, a_1, \ldots, a_{k-1}).$$

Der einzige 1-Zyklus ist id_A. Um Formulierungen einheitlich zu gestalten, werden wir dennoch die 1-Zyklen $(1), (2), \ldots, (n)$ formal unterscheiden. Außerdem fassen wir id_A als Produkt aller 1-Zyklen auf. Zyklen der Länge 2 heißen *Transpositionen*. Zyklen $\sigma = (a_1, \ldots, a_k)$ und $\tau = (b_1, \ldots, b_l)$ heißen *disjunkt*, falls

$$\{a_1, \ldots, a_k\} \cap \{b_1, \ldots, b_l\} = \varnothing.$$

Bemerkung 2.6.

(i) Es gilt $(a_1, \ldots, a_k)^{-1} = (a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1)$.

(ii) Disjunkte Zyklen $\sigma, \tau \in \mathrm{Sym}(A)$ sind vertauschbar, d. h. $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$. Wir werden im Folgenden das Verknüpfungssymbol $\circ$ oft weglassen.

Lemma 2.7. *Jede Permutation σ einer endlichen Menge A ist eine Komposition von paarweise disjunkten Zyklen $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_k$ der Länge > 1 und diese sind bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.*

Beweis. Existenz: Sei $A_\sigma := \{a \in A : \sigma(a) \neq a\}$. Wir argumentieren durch Induktion nach $|A_\sigma|$. Im Fall $A_\sigma = \varnothing$ ist $\sigma = \mathrm{id}_A$ das leere Produkt. Sei also $a \in A_\sigma \neq \varnothing$. Wegen $|A_\sigma| \leq |A| < \infty$ können die Elemente $a, \sigma(a), \sigma^2(a), \ldots \in A_\sigma$ nicht alle verschieden sein. Sei also $0 \leq k < l$ mit $\sigma^k(a) = \sigma^l(a)$. Dann ist $\sigma^{l-k}(a) = a$. Sei $s \in \mathbb{N}$ minimal mit $\sigma^s(a) = a$. Dann sind $a, \sigma(a), \ldots, \sigma^{s-1}(a)$ paarweise verschieden und $\sigma_1 = (a, \sigma(a), \ldots, \sigma^{s-1}(a))$ ist ein s-Zyklus mit $s > 1$. Für $\tau := \sigma_1^{-1}\sigma \in \mathrm{Sym}(A_\sigma)$ und $i = 0, \ldots, s-1$ gilt dann

$$\tau(\sigma^i(a)) = \sigma_1^{-1}\sigma^{i+1}(a) = \sigma^i(a).$$

Dies zeigt $A_\tau = A_\sigma \setminus A_{\sigma_1}$. Nach Induktion existieren paarweise disjunkte Zyklen $\sigma_2, \ldots, \sigma_k \in \mathrm{Sym}(A_\tau)$ mit Länge > 1 und $\tau = \sigma_2 \ldots \sigma_k$. Offenbar sind auch $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ paarweise disjunkt und $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_k$.

Eindeutigkeit: Seien $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_k = \tau_1 \ldots \tau_l$ zwei Darstellungen mit paarweise disjunkten Zyklen $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ sowie $\tau_1, \ldots, \tau_l$. Induktion nach k: Für $k = 0$ ist $\sigma = \mathrm{id}_A$ und es folgt $l = 0$. Sei jetzt $k \geq 1$ und $a \in A$ mit $\sigma_1(a) \neq a$. Dann existiert genau ein τ_i mit $\tau_i(a) = \sigma_1(a)$. Weiter ist $\sigma_1^2(a) = \tau_i^2(a)$ usw. Dies zeigt $\sigma_1 = \tau_i$. Indem man beide Seiten mit σ_1^{-1} multipliziert, erhält man $\sigma_2 \ldots \sigma_k = \tau_1 \ldots \tau_{i-1}\tau_{i+1} \ldots \tau_l$. Die Behauptung folgt nun leicht mit Induktion. □

Bemerkung 2.8.

(i) Man kann die Schreibweise in disjunkte Zyklen

$$\sigma = (a_1, \ldots, a_s)(b_1, \ldots, b_t) \ldots$$

vollständig eindeutig machen, indem man $a_1 = \min\{a_1, \ldots, a_s\} < b_1 = \min\{b_1, \ldots, b_t\} < \ldots$ fordert. Dies wird im Computeralgebrasystem GAP realisiert.

(ii) Im Folgenden sagen wir, dass $\sigma \in S_n$ einen Zyklus τ *enthält*, falls τ in der disjunkten Zyklendarstellung vorkommt. Dabei wollen wir die Fixpunkte als 1-Zyklen mitzählen.

(iii) Bekanntlich (Lineare Algebra?) lässt sich jede Permutation auch als Produkt von Transpositionen schreiben, allerdings sind diese in der Regel nicht disjunkt.

Beispiel 2.9.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = (1,4,2)(3,6)$.

(ii) $(2,5,3,1)(3,1,6) = (1,6)(2,5,3) = (1,6)(2,5)(3,5)$ (Abbildungen werden von rechts nach links ausgewertet).

(iii) $S_3 = \{(), (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}$.

Satz 2.10. *Für $1 \leq k \leq n$ gilt:*

(i) Die Anzahl der k-Zyklen von S_n ist $\frac{n!}{k(n-k)!}$.

(ii) Ist $z_k(\sigma)$ die Anzahl der k-Zyklen von σ, so gilt

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} z_k(\sigma) = \frac{1}{k}.$$

(iii) Die durchschnittliche Anzahl von Zyklen einer Permutation $\sigma \in S_n$ ist die n-te harmonische Zahl

$$H_n := \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s}.$$

Beweis.

(i) Jeder k-Zyklus permutiert eine k-elementige Menge $\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Für die Wahl dieser Menge gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten (Satz 1.12). Jeder k-Zyklus auf dieser Menge lässt sich eindeutig in der Form $(a_1, b_2, \ldots, b_k)$ mit $\{b_2, \ldots, b_k\} = \{a_2, \ldots, a_k\}$ schreiben. Dies liefert $(k-1)!$ Zyklen, denn die Ziffern $b_2, \ldots, b_k$ kann man beliebig permutieren. Insgesamt gibt es

$$\binom{n}{k}(k-1)! = \frac{n!(k-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k(n-k)!}$$

Zyklen der Länge k.

(ii) Sei $Z_k \subseteq S_n$ die Menge der k-Zyklen. Jeder k-Zyklus ist in $(n-k)!$ vielen Permutationen enthalten, denn man kann die $n-k$ Ziffern außerhalb des Zyklus beliebig permutieren. Es folgt

$$\sum_{\sigma \in S_n} z_k(\sigma) = |\{(\sigma, c) \in S_n \times Z_k : \sigma \text{ enthält } c\}| = \sum_{c \in Z_k} (n-k)! = |Z_k|(n-k)! \overset{\text{(i)}}{=} \frac{n!(n-k)!}{k(n-k)!} = \frac{n!}{k}.$$

(iii) Die durchschnittliche Zyklenanzahl ist

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{k=1}^{n} z_k(\sigma) = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n} z_k(\sigma) \overset{\text{(ii)}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

□

Bemerkung 2.11. Bekanntlich (Analysis) ist

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} (H_n - \log n) = 0{,}577\ldots$$

die *Euler-Mascheroni-Konstante*. Für große n ist daher $H_n \approx \log(n) + \gamma$. Man weiß bislang nicht, ob γ rational ist.

Beispiel 2.12.

(i) Die durchschnittliche Zyklenanzahl von $\sigma \in S_8$ ist $H_8 = \frac{761}{280} \approx 2{,}71$ (Vergleich: $\log(8) + \gamma \approx 2{,}66$).

(ii) (Problem der 100 Gefangenen) Die Namen von 100 Gefangenen werden in 100 verschlossenen nummerierten Umschlägen aufbewahrt. Die Gefangenen werden nacheinander gebeten 50 Umschläge ihrer Wahl zu öffnen mit dem Ziel, ihren eigenen Namen zu finden. Gelingt es jedem Gefangenen, seinen eigenen Namen zu finden, so erhalten alle die Freiheit. Sie dürfen sich vorher eine Strategie überlegen, aber während des Experiments nicht kommunizieren. Was ist eine gute Strategie? Ohne Strategie (d. h. jeder öffnet 50 zufällige Umschläge) beträgt die Erfolgswahrscheinlichkeit nur

$$2^{-100} = (2^{10})^{-10} = 1024^{-10} < 1000^{-10} = 10^{-30}.$$

Die Gefangenen werden durchnummeriert, sodass die Verteilung der Namen in die Umschläge eine Permutation $\sigma \in S_{100}$ beschreibt. Ist der Gefangene mit Nummer a an der Reihe, so öffnet er zunächst Umschlag a und findet darin den Namen vom Gefangenen $\sigma(a)$. Danach öffnet er Umschlag $\sigma(a)$ und findet darin den Namen von $\sigma^2(a)$ usw. Auf diese Weise findet er seinen eigenen Namen genau dann, wenn der Zyklus von σ, der a enthält, Länge ≤ 50 hat. Das Verfahren ist also genau dann erfolgreich, wenn σ keinen Zyklus der Länge > 50 enthält. Offenbar kann σ höchstens einen solchen Zyklus enthalten. Die Anzahl der Permutationen mit Zyklus der Länge $k > 50$ ist daher

$$\sum_{\sigma\in S_{100}} \sum_{k=51}^{100} z_k(\sigma) = \sum_{k=51}^{100} \sum_{\sigma\in S_{100}} z_k(\sigma).$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Strategie scheitert, ist folglich

$$\frac{1}{100!} \sum_{k=51}^{100} \sum_{\sigma\in S_{100}} z_k(\sigma) \overset{2.10}{=} \sum_{k=51}^{100} \frac{1}{k} \leq \int_{50}^{100} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log(2\cdot 50) - \log(50) = \log(2) < 0{,}7$$

(vgl. Beispiel 2.4). Die Erfolgswahrscheinlichkeit ist daher größer als 30% (unabhängig von der Anzahl der Gefangenen).[4]

Definition 2.13. Die Anzahl der Permutationen von S_n mit genau k Zyklen nennt man *Stirling-Zahl erster Art* und schreibt dafür $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$. Fasst man die Identität auf der leeren Menge als Produkt von 0 Zyklen auf, so erhält man $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$.

Bemerkung 2.14. Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$n! = |S_n| = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Dies wird in Satz 2.17 verallgemeinert.

[4]Youtube-Video von Veritasium: `https://www.youtube.com/watch?v=iSNsgj1OCLA`

Beispiel 2.15.

(i) Nach Definition ist $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$, falls $k = 0 < n$ oder $k > n$. Da id die einzige Permutation in S_n mit n Zyklen ist, gilt $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$. Im Gegensatz zum Binomialkoeffizienten ist also im Allgemeinen $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}$.

(ii) Eine Permutation mit nur einem Zyklus ist ein n-Zyklus. Aus Satz 2.10 folgt $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$.

(iii) Offenbar ist $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}$ die Anzahl der Transpositionen und damit auch die Anzahl der 2-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$. Dies zeigt $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}$.

(iv) Nach Bemerkung 2.14 ist $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 4! - \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 24 - 6 - 6 - 1 = 11$. Die entsprechenden Permutationen sind $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(1,2,4)$, $(1,4,2)$, $(1,3,4)$, $(1,4,3)$, $(2,3,4)$, $(2,4,3)$, $(1,2)(3,4)$, $(1,3)(2,4)$, $(1,4)(2,3)$.

Lemma 2.16. *Für $k, n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\boxed{\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}.}$$

Beweis. Sei $\sigma \in S_n$ mit genau $k-1$ Zyklen. Durch Anfügen des 1-Zyklus $(n+1)$ erhält man eine Permutation in S_{n+1} mit genau k Zyklen. Sei nun $\sigma \in S_n$ mit genau k Zyklen. Dann lässt sich die Ziffer $n+1$ an n Stellen in der Zyklendarstellung von σ anfügen (Beispiel: 4 einfügen in $(1,2)(3)$ ergibt $(4,1,2)(3)$, $(1,4,2)(3)$, $(1,2)(4,3)$). Auf diese Weise erhält man n verschiedene Permutationen in S_{n+1} mit genau k Zyklen. Offenbar entsteht jede Permutation von S_{n+1} mit genau k Zyklen auf genau eine der beiden Weisen. Dies zeigt die Behauptung. □

Satz 2.17. *Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $X(X+1)\dots(X+n-1) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^k \in \mathbb{C}[X]$.*

Beweis. Induktion nach n: Für $n = 0$ steht links das leere Produkt und rechts $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$. Sei nun $n \geq 1$ und die Behauptung für $n-1$ bereits bewiesen. Wir können die Summation auf $-\infty \dots \infty$ ausdehnen, um Indexverschiebungen zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} X(X+1)\dots(X+n-1) &= (X+n-1) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} X^k \\ &= \sum \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} X^{k+1} + \sum (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} X^k \\ &= \sum \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} X^k + \sum (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} X^k \overset{2.16}{=} \sum \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^k. \end{aligned}$$ □

Beispiel 2.18. Der Koeffizient von X^{n-1} in $X(X+1)\dots(X+n-1)$ ist

$$\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n-1} k = \binom{n}{2}$$

in Übereinstimmung mit Beispiel 2.15.

Definition 2.19.

- Eine *Partition* einer (endlichen) Menge A ist eine Menge von paarweise disjunkten, nichtleeren Teilmengen $\{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq 2^A$ mit $A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$. Die Menge aller Partitionen von A bezeichnen wir mit $P(A)$. Man nennt $b(n) := |P(\{1, \ldots, n\})|$ die *n-te Bellzahl*.
- Eine *Partition* von $n \in \mathbb{N}_0$ ist eine Multimenge $\lambda := \{k_1, \ldots, k_s\} \subseteq \mathbb{N}$ mit $n = k_1 + \ldots + k_s$. Man nennt $k_1, \ldots, k_s$ die *Teile* von λ. Die Menge aller Partitionen von n sei $P(n)$ und $p(n) := |P(n)|$.

Beispiel 2.20. Die Partitionen von $\{1, 2, 3\}$ sind

$$\{1, 2, 3\} = \{1\} \cup \{2, 3\} = \{2\} \cup \{1, 3\} = \{3\} \cup \{1, 2\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}.$$

Die Partitionen von 3 sind $3 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1$. Also ist $b(3) = 5$ und $p(3) = 3$.

Bemerkung 2.21.

(i) Beachte: $b(0) = 1 = p(0)$, denn die leere (Multi)menge ist eine Partition von $\varnothing$ (bzw. 0).

(ii) Ist $\{A_1, \ldots, A_k\}$ eine Partition einer endlichen Menge A, so ist $\{|A_1|, \ldots, |A_k|\}$ eine Partition von $|A|$. Umgekehrt kann man aus jeder Partition von $n \in \mathbb{N}$ eine Partition von $\{1, \ldots, n\}$ konstruieren. Daher gilt $b(n) \geq p(n)$ und $b(n) > p(n)$, falls $n \geq 3$.

(iii) Wir werden Partitionen von Zahlen oft in der Form $(k_1, \ldots, k_s)$ mit $k_1 \geq \ldots \geq k_s$ oder in der Form $(1^{m_1}, \ldots, n^{m_n}) := (\underbrace{1, \ldots, 1}_{m_1}, \ldots, \underbrace{n, \ldots, n}_{m_n})$ mit $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}_0$ schreiben.

(iv) Die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation auf A bilden eine Partition von A. Die Gleichheitsrelation $(=)$ liefert beispielsweise die Partition $\{\{a\} : a \in A\}$.

Satz 2.22. *Sei $(1^{a_1}, \ldots, n^{a_n})$ eine Partition von n. Dann besitzt jede n-elementige Menge genau*

$$\boxed{\frac{n!}{(1!)^{a_1} \ldots (n!)^{a_n} a_1! \ldots a_n!}}$$

Partitionen der Form $\{A_1, \ldots, A_k\}$ mit $\{|A_1|, \ldots, |A_k|\} = (1^{a_1}, \ldots, n^{a_n})$.

Beweis. O. B. d. A. sei $A = \{1, \ldots, n\}$. Man kann jede Anordnung $b_1, \ldots, b_n$ der Zahlen $1, \ldots, n$ in eine Partition des gesuchten Typs verwandeln, indem man entsprechende Klammern { und } verteilt. Wir können dabei zunächst die a_1 einelementigen Teilmengen klammern, danach die a_2 zweielementigen Teilmengen usw.:

$$\{b_1\}, \{b_2\}, \ldots, \{b_i, b_{i+1}\}, \ldots.$$

Von den $n!$ möglichen Anordnungen $b_1, \ldots, b_n$ führen allerdings einige zur gleichen Partition. Man kann einerseits die Elemente jeder l-elementigen Teilmenge beliebig permutieren, ohne die Partition zu verändern. Andererseits kann man die a_l l-elementigen Teilmengen untereinander permutieren, ohne die Partition zu verändern. Je $\prod_{l=1}^{n} (l!)^{a_l} a_l!$ Anordnungen führen daher zur gleichen Partition. Dies zeigt die Behauptung. □

Beispiel 2.23. Die Anzahl der Partitionen von $\{1, 2, 3, 4\}$ vom Typ $(2, 2) = (1^0, 2^2)$ ist $\frac{4!}{(2!)^2 2!} = \frac{24}{8} = 3$. Diese sind $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ und $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$.

Definition 2.24. Ist $\sigma \in S_n$ ein disjunktes Produkt von $a_i \geq 0$ Zyklen der Länge i, so nennt man $(1^{a_1}, \ldots, n^{a_n})$ den *Zyklentyp* von σ. Nach Lemma 2.7 ist dies eine wohldefinierte Partition von n. Die Anzahl der Fixpunkte von σ ist a_1.

Satz 2.25. *Die Anzahl der Permutationen von S_n mit Zyklentyp $(1^{a_1}, \ldots, n^{a_n})$ ist*

$$\boxed{\frac{n!}{1^{a_1} \ldots n^{a_n} a_1! \ldots a_n!}.}$$

Beweis. Fasst man Zyklen als Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ auf, so entspricht jede Permutation einer Partition von $\{1, \ldots, n\}$. Nach Satz 2.22 entsprechen die Permutationen mit Zyklentyp $(1^{a_1}, \ldots, n^{a_n})$ dabei genau

$$\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} (k!)^{a_k} a_k!}$$

Partitionen. Es bleibt zu zählen, wie viele Permutationen die gleiche Partition liefern. Da sich jeder k-Zyklus eindeutig in der Form $(b_1, \ldots, b_k)$ mit $b_1 := \min\{b_1, \ldots, b_k\}$ schreiben lässt, liefern genau $(k-1)!$ Zyklen die gleiche Menge $\{b_1, \ldots, b_k\}$ (man kann die $b_2, \ldots, b_k$ beliebig permutieren). Die Anzahl der gesuchten Permutationen ist daher

$$\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} (k!)^{a_k} a_k!} \prod_{k=1}^{n} \big((k-1)!\big)^{a_k} = \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} k^{a_k} a_k!}. \qquad \square$$

Beispiel 2.26. Die k-Zyklen von S_n haben Zyklentyp $(1^{n-k}, k^1)$. Deren Anzahl ist

$$\frac{n!}{1^{n-k} k^1 (n-k)! 1!} = \frac{n!}{k(n-k)!}$$

in Übereinstimmung mit Satz 2.10.

Definition 2.27. Die Anzahl der k-elementigen Partitionen einer n-elementigen Menge nennt man *Stirling-Zahl zweiter Art* und schreibt dafür $\left\{ {n \atop k} \right\}$.

Bemerkung 2.28.

(i) Da jede Permutation mit k Zyklen eine Partition mit k Teilmengen definiert, ist $\left\{ {n \atop k} \right\} \leq \left[{n \atop k} \right]$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$.

(ii) Es gilt

$$b(n) = \big|P\big(\{1, \ldots, n\}\big)\big| = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

Beispiel 2.29.

(i) Wie üblich ist $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$ und $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$ für $k = 0 < n$ oder $k > n$. Außerdem ist $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1 = \left\{ {n \atop n} \right\}$ und $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \left[{n \atop n-1} \right] = \binom{n}{2}$.

(ii) Jede 2-elementige Partition von A hat die Form $\{B, A \setminus B\}$ mit $B \in 2^A \setminus \{\varnothing, A\}$. Dies zeigt $\left\{ {n \atop 2} \right\} = \frac{1}{2}\big(|2^{\{1,\ldots,n\}}| - 2\big) \overset{1.3}{=} 2^{n-1} - 1$.

(iii) Nach Bemerkung 2.28 ist $b(4) = \left\{ {4 \atop 1} \right\} + \left\{ {4 \atop 2} \right\} + \left\{ {4 \atop 3} \right\} + \left\{ {4 \atop 4} \right\} = 1 + 2^3 - 1 + \binom{4}{2} + 1 = 15$.

Lemma 2.30. *Für $k, n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\boxed{\left\{ {n \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n+1 \atop k} \right\}.}$$

Beweis. Sei $A = \{1, \dots, n\}$ und $\{A_1, \dots, A_{k-1}\}$ eine Partition von A. Dann ist $\{A_1, \dots, A_{k-1}, \{n+1\}\}$ eine k-elementige Partition von $\{1, \dots, n+1\}$. Sei nun $\{A_1, \dots, A_k\}$ eine Partition von A. Dann kann man die Zahl $n+1$ zu jeder der Mengen $A_1, \dots, A_k$ hinzufügen und erhält auf diese Weise eine k-elementige Partition von $\{1, \dots, n+1\}$. Offenbar entsteht jede k-elementige Partition von $\{1, \dots, n+1\}$ auf genau eine der beiden Weisen. Dies zeigt die Behauptung. □

Satz 2.31. *Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $X^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} X(X-1)\dots(X-k+1)$.*

Beweis. Induktion nach n: Für $n = 0$ gilt $X^0 = 1 = \left\{ {0 \atop 0} \right\}$. Sei nun $n \geq 1$ und die Behauptung für $n-1$ bereits bewiesen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
X^n = XX^{n-1} &= (X-k+k) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} X(X-1)\dots(X-k+1) \\
&= \sum \left\{ {n-1 \atop k} \right\} X(X-1)\dots(X-k) + \sum k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} X(X-1)\dots(X-k+1) \\
&= \sum \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} X(X-1)\dots(X-k+1) + \sum k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} X(X-1)\dots(X-k+1) \\
&\overset{2.30}{=} \sum \left\{ {n \atop k} \right\} X(X-1)\dots(X-k+1).
\end{aligned}$$

□

Beispiel 2.32. Setzt man $X = 2$ in Satz 2.31, so folgt $2^n = \left\{ {n \atop 0} \right\} + \left\{ {n \atop 1} \right\} 2 + \left\{ {n \atop 2} \right\} 2 = 2(1 + \left\{ {n \atop 2} \right\})$ und $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$ für $n \geq 1$ in Übereinstimmung mit Beispiel 2.29.

Folgerung 2.33. *Für $0 \leq m < n$ gilt*

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] = 0.}$$

Beweis. Ersetzt man X durch $-X$ in Satz 2.17, so ergibt sich $(-1)^n X(X-1)\dots(X-n+1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[{n \atop k} \right] X^k$. Mit Satz 2.31 folgt

$$\begin{aligned}
X^n &= \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} X(X-1)\dots(X-k+1) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k+m} \left[{k \atop m} \right] X^m \\
&= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \sum_{k=m}^{n} (-1)^k \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] X^m.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt mittels Koeffizientenvergleich. □

Bemerkung 2.34. Man vergleiche das folgende Ergebnis mit Satz 1.8.

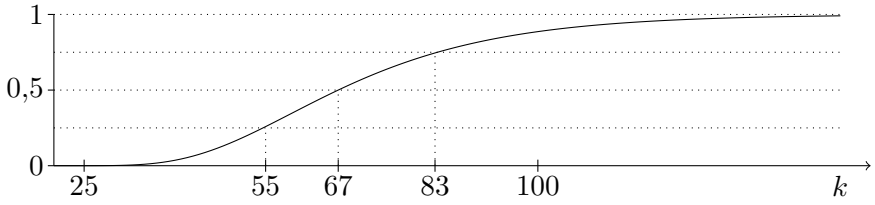
Satz 2.35. *Für endliche Mengen A und B existieren genau $\left\{ {|A| \atop |B|} \right\} |B|!$ surjektive Abbildungen $A \to B$.*

Beweis. O. B. d. A. sei $B = \{1, \dots, k\}$. Jede surjektive Abbildung $f\colon A \to B$ liefert eine k-elementige Partition $\{f^{-1}(1), \dots, f^{-1}(k)\}$ von A. Sei $g\colon A \to B$ mit $\{f^{-1}(1), \dots, f^{-1}(k)\} = \{g^{-1}(1), \dots, g^{-1}(k)\}$. Dann existiert eine Permutation $\sigma \in S_k$ mit $f^{-1}(i) = g^{-1}(\sigma(i))$ für $i = 1, \dots, k$. Dabei ist g durch f und σ eindeutig bestimmt. Ist umgekehrt $\sigma \in S_k$ gegeben, so liefert $g := \sigma \circ f$ die gleiche Partition wie f. Es gibt daher genau $|S_k| = k!$ Abbildungen, die die gleiche k-elementige Partition von A liefern. Die Anzahl der surjektiven Abbildungen ist daher $\left\{ {|A| \atop k} \right\} k!$. □

Beispiel 2.36 (Sammelbilderproblem)**.** Bei jedem Einkauf im Supermarkt bekommen Sie eine von n verschiedenen Sammelkarten (zufällig und gleichverteilt). Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie nach k Einkäufen alle Sammelkarten besitzen? Die k Einkäufe liefern eine Abbildung $\{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, n\}$. Es gibt n^k solche Abbildungen, von denen $\left\{ {k \atop n} \right\} n!$ surjektiv sind. Die Wahrscheinlichkeit ist daher

$$\frac{n!}{n^k} \left\{ {k \atop n} \right\}.$$

Für $n = 20$ erhält man:



Satz 2.37. *Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist*

$$b(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b(k).$$

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ eine Partition von $\{1, \dots, n+1\}$ und $n+1 \in A \in \mathcal{A}$ mit $k := |A| - 1 \geq 0$. Dann gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten für A und $\mathcal{A} \setminus \{A\}$ ist eine Partition von $\{1, \dots, n\} \setminus A$. Für $\mathcal{A} \setminus \{A\}$ gibt es also $b(n-k)$ Möglichkeiten. Es folgt

$$b(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b(n-k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b(k).$$ □

Beispiel 2.38.

$$b(5) = b(0) + 4b(1) + 6b(2) + 4b(3) + b(4) \overset{2.29}{=} 1 + 4 + 12 + 20 + 15 = 52.$$

Lemma 2.39. *Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} l^n.$$

Beweis. Sei $A := \{1, \dots, n\}$, $B := \{1, \dots, k\}$ und M die Menge der surjektiven Abbildungen von A nach B. Nach Satz 2.35 genügt es, $|M| = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} l^n$ zu zeigen. Für $i = 1, \dots, k$ sei

$$M_i := \big\{ f\colon A \to B : i \notin f(A) \big\}.$$

Für $1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq k$ ist dann $M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_l}$ die Menge aller Abbildungen von A nach $B \setminus \{i_1, \ldots, i_l\}$. Insbesondere ist $|M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_l}| = (k-l)^n$ nach Bemerkung 1.6. Das Inklusions-Exklusions-Prinzip zeigt

$$|M| = |B^A \setminus (M_1 \cup \ldots \cup M_k)| = k^n + \sum_{l=1}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} (k-l)^n = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} (k-l)^n.$$

Die Behauptung folgt aus $\binom{k}{l} = \binom{k}{k-l}$. □

Bemerkung 2.40. Aus Lemma 2.39 folgt

$$n! = n! \left\{ {n \atop n} \right\} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n.$$

Asymptotisch gilt die *Stirling-Formel*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \Big(\frac{n}{e}\Big)^n,$$

d. h.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} = 1$$

(ohne Beweis). Beispiel: $100! \approx 9{,}333 \cdot 10^{157}$ und $\sqrt{200\pi}(100/e)^{100} \approx 9{,}325 \cdot 10^{157}$.

Satz 2.41 (Dobiński-Formel)**.** *Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist*

$$\boxed{b(n) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.}$$

Beweis. Wegen $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$ für $k > n$ gilt

$$\begin{aligned} b(n) &\overset{2.28}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} \overset{2.39}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} l^n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \frac{l^n}{l!(k-l)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{(k-l)^n}{(k-l)!} \overset{(*)}{=} \Big(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \Big) \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \Big) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}, \end{aligned}$$

wobei in $(*)$ die Cauchy-Produktformel für absolut konvergente Reihen benutzt wird (Analysis). □

Bemerkung 2.42. Man kennt keine einfache Formel für $p(n)$. Hardy und Ramanujan haben aber

$$p(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4n\sqrt{3}}$$

bewiesen (vgl. Folgerung 5.17). Beispiel: $p(10^4) \approx 3{,}617 \cdot 10^{106}$ und $\frac{e^{\pi\sqrt{20000/3}}}{40000\sqrt{3}} \approx 3{,}633 \cdot 10^{106}$.

3 Rekursionen und Differenzen

Beispiel 3.1. Aus der Algebra kennen Sie den *euklidischen* Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers von $a, b \in \mathbb{N}$:

$$x_0 := \max\{a,b\}, \qquad x_1 := \min\{a,b\}, \qquad x_{n+1} := x_{n-1} \pmod{x_n} \qquad (n \geq 1).$$

Nach endlich vielen Iterationen ist $x_n = 0$ und $x_{n-1} = \mathrm{ggT}(a,b)$. Für $k \geq 1$ gilt $x_{k+1} \leq x_{k-1} - x_k \leq x_{k-1}$. Der Algorithmus braucht also besonders lang, wenn $x_{n-1} = 1$ und $x_{k+1} = x_{k-1} - x_k$ für alle $k \geq 1$ gilt. Dies sind in umgekehrter Reihenfolge die Glieder der *Fibonacci-Folge*:

$$F_0 := 0, \quad F_1 := 1, \quad F_{n+1} := F_{n-1} + F_n$$

für $n \in \mathbb{N}$. Fazit: Für $a, b \leq F_n$ braucht der euklidische Algorithmus zur Berechnung von $\mathrm{ggT}(a,b)$ höchstens n Iterationen (Satz von Lamé). Es ist daher von Interesse, F_n zu berechnen. Die ersten Werte sind

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Wir erkennen, dass F_n schnell wächst. Wir wollen eine explizite Formel für F_n bestimmen (d. h. ohne zuvor F_k für $k < n$ berechnen zu müssen).

Definition 3.2 (Lineare Rekursionsgleichung k-ter Ordnung)**.** Seien $k \in \mathbb{N}$, $c_0, \ldots, c_k, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ mit $a_k \neq 0$ gegeben. Gesucht ist eine explizite Formel für die Zahlen $x_0, x_1, \ldots \in \mathbb{C}$, die folgendem Gleichungssystem genügen:

$$x_n = \begin{cases} c_n & \text{falls } n < k, \\ a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_k x_{n-k} + c_k & \text{falls } n \geq k. \end{cases}$$

Im Fall $c_k = 0$ nennt man die Rekursionsgleichung *homogen* und anderenfalls *inhomogen*.

Satz 3.3. *Die Rekursionsgleichung erster Ordnung $x_0 = c_0$, $x_n = a x_{n-1} + c_1$ hat folgende Lösung*

$$x_n = \begin{cases} c_0 a^n & \textit{falls } c_1 = 0, \\ c_0 a^n + \frac{a^n - 1}{a-1} c_1 & \textit{falls } a \neq 1, \\ c_0 + n c_1 & \textit{falls } a = 1. \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Im Fall $c_1 = 0$ ist $x_n = a x_{n-1} = a^2 x_{n-2} = \ldots = a^n x_0 = c_0 a^n$. Im Fall $a = 1$ ist

$$x_n = x_{n-1} + c_1 = x_{n-2} + c_1 + c_1 = \ldots = x_0 + n c_1 = c_0 + n c_1.$$

Im Fall $a \neq 1$ argumentieren wir durch Induktion nach n. Die Behauptung gilt für $n = 0$. Sei nun die Behauptung für $n - 1$ bereits bewiesen. Dann ist

$$x_n = a x_{n-1} + c_1 = c_0 a^n + a \frac{a^{n-1} - 1}{a-1} c_1 + c_1 = c_0 a^n + \frac{a^n - a + a - 1}{a-1} c_1 = c_0 a^n + \frac{a^n - 1}{a-1} c_1. \qquad \square$$

Bemerkung 3.4.

(i) Wir zeigen, dass man eine inhomogene Rekursionsgleichung wie in Definition 3.2 stets in eine homogene umwandeln kann. Analog zu Satz 3.3 unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: $\alpha := 1 - a_1 - \ldots - a_k \neq 0$.
Hier erfüllen $y_n := x_n - \frac{c_k}{\alpha}$ das homogene System

$$y_n = \begin{cases} c_n - \frac{c_k}{\alpha} & \text{falls } n < k \\ a_1 y_{n-1} + \ldots + a_k y_{n-k} & \text{falls } n \geq k. \end{cases}$$

Fall 2: $\alpha = 0$.
Hier gehen wir zu der folgenden homogenen Rekursionsgleichung der Ordnung $k+1$ über:

$$\begin{aligned} x_i &= c_i \qquad (i = 0, \ldots, k-1), \\ x_k &= a_1 c_{k-1} + a_2 c_{k-2} + \ldots + a_k c_0 + c_k, \\ x_n &= a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_k x_{n-k} + c_k \qquad (n > k) \\ &= a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_k x_{n-k} + (x_{n-1} - a_1 x_{n-2} - \ldots - a_k x_{n-k-1}) \\ &= (a_1 + 1) x_{n-1} + (a_2 - a_1) x_{n-2} + \ldots + (a_k - a_{k-1}) x_{n-k} - a_k x_{n-k-1} \end{aligned}$$

($\alpha = 0$ wird nicht gebraucht). Wir konzentrieren uns daher im Folgenden auf homogene Rekursionsgleichungen.

(ii) (Superposition) Gilt

$$\begin{aligned} x_n &= a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_k x_{n-k}, \\ y_n &= a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \ldots + a_k y_{n-k} \end{aligned}$$

für alle $n \geq k$, so erfüllt auch jede Linearkombination $z_n = \lambda x_n + \mu y_n$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ die Rekursionsbedingung.

Lemma 3.5. *Sei $\alpha \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom mit m-facher Nullstelle $x \in \mathbb{C}$. Dann ist m die kleinste natürliche Zahl mit $\alpha^{(m)}(x) \neq 0$, wobei $\alpha^{(m)}$ die m-te Ableitung bezeichnet.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\alpha = (X - x)^m \beta$ mit $\beta \in \mathbb{C}[X]$ und $\beta(x) \neq 0$. Die Leibniz-Regel für Ableitungen zeigt

$$\alpha^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left((X - x)^m\right)^{(i)} \beta^{(k-i)}.$$

Aus $\left((X - x)^m\right)^{(i)} = m(m-1)\ldots(m-i+1)(X-x)^{m-i}$ folgt $\alpha^{(k)}(x) = 0$ für $k = 1, \ldots, m-1$ und $\alpha^{(m)}(x) = m!\beta(x) \neq 0$. □

Satz 3.6. *Eine lineare homogene Rekursionsgleichung k-ter Ordnung sei wie in Definition 3.2 gegeben. Dann existieren paarweise verschiedene Zahlen $\zeta_1, \ldots, \zeta_s \in \mathbb{C}$ und Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$ mit*

$$\chi := X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_k = (X - \zeta_1)^{m_1} \ldots (X - \zeta_s)^{m_s}.$$

Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \zeta_1^0 & 0\cdot\zeta_1^0 & \cdots & 0^{m_1-1}\zeta_1^0 & \cdots & \zeta_s^0 & 0\cdot\zeta_s^0 & \cdots & 0^{m_s-1}\zeta_s^0 \\ \zeta_1^1 & 1\cdot\zeta_1^1 & \cdots & 1^{m_1-1}\zeta_1^1 & \cdots & \zeta_s^1 & 1\cdot\zeta_s^1 & \cdots & 1^{m_s-1}\zeta_s^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \zeta_1^{k-1} & (k-1)\zeta_1^{k-1} & \cdots & (k-1)^{m_1-1}\zeta_1^{k-1} & \cdots & \zeta_s^{k-1} & (k-1)\zeta_s^{k-1} & \cdots & (k-1)^{m_s-1}\zeta_s^{k-1} \end{pmatrix} y = c$$

mit $c = (c_0, \dots, c_{k-1})$ besitzt genau eine Lösung $(y_{1,1}, \dots, y_{1,m_1}, y_{2,1}, y_{2,2}, \dots, y_{s,m_s}) \in \mathbb{C}^k$. Die Lösung der Rekursionsgleichung ist

$$x_n = \sum_{i=1}^{s} \zeta_i^n \sum_{j=1}^{m_i} y_{i,j} n^{j-1}. \tag{3.1}$$

Beweis. Die Existenz der ζ_i folgt aus dem Fundamentalsatz der Algebra. Die Voraussetzung $a_k \neq 0$ impliziert $\zeta_i \neq 0$ für $i = 1, \dots, s$. Die Folgen $x_n = \zeta_i^n$ erfüllen die Rekursionsgleichung ohne Anfangsbedingungen, denn

$$\zeta_i^n - a_1\zeta_i^{n-1} - \ldots - a_k\zeta_i^{n-k} = \zeta_i^{n-k}\chi(\zeta_i) = 0$$

für $n \geq k$. Im Fall $m_i > 1$ ist ζ_i nach Lemma 3.5 eine Nullstelle der j-ten Ableitung $\chi^{(j)}$ für $j = 1, \dots, m_i - 1$. Da die Ableitung linear ist, erfüllen auch $x_n = (\zeta_i^n)^{(j)} = n(n-1)\dots(n-j+1)\zeta_i^{n-j}$ die Rekursionsgleichung. Nun lässt sich $x_n = n^j\zeta_i^n$ als Linearkombination der $(\zeta_i^n)^{(j)}$ schreiben (wobei man ζ_i als Skalar benutzt). Als Linearkombination dieser Folgen ist (3.1) nach Superposition eine Lösung der Rekursionsgleichung. Indem man $n = 0, \dots, k-1$ setzt, sieht man, dass nun auch die Anfangsbedingungen $x_n = c_n$ erfüllt sind (beachte: $0^0 = 1$).

Um die eindeutige Existenz der $y_{i,j}$ zu zeigen, müssen wir beweisen, dass die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{C}^{k\times k}$ des Gleichungssystems invertierbar ist. Wegen $\zeta_i \neq 0$ lässt sich $(\zeta_i^n)^{(j)}$ als Linearkombination der Spalten von A schreiben. Durch elementare Spaltenoperationen kann man A daher in eine äquivalente Matrix $\widetilde{A}$ mit Spalten $(\zeta_i^n)^{(j)}$ für $i = 1, \dots, s$ und $j = 0, \dots, m_i - 1$ umwandeln. Sei nun $z = (z_0, \dots, z_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$ mit $z\widetilde{A} = 0$. Dann sind $\zeta_1, \dots, \zeta_s$ Nullstellen des Polynoms $\gamma := z_0 + z_1X + \ldots + z_{k-1}X^{k-1}$. Im Fall $m_i > 1$ ist ζ_i eine Nullstelle der Ableitungen $\gamma^{(l)}$ für $l = 1, \dots, m_i - 1$. Nach Lemma 3.5 ist ζ_i eine mindestens m_i-fache Nullstelle von γ. Mit Vielfachheiten besitzt γ also mindestens k Nullstellen. Andererseits ist $\deg\gamma \leq k-1$. Dies zeigt $\gamma = 0$ und $z = 0$. Also sind $\widetilde{A}$ und A invertierbar. □

Beispiel 3.7.

(i) Die Fibonacci-Zahlen sind Lösungen einer homogenen Rekursionsgleichung zweiter Ordnung mit $\chi = X^2 - X - 1$. Mit der p-q-Formel ermittelt man die Nullstellen

$$\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad (\textit{goldener Schnitt}), \qquad \psi := \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Das Gleichungssystem für y lautet $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \psi \end{smallmatrix}\right) y = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Die eindeutige Lösung ist $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -1)$. Es folgt die BINET-Formel

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n.}$$

Da der zweite Summand kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, erhält man durch Runden die einfachere Formel

$$F_n = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n\right].$$

Zum Beispiel: $F_{100} = 354.224.848.179.261.915.075$. Für den euklidischen Algorithmus bedeutet die Abschätzung $\log F_n \approx \log(\varphi)n$, dass die Laufzeit nur logarithmisch in der Eingabe wächst. Es handelt sich also um einen besonders schnellen Algorithmus.

Bemerkung 3.8.

(i) Aus der Algebra ist bekannt, dass man Gleichungen vom Grad ≥ 5 im Allgemeinen nicht mehr exakt lösen kann. Die Nullstellen ζ_i lassen sich dann näherungsweise zum Beispiel mit dem Newton-Verfahren berechnen. Die Lösung der Rekursionsgleichung ist allerdings äußerst störanfällig bzgl. Rundungsfehler.

(ii) Man kann Rekursionsgleichungen auch mit linearer Algebra lösen: Die Gleichung $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_k x_{n-k}$ lässt sich durch Matrizenmultiplikation ausdrücken

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ \vdots \\ x_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_{n-k+1} \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt

$$\begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n-k+1} \end{pmatrix} = A^{n-k+1} \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ \vdots \\ x_0 \end{pmatrix} = A^{n-k+1} \begin{pmatrix} c_{k-1} \\ \vdots \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

Mit Induktion nach k und Laplace-Entwicklung zeigt man, dass $\chi_A = X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_k$ das charakteristische Polynom von A ist. Wie in Satz 3.6 gilt $X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_k = (X-\zeta_1)^{m_1} \ldots (X-\zeta_s)^{m_s}$, wobei $\zeta_1, \ldots, \zeta_s$ die verschiedenen Eigenwerte von A sind. Nach linearer Algebra existiert ein $S \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$, sodass $SAS^{-1} = J$ die Jordansche Normalform ist. Wegen $A^n = S^{-1} J^n S$ muss man die Potenzen von J berechnen. Für einen einzelnen Jordanblock zum Eigenwert λ gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & & & & \\ n\lambda^{n-1} & \ddots & & & \\ \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \binom{n}{k-1}\lambda^{n-k+1} & \cdots & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix}$$

(man beachte die Ähnlichkeit der Einträge zu den Ableitungen $(\lambda^i)^{(j)}$). Damit lässt sich die Rekursionsgleichung lösen. Man kann zeigen, dass χ_A auch das Minimalpolynom von A ist. Daher ist A genau dann diagonalisierbar, wenn die Eigenwerte paarweise verschieden sind, d. h. $s = k$. Ggf. ist J eine Diagonalmatrix und die Formel vereinfacht sich.

(iii) Bei der Lösung von Differentialgleichungen in der Analysis treten Rekursionsgleichungen auf, bei denen die c_i auch von n abhängen dürfen.

Beispiel 3.9. Die bekannten Formeln

$$\sum_{n=1}^{a} n = \binom{a+1}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{a} (2n-1) = a^2, \qquad \sum_{n=0}^{a} 2^n = 2^{a+1} - 1$$

lassen sich leicht mit Induktion beweisen. Dazu muss man sie aber zuerst erraten. Die Differenzenrechnung ist ein Werkzeug zur Herleitung solcher Summenformeln.

Bemerkung 3.10. In der Analysis berechnet man Flächen unter integrierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Hilfe des Integrals $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ bzgl. des Lebesgue-Maßes. In der diskreten Mathematik betrachten wir Funktionen $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ und statten $\mathbb{Z}$ mit dem *Zählmaß* $m(A) = |A|$ für $A \subseteq \mathbb{Z}$ aus. Das Integral entspricht dann der Summe $\sum_{n=a}^{b-1} f(n)$ (vgl. Beispiel 2.4). Analog zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung lassen sich solche Summen mit (diskreten) Stammfunktionen bestimmen. Diese wiederum erhält man als Umkehrung der (diskreten) Ableitung.

Definition 3.11. Für $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definieren wir die (*diskrete*) *Ableitung*

$$\Delta(f)\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \qquad\qquad n \mapsto f(n+1) - f(n)$$

(dies erhält man aus der analytischen Definition $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für $h = 1$). Eine (*diskrete*) *Stammfunktion* von f ist eine Funktion $F\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ mit $\Delta(F) = f$.

Bemerkung 3.12. Im Gegensatz zur Analysis besitzt jede Funktion $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ (genau) eine diskrete Ableitung. Durch die rekursive Vorschrift

$$F(n) := \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0, \\ F(n-1) + f(n-1) & \text{falls } n > 0, \\ F(n+1) - f(n) & \text{falls } n < 0 \end{cases}$$

erhält man stets eine diskrete Stammfunktion von f (allerdings gibt es oft keine geschlossene Formel für $F(n)$). Sind F und G diskrete Stammfunktionen von f, so gilt

$$\begin{aligned} F(n+1) - G(n+1) &= \Delta(F)(n) - \Delta(G)(n) + F(n) - G(n) \\ &= f(n) - f(n) + F(n) - G(n) = F(n) - G(n) \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$, d. h. F und G unterscheiden sich (wie in der Analysis) nur durch eine Konstante. Eine solche (unbestimmte) Stammfunktion drücken wir mit dem modifizierten Integralsymbol $\sum f$ aus.

Beispiel 3.13. Für die konstante Funktion $f = C$ gilt $\Delta(f) = 0$. Für $f = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ gilt $\Delta(f) = 1$. Wegen $\frac{1}{2}\big((n+1)n - n(n-1)\big) = n = f(n)$ ist $\sum f = \sum n = \frac{1}{2}n(n-1)$ (in der Analysis wäre es $\frac{1}{2}x^2$).

Satz 3.14 (Hauptsatz der Differenzenrechnung)**.** *Sei $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ mit diskreter Stammfunktion F. Für $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \le b$ gilt dann*

$$\boxed{\sum_{n=a}^{b} f(n) = F(b+1) - F(a).}$$

Beweis.

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \sum_{n=a}^{b} \Delta(F)(n) = \sum_{n=a}^{b} (F(n+1) - F(n)) = F(b+1) - F(a). \qquad \square$$

Bemerkung 3.15. Wie in der Analysis schreiben wir $\int_a^b f := F(b) - F(a)$. Nach Bemerkung 3.12 hängt dies nicht von der Wahl der diskreten Stammfunktion ab.

Beispiel 3.16.

$$\sum_{n=0}^{a} n = \int_{0}^{a+1} n \overset{3.13}{=} \frac{1}{2}(a+1)a = \binom{a+1}{2}.$$

Definition 3.17. Die Funktionen $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ bilden mit den folgenden Operationen einen Ring sowie einen $\mathbb{R}$-Vektorraum:

$$(f+g)(n) := f(n) + g(n), \quad (fg)(n) := f(n)g(n), \quad (\lambda f)(n) := \lambda f(n) \quad (f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{R})$$

(die Komposition $f \circ g$ ist hingegen nicht wohldefiniert). Zusätzlich definieren wir $\mathrm{E}(f)\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto f(n+1)$.

Lemma 3.18. *Für $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\Delta(\lambda f) = \lambda\Delta(f)$, $\Delta(f+g) = \Delta(f) + \Delta(g)$ und*

$$\boxed{\Delta(fg) = \Delta(f)\mathrm{E}(g) + f\Delta(g)} \qquad (\textit{Produktregel}).$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda f)(n) &= \lambda f(n+1) - \lambda f(n) = \lambda\Delta(f)(n),\\
\Delta(f+g)(n) &= (f+g)(n+1) - (f+g)(n) = f(n+1) - f(n) + g(n+1) - g(n)\\
&= \Delta(f)(n) + \Delta(g)(n),\\
\Delta(fg)(n) &= f(n+1)g(n+1) - f(n)g(n) = (f(n+1) - f(n))g(n+1) + f(n)(g(n+1) - g(n))\\
&= \Delta(f)(n)\mathrm{E}(g)(n) + f(n)\Delta(g)(n).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.19. Man macht sich leicht klar, dass unsere bisherigen Definitionen und Resultate auch für Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gelten.

Lemma 3.20.

(i) Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $p_k\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto n(n-1)\dots(n-k+1)$. Dann gilt $\sum p_k = \frac{1}{k+1}p_{k+1}$.

(ii) Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $q_k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto \frac{1}{n(n+1)\dots(n+k-1)}$. Dann gilt $\Delta(q_k) = -kq_{k+1}$.

(iii) Für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gilt $\sum c^n = \frac{c^n}{c-1}$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned}
\Delta(p_{k+1})(n) &= (n+1)p_k(n) - p_k(n)(n-k) = (k+1)n(n-1)\dots(n-k+1) = (k+1)p_k(n),\\
\Delta(q_k)(n) &= nq_{k+1}(n) - q_{k+1}(n)(n+k) = -kq_{k+1}(n),\\
\Delta(c^n) &= c^{n+1} - c^n = (c-1)c^n.
\end{aligned}$$

□

Beispiel 3.21.

(a) Wegen $\sum 2^n = 2^n$ ist 2^n das diskrete Analogon der Exponentialfunktion. Wegen $n^2 = n(n-1)+n = p_2(n) + p_1(n)$ ist

$$\sum n^2 = \frac{1}{3}p_3(n) + \frac{1}{2}p_2(n) = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}.$$

(b) Lemma 3.20 liefert keine Formel für $\sum q_1$. Für $a \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_1^{a+1} \frac{1}{n} \overset{3.14}{=} \sum_{n=1}^{a} \frac{1}{n} = H_a$$

die a-te harmonische Zahl (man vergleiche mit der Analysis $\int \frac{1}{x} = \log(x)$, siehe Bemerkung 2.11).

Satz 3.22 (Partielle Integration)**.** *Für $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ gilt* $\boxed{\sum f\Delta(g) = fg - \sum \Delta(f)\mathrm{E}(g).}$

Beweis.

$$\Delta\Big(fg - \sum \Delta(f)\mathrm{E}(g)\Big) \overset{3.18}{=} \Delta(fg) - \Delta(f)\mathrm{E}(g) = f\Delta(g). \qquad \square$$

Bemerkung 3.23. Für reelle Folgen (a_n) und (b_n) lässt sich Satz 3.22 auch in der Form

$$\sum_{n=1}^{k} a_n b_n = a_k \sum_{n=1}^{k} b_n + \sum_{n=1}^{k-1} (a_n - a_{n+1}) \sum_{l=1}^{n} b_l$$

schreiben. Dies nennt sich *abelsche Summation*.

Beispiel 3.24. Für $a \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{a-1} nc^n &\overset{3.20}{=} \frac{1}{c-1} \sum_0^a n\Delta(c^n) = \frac{1}{c-1}\Big(ac^a - \sum_0^a \Delta(n)\mathrm{E}(c^n)\Big) = \frac{1}{c-1}\Big(ac^a - c\sum_0^a c^n\Big) \\ &= \frac{1}{c-1}\Big(ac^a - \frac{c}{c-1}(c^a - 1)\Big) = \frac{c^a(ac - a - c) + c}{(c-1)^2}.\end{aligned}$$

Satz 3.25 (Faulhabersche Formel)**.** *Für $a, k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{n=1}^{a-1} n^k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+1} \left\{ {k \atop n} \right\} a(a-1)\dots(a-n).$$

Dies ist ein Polynom in a vom Grad $k+1$.

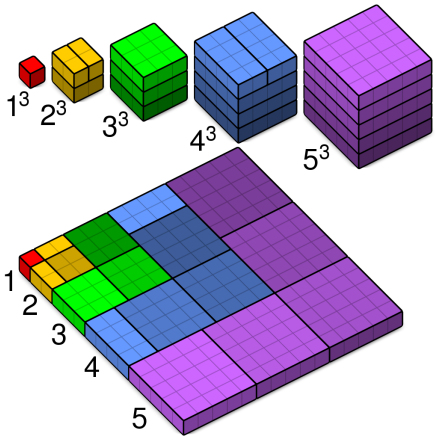
Beweis. Nach Satz 2.31 ist

$$\sum_{n=0}^{a-1} n^k = \sum_0^a n^k = \sum_{l=0}^{k} \left\{ {k \atop l} \right\} \sum_0^a p_l = \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l+1} \left\{ {k \atop l} \right\} p_{l+1}(a) = \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l+1} \left\{ {k \atop l} \right\} a(a-1)\dots(a-l). \qquad \square$$

Beispiel 3.26. Für $k = 3$ erhält man die *Nicomachus-Identität*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{a-1} n^3 &= \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{n+1} \left\{ {3 \atop n} \right\} a(a-1)\dots(a-n) = \frac{1}{2}a(a-1) + a(a-1)(a-2) + \frac{1}{4}a(a-1)(a-2)(a-3) \\ &= \frac{a(a-1)}{2}\Big(1 + 2(a-2) + \frac{1}{2}(a-2)(a-3)\Big) = \Big(\frac{a(a-1)}{2}\Big)^2 = \binom{a}{2}^2 = \Big(\sum_{n=1}^{a-1} n\Big)^2.\end{aligned}$$

Sie lässt sich auch geometrisch begründen:[5]



Bemerkung 3.27. Der (führende) Koeffizient von a^{k+1} in der Faulhaberschen Formel ist $\frac{1}{k+1}\left\{{k \atop k}\right\} = \frac{1}{k+1}$. Der Koeffizient von a^k ist

$$\frac{1}{k}\left\{{k \atop k-1}\right\} - \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k-1}{2} - \frac{k}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Der Koeffizient von a ist die k-te *Bernoulli-Zahl*

$$B_k := \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^n}{n+1} n! \left\{{k \atop n}\right\}.$$

Die Bernoulli-Zahlen treten auch für negative (gerade) k auf:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(2\pi)^{2k}(-1)^{k+1}B_{2k}}{2(2k)!}$$

(ohne Beweis). Man kennt hingegen keine Formel für die *Apéry-Konstante* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1{,}202\ldots$. Dies sind Werte der *Riemannschen ζ-Funktion* $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ definiert für reelle $s > 1$. Durch

$$\zeta(z) = \frac{1}{1-2^{1-z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(k+1)^z} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{1\})$$

lässt sich ζ nach $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ fortsetzen. Man kann zeigen, dass $\zeta(-2a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt (das hängt mit $B_{2a+1} = 0$ zusammen, Aufgabe 21). Die *Riemannsche Vermutung* besagt, dass alle weiteren Nullstellen von ζ Realteil $\frac{1}{2}$ haben. Dies *war* eine der größten mathematischen Fragen der Gegenwart.[6] Erstaunlicherweise ist die Riemannsche Vermutung zu folgender diskreten Aussage äquivalent: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{d|n} d \le H_n + e^{H_n} \log(H_n) \qquad (\textit{Lagarias-Kriterium})^7.$$

[5] Quelle: math.stackexchange, siehe auch hyrodium.tumblr.com

[6] 2026 mit KI-Einsatz durch Alpöge gelöst.

[7] siehe [J. C. Lagarias, *An Elementary Problem Equivalent to the Riemann Hypothesis*, Amer. Math. Monthly 109 (2002), 534–543]

4 Formale Potenzreihen

Bemerkung 4.1. Aus der Analysis kennen Sie Potenzreihen als Funktionen der Form $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. In der diskreten Mathematik interessiert man sich nicht für den Wert solcher Funktionen, sondern nur für die auftretenden Koeffizienten a_n. In diesem Abschnitt legen wir die Grundlagen für die Anwendungen im nächsten Abschnitt.

Definition 4.2. Sei $\mathbb{C}[[X]] := \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} = \{(a_0, a_1, \ldots) : a_i \in \mathbb{C}\}$. Zwei Elemente $\alpha := (a_0, \ldots)$ und $\beta := (b_0, \ldots)$ von $\mathbb{C}[[X]]$ lassen sich wie folgt addieren und multiplizieren:

$$\alpha + \beta := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots) \in \mathbb{C}[[X]],$$
$$\alpha \cdot \beta := (a_0 b_0, a_1 b_0 + a_0 b_1, \ldots, \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}, \ldots) \in \mathbb{C}[[X]].$$

Wir setzen $0 := (0, 0, \ldots) \in \mathbb{C}[[X]]$ und $1 := (1, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{C}[[X]]$.

Lemma 4.3. *Die Menge $\mathbb{C}[[X]]$ ist ein Integritätsbereich, d. h. für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}[[X]]$ gilt*

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \qquad \alpha + \beta = \beta + \alpha \qquad \alpha + 0 = \alpha$$
$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \qquad \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \qquad \alpha \cdot 1 = \alpha$$
$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma) \qquad \exists \delta \in \mathbb{C}[[X]] : \alpha + \delta = 0, \qquad \alpha\beta = 0 \Longrightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0.$$

Beweis. Der Beweis funktioniert wie für Polynome (Algebra 1). Die ersten drei Aussagen folgen direkt aus den entsprechenden Axiomen in $\mathbb{C}$. Sei nun $\alpha = (a_0, \ldots)$, $\beta = (b_0, \ldots)$ und $\gamma = (c_0, \ldots)$. Für $\delta := (-a_0, -a_1, \ldots)$ gilt dann $\alpha + \delta = 0$. Der n-te Eintrag von $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ ist

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n-i} b_j c_{n-i-j} = \sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k = \sum_{i=0}^{n} \Big(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \Big) c_{n-i}.$$

Dies zeigt $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$. Wegen $\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} b_i a_{n-i}$ ist $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$. Die Gleichung $\alpha \cdot 1 = \alpha$ ist leicht zu sehen. Der n-te Eintrag von $\alpha \cdot (\beta + \gamma)$ ist

$$\sum_{i=0}^{n} a_i (b_{n-i} + c_{n-i}) = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} + \sum_{i=0}^{n} a_i c_{n-i}$$

und $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$ folgt. Sei schließlich $\alpha\beta = 0$. Nehmen wir indirekt $\alpha \neq 0 \neq \beta$ an. Sei $k := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : a_n \neq 0\}$ und $l := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : b_n \neq 0\}$. Der $(k+l)$-te Eintrag von $\alpha\beta$ ist dann $\sum_{i=0}^{k+l} a_i b_{k+l-i} = a_k b_l \neq 0$. Dieser Widerspruch zeigt $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$. □

Bemerkung 4.4.

(i) Man nennt $\mathbb{C}[[X]]$ *Ring der (formalen) Potenzreihen*. Seine Elemente schreibt man in der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots$, wobei $X = (0, 1, 0, 0, \ldots)$ eine *Unbekannte* ist. Es gilt dabei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \Longleftrightarrow a_n = b_n \ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Bei der Multiplikation von Potenzreihen multipliziert man summandenweise und fasst anschließend gleiche X-Potenzen zusammen. Man nennt a_0 das *Absolutglied* von α. Wenn der Summationsbereich klar ist, schreiben wir kürzer $\sum a_n X^n$. Außerdem werden wir das Multiplikationssymbol $\cdot$ weglassen und „Punkt- vor Strichrechnung“ benutzen, d. h. $\alpha\beta + \gamma := (\alpha \cdot \beta) + \gamma$. Das Inverse von α bzgl. $+$ sei $-\alpha$. Wie üblich schreiben wir $\alpha - \beta$ anstatt $\alpha + (-\beta)$.

(ii) Die Bedeutung des Wortes „formal“ liegt darin, dass wir im Gegensatz zur Analysis keine Konvergenz beachten, da X stets eine Unbekannte und keine Zahl ist (daher auch die Verwendung des Großbuchstabens).

(iii) Für $\alpha \in \mathbb{C}[[X]]$ definieren wir $\alpha\mathbb{C}[[X]] := \{\alpha\beta : \beta \in \mathbb{C}[[X]]\}$ (ein Hauptideal in $\mathbb{C}[[X]]$). Zum Beispiel ist $X\mathbb{C}[[X]]$ die Menge der Potenzreihen mit Absolutglied 0.

(iv) Man kann $\mathbb{C}[[X]]$ zu einem Körper $\mathbb{C}((X))$ erweitern, indem man Potenzreihen durch (formale) *Laurent-Reihen* der Form $\sum_{n=k}^{\infty} a_n X^n$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $a_n \in \mathbb{C}$ ersetzt (Aufgabe 19).

Beispiel 4.5.

(i) Jedes (formale) Polynom ist eine Potenzreihe.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned}(1+2X+3X^2+4X^3+\ldots)(1-X+X^2-X^3\pm\ldots) &= 1+(2-1)X+(3-2+1)X^2\\ &\quad +(4-3+2-1)X^3+\ldots = 1+X+2X^2+2X^3+\ldots,\\ (1-X)\sum_{n=0}^{\infty} X^n &= \sum_{n=0}^{\infty} X^n - \sum_{n=1}^{\infty} X^n = 1.\end{aligned}$$

(iii) Die (formale) *Exponentialfunktion* ist

$$\boxed{\exp(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + \ldots \in \mathbb{C}[[X]].}$$

Definition 4.6. Man nennt $\alpha \in \mathbb{C}[[X]]$ *invertierbar*, falls ein $\beta \in \mathbb{C}[[X]]$ mit $\alpha\beta = 1$ existiert.

Bemerkung 4.7.

(i) Sind α, β, γ mit $\alpha\beta = 1 = \alpha\gamma$, so gilt $\alpha(\beta - \gamma) = 0$ und es folgt $\beta = \gamma$, denn anderenfalls wäre $1 = \alpha\beta = 0\beta = 0$. Also existiert höchstens ein β mit $\alpha\beta = 1$. Man nennt β das *Inverse* von α und schreibt $\alpha^{-1} := \beta$ oder $1/\alpha$. Allgemeiner setzen wir

$$\alpha^k := \begin{cases} \underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{k\text{-mal}} & \text{falls } k > 0,\\ 1 & \text{falls } k = 0,\\ (\alpha^{-1})^{-k} & \text{falls } k < 0 \end{cases}$$

für $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}[[X]]$ mit $\alpha\beta = \gamma$ schreiben wir $\frac{\gamma}{\beta} := \alpha$, falls $\beta \neq 0$ (wie in (i) ist dies wohldefiniert).

Lemma 4.8. *Sei $\alpha = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$.*

(i) Genau dann ist α invertierbar, wenn $a_0 \neq 0$ gilt.

(ii) Existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\alpha^m = 1$, so ist $\alpha \in \mathbb{C}$.

Beweis.

(i) Sei $\beta = \sum b_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ mit $\alpha\beta = 1$. Dann ist $a_0 b_0 = 1$ und $a_0 \neq 0$. Sei umgekehrt $a_0 \neq 0$. Wir definieren $b_0, b_1, \ldots \in \mathbb{C}$ induktiv durch $b_0 := 1/a_0$ und

$$b_k := -\frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i b_{k-i} \in \mathbb{C}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Es gilt dann

$$\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0, \\ 0 & \text{falls } k > 0. \end{cases}$$

Dies zeigt $\alpha\beta = 1$ für $\beta := \sum b_n X^n$.

(ii) Sei indirekt $\alpha \notin \mathbb{C}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ minimal mit $a_n \neq 0$. Dann ist $m a_0^{m-1} a_n$ der n-te Koeffizient von α^m, also $m a_0^{m-1} a_n = 0$. Nach (i) ist $a_0 \neq 0$ und es folgt der Widerspruch $a_n = 0$. □

Bemerkung 4.9. Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[[X]]$ invertierbar, so auch α^{-1} und $\alpha\beta$ nach Lemma 4.8. In diesem Fall ist $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ und $(\alpha\beta)^{-1} = \alpha^{-1}\beta^{-1}$. Die invertierbaren Potenzreihen bilden bzgl. Multiplikation eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 1. Man nennt sie *Einheitengruppe* von $\mathbb{C}[[X]]$ und schreibt dafür $\mathbb{C}[[X]]^\times$. Nach Lemma 4.8 gilt $\mathbb{C}[[X]]^\times = \mathbb{C}[[X]] \setminus X\mathbb{C}[[X]]$.

Beispiel 4.10.

(i) Nach Beispiel 4.5 ist $\frac{1}{1-X} = \sum X^n$ die (formale) *geometrische Reihe*. Allgemeiner gilt

$$\frac{1}{a - X} = \sum a^{-n-1} X^n$$

für $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}$$

für $\alpha \in \mathbb{C}[[X]] \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Für verschiedene $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind $X + a$ und $X + b$ invertierbar und es gilt die *Partialbruchzerlegung*

$$\frac{1}{(X+a)(X+b)} = \frac{1}{b-a}\Big(\frac{1}{X+a} - \frac{1}{X+b}\Big)$$

(rechte Seite auf Hauptnenner bringen).

Bemerkung 4.11. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\alpha_k \in X^{e_k}\mathbb{C}[[X]]$ mit $\lim_{k\to\infty} e_k = \infty$. Dann lässt sich die unendliche Summe $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ bilden, denn der Koeffizient von X^n hängt nur von endlich vielen α_k ab.[8] Genauer gilt: Sei $\alpha_k = \sum a_{k,n} X^n$. Dann ist

$$\sum \alpha_k = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{k \in \mathbb{N}_0 \\ e_k \leq n}} a_{k,n} \Big) X^n.$$

Ebenso ist $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + \alpha_k)$ wohldefiniert. Im Folgenden werden alle unendlichen Summen und Produkte diese Bauart haben.

[8] Formal kann man durch $|\alpha| := 2^{-\inf\{n \in \mathbb{N}_0 : a_n \neq 0\}}$ eine Norm auf $\mathbb{C}[[X]]$ definieren und die unendliche Summe wie in der Analysis als Grenzwert der Partialsummen definieren. Die Details stehen in meinem Kombinatorik-Skript.

Beispiel 4.12.

(i) Für $\alpha \in X\mathbb{C}[[X]]$ gilt $\alpha^k \in X^k\mathbb{C}[[X]]$ und $\sum \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$. Wir haben in der geometrischen Reihe also X durch α ersetzt.

(ii) Die Koeffizienten von

$$(1+X)(1+X^2)(1+X^3)(1+X^4)\ldots = 1 + X + X^2 + 2X^3 + 2X^4 + \ldots$$

werden wir im nächsten Kapitel untersuchen.

Definition 4.13. Für $\alpha = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ und $\beta \in X\mathbb{C}[[X]]$ definiert man die *Komposition*

$$\alpha \circ \beta := \alpha(\beta) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n.$$

Bemerkung 4.14. Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[[X]]$ wäre das Absolutglied $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_0^k$ von $\alpha(\beta)$ im Allgemeinen nicht wohldefiniert. Zum Beispiel kann man in der geometrischen Reihe nicht X durch 1 substituieren.

Beispiel 4.15. Für $\alpha = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ gilt $\alpha(X^2) = \sum a_n X^{2n}$ und $\alpha(0) = a_0$.

Lemma 4.16. *Für $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \ldots \in \mathbb{C}[[X]]$ gilt (falls wohldefiniert):*

$$X \circ \alpha = \alpha = \alpha \circ X, \tag{4.1}$$

$$\Big(\sum \alpha_k\Big) \circ \beta = \sum (\alpha_k \circ \beta), \tag{4.2}$$

$$(\alpha\beta) \circ \gamma = (\alpha \circ \gamma)(\beta \circ \gamma), \tag{4.3}$$

$$\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma. \tag{4.4}$$

Beweis. Gleichung (4.1) ist trivial. Mit den Bezeichnungen aus Bemerkung 4.11 gilt

$$\Big(\sum \alpha_k\Big) \circ \beta = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_k a_{k,n}\Big)\beta^n = \sum_k \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n}\beta^n\Big) = \sum (\alpha_k \circ \beta).$$

Gleichung (4.3) erhält man durch

$$(\alpha\beta) \circ \gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \gamma^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (a_k \gamma^k)(b_{n-k}\gamma^{n-k}) = (\alpha \circ \gamma)(\beta \circ \gamma).$$

In (4.4) dürfen wir $\alpha = X^n$ nach (4.2) annehmen. Mit (4.3) folgt

$$\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\beta \circ \gamma)^n = \beta^n \circ \gamma = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma. \qquad \square$$

Bemerkung 4.17. Im Allgemeinen ist $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$, $\alpha \circ (\beta\gamma) \neq (\alpha \circ \beta)(\alpha \circ \gamma)$ und $\alpha \circ (\beta + \gamma) \neq \alpha \circ \beta + \alpha \circ \gamma$ (Aufgabe 26). Die letzte Gleichung lässt sich für die Exponentialfunktion korrigieren.

Lemma 4.18 (Funktionalgleichung)**.** *Für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \in X\mathbb{C}[[X]]$ gilt (falls wohldefiniert)*

$$\boxed{\exp\Big(\sum \alpha_k\Big) = \prod \exp(\alpha_k).} \tag{4.5}$$

Insbesondere ist $\exp(kX) = \exp(X)^k$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Wegen $\sum \alpha_k \in X\mathbb{C}[[X]]$ und $\exp(\alpha_k) = 1+\alpha_k+\frac{\alpha_k^2}{2}+\ldots$ sind beide Seiten von (4.5) wohldefiniert (Bemerkung 4.11). Für zwei Summanden $\alpha, \beta \in X\mathbb{C}[[X]]$ gilt

$$\begin{aligned}\exp(\alpha+\beta) &= \sum \frac{(\alpha+\beta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\alpha^k\beta^{n-k}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k\beta^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum\frac{\alpha^n}{n!}\cdot\sum\frac{\beta^n}{n!} = \exp(\alpha)\exp(\beta).\end{aligned}$$

Induktiv erhält man (4.5) für endlich viele Summanden. Schließlich gilt (4.5) auch für unendlich viele Summanden, denn jeder Koeffizient hängt nur von endlich vielen Summanden ab. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}\exp(X+X^2+X^3+\ldots) &= 1+(X+X^2+\ldots)+\frac{(X+X^2+\ldots)^2}{2}+\ldots = 1+X+\frac{3}{2}X^2+\ldots \\ &= \Big(1+X+\frac{X^2}{2}+\ldots\Big)\Big(1+X^2+\frac{(X^2)^2}{2}+\ldots\Big)\ldots = \exp(X)\exp(X^2)\ldots.\end{aligned}$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist $\exp(kX) = \exp(X+\ldots+X) = \exp(X)^k$. Wegen $\exp(kX)\exp(-kX) = \exp(kX-kX) = \exp(0) = 1$ ist $\exp(-kX) = \exp(kX)^{-1} = \exp(X)^{-k}$. Daher gilt die letzte Behauptung für alle $k \in \mathbb{Z}$. □

Satz 4.19. *Für jedes $\alpha = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ mit $a_0 = 0$ und $a_1 \neq 0$ existiert genau ein $\beta \in \mathbb{C}[[X]]$ mit $\beta(\alpha) = \alpha(\beta) = X$. Daher ist $\mathbb{C}[[X]]^\circ := X\mathbb{C}[[X]] \setminus X^2\mathbb{C}[[X]]$ eine Gruppe bzgl. $\circ$ mit neutralem Element X.*

Beweis. Sei $\alpha^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n}X^n$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Wegen $a_0 = 0$ ist $a_{k,n} = 0$ für $n < k$ und $a_{n,n} = a_1^n \neq 0$. Wir definieren induktiv $b_0 := 0$, $b_1 := \frac{1}{a_1} \neq 0$ und

$$b_n := -\frac{1}{a_{n,n}}\sum_{k=0}^{n-1} a_{k,n}b_k$$

für $n \geq 2$. Für $\beta := \sum b_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]^\circ$ gilt dann

$$\beta(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\alpha^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} b_k a_{k,n}X^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} b_k a_{k,n}\Big)X^n = X.$$

Vertauscht man die Rollen von α und β, so erhält man $\gamma \in \mathbb{C}[[X]]^\circ$ mit $\gamma(\beta) = X$. Nach Lemma 4.16 gilt

$$\alpha(\beta) = X \circ (\alpha\circ\beta) = (\gamma\circ\beta)\circ(\alpha\circ\beta) = \gamma\circ(\beta\circ\alpha)\circ\beta = \gamma\circ X\circ\beta = \gamma(\beta) = X.$$

Also ist β das Inverse von α bzgl. $\circ$. Insbesondere ist β eindeutig bestimmt und $\mathbb{C}[[X]]^\circ$ ist eine Gruppe. □

Bemerkung 4.20. In der Situation von Satz 4.19 nennt man β die *Umkehrfunktion* von α. Beachte: $\beta \neq \alpha^{-1}$ (wir werden keine Bezeichnung für die Umkehrfunktion einführen).

Beispiel 4.21.

(i) Sei α die Umkehrfunktion von $X+X^2+\ldots = \frac{X}{1-X}$. Dann gilt

$$X = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

und es folgt $\alpha = \frac{X}{1+X} = X - X^2 + X^3 - \ldots$.

(ii) Sei $\alpha = \sum a_n X^n$ die Umkehrfunktion von $X - X^2$. Dann gilt

$$(a_1X + a_2X^2 + \ldots) - (a_1^2X^2 + 2a_1a_2X^3 + (a_2^2 + 2a_1a_3)X^4 + \ldots) = \alpha - \alpha^2 = X.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $\alpha = X + X^2 + 2X^3 + 5X^4 + \ldots$ und allgemein $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$. Dies sind die *Catalan-Zahlen*.

Definition 4.22. Für $\alpha = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ nennt man

$$\alpha' := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n X^{n-1} \in \mathbb{C}[[X]]$$

die (formale) *Ableitung* von α. Sei außerdem $\alpha^{(0)} := \alpha$ und $\alpha^{(k)} := (\alpha^{(k-1)})'$ die *k-te Ableitung* für $k \in \mathbb{N}$.

Beispiel 4.23. Es gilt $1' = 0$, $X' = 1$ sowie

$$\exp(X)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{X^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = \exp(X).$$

Bemerkung 4.24. Mit Ableitungen lassen sich die Koeffizienten von $\alpha = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ berechnen: $\alpha^{(0)}(0) = \alpha(0) = a_0$, $\alpha'(0) = a_1$, $\alpha''(0) = 2a_2, \ldots, \alpha^{(n)}(0) = n! a_n$. Daher gilt

$$\boxed{\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(n)}(0)}{n!} X^n} \qquad (Taylorreihe).$$

Lemma 4.25. *Für $\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \mathbb{C}[[X]]$ gilt (falls wohldefiniert):*

$$\begin{aligned}
\Big(\sum \alpha_k\Big)' &= \sum \alpha_k' && (Summenregel),\\
(\alpha\beta)' &= \alpha'\beta + \alpha\beta' && (Produktregel),\\
\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)' &= \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\beta^2} && (Quotientenregel),\\
(\alpha \circ \beta)' &= \alpha'(\beta)\beta' && (Kettenregel).
\end{aligned}$$

Beweis. Mit den Bezeichnungen aus Bemerkung 4.11 gilt

$$\Big(\sum \alpha_k\Big)' = \Big(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n} X^n\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} n a_{k,n} X^{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} n a_{k,n} X^{n-1}\Big) = \sum \alpha_k'.$$

In der Produktregel darf man nun $\alpha = X^k$ und $\beta = X^l$ annehmen. Dann ist

$$(\alpha\beta)' = (X^{k+l})' = (k+l)X^{k+l-1} = kX^{k-1}X^l + lX^{l-1}X^k = \alpha'\beta + \beta'\alpha.$$

Es folgt

$$\alpha' = \Big(\frac{\alpha}{\beta}\beta\Big)' = \Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)'\beta + \frac{\alpha\beta'}{\beta}.$$

Durch Umstellen erhält man die Quotientenregel. Induktiv zeigen wir nun $(\alpha^n)' = n\alpha^{n-1}\alpha'$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dies ist klar für $n = 0$. Für $n \geq 1$ gilt

$$(\alpha^n)' = (\alpha\alpha^{n-1})' = \alpha'\alpha^{n-1} + \alpha(\alpha^{n-1})' = \alpha'\alpha^{n-1} + (n-1)\alpha\alpha^{n-2}\alpha' = n\alpha^{n-1}\alpha'.$$

Aus der Summenregel folgt

$$(\alpha \circ \beta)' = \Big(\sum a_n\beta^n\Big)' = \sum a_n(\beta^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n\beta^{n-1}\beta' = \alpha'(\beta)\beta'. \qquad \square$$

Bemerkung 4.26. Die Produktregel impliziert auch die *Faktorregel* $(\lambda\alpha)' = \lambda\alpha'$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{C}[[X]]$.

Beispiel 4.27. Wir definieren den (formalen) *Logarithmus* durch die *Mercator-Reihe*

$$\boxed{\log(1+X) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} X^n = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} \mp \ldots \in \mathbb{C}[[X]].}$$

Nach Satz 4.19 besitzt $\alpha := \exp(X) - 1$ eine Umkehrfunktion und $\log(\exp(X)) = \log(1+\alpha) \in \mathbb{C}[[X]]^\circ$. Wegen

$$\log(1+X)' = 1 - X + X^2 \mp \ldots = \sum (-X)^n = \frac{1}{1+X}$$

folgt

$$\log(\exp(X))' = \frac{\alpha'}{1+\alpha} = \frac{\exp(X)}{1+\alpha} = \frac{1+\alpha}{1+\alpha} = 1$$

aus der Kettenregel. Dies zeigt $\log(\exp(X)) = X$. Also ist $\log(1+X)$ die Umkehrfunktion von $\alpha = \exp(X) - 1$ wie in der Analysis. Außerdem gilt $\log(1-X) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n}$.

Lemma 4.28 (Funktionalgleichung)**.** *Für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \in X\mathbb{C}[[X]]$ gilt (falls wohldefiniert)*

$$\boxed{\log\Big(\prod(1+\alpha_k)\Big) = \sum \log(1+\alpha_k).}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \log\Big(\prod(1+\alpha_k)\Big) &= \log\Big(\prod \exp(\log(1+\alpha_k))\Big) \overset{4.18}{=} \log\big(\exp\Big(\sum \log(1+\alpha_k)\Big)\big) \\ &= \sum \log(1+\alpha_k). \end{aligned} \qquad \square$$

Beispiel 4.29. Nach Lemma 4.28 gilt

$$\begin{aligned} \log\Big(\frac{1}{1-X}\Big) &= \log\Big(\frac{1}{1-X}\Big) + \log(1-X) - \log(1-X) = \log\Big(\frac{1}{1-X}(1-X)\Big) - \log(1-X) \\ &= \log(1) - \log(1-X) = -\log(1-X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n}. \end{aligned}$$

Definition 4.30. Für $c \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in X\mathbb{C}[[X]]$ definieren wir

$$(1+\alpha)^c := \exp(c\log(1+\alpha)).$$

Im Fall $c = 1/k$ mit $k \in \mathbb{N}$ schreiben wir $\sqrt[k]{1+\alpha} := (1+\alpha)^{1/k}$ und speziell $\sqrt{1+\alpha} := \sqrt[2]{1+\alpha}$.

Bemerkung 4.31.

(i) Für $c = k \in \mathbb{Z}$ stimmt $(1+\alpha)^k$ nach Lemma 4.18 mit der gewöhnlichen Potenz überein. Für $c, d \in \mathbb{C}$ gilt das Potenzgesetz

$$(1+\alpha)^c(1+\alpha)^d = \exp(c\log(1+\alpha) + d\log(1+\alpha)) = (1+\alpha)^{c+d}$$

wie gewohnt. Für $k \in \mathbb{N}$ ist demnach $\sqrt[k]{1+\alpha}^k = 1+\alpha$, d. h. $\sqrt[k]{1+\alpha}$ ist eine k-te *Wurzel* von $1+\alpha$ mit Absolutglied 1. Sei auch $\beta \in \mathbb{C}[[X]]$ mit $\beta^k = 1+\alpha$. Dann hat $\sqrt[k]{1+\alpha}\beta^{-1}$ Ordnung $\leq k$ in $\mathbb{C}[[X]]^\times$. Aus Lemma 4.8 folgt, dass $\sqrt[k]{1+\alpha}\beta^{-1}$ konstant ist, d. h. $\beta = \beta(0)\sqrt[k]{1+\alpha}$. Daher ist $\sqrt[k]{1+\alpha}$ die einzige k-te Wurzel von $1+\alpha$ mit Absolutglied 1.

(ii) Der folgende Satz verallgemeinert sowohl den Binomialsatz ($c \in \mathbb{N}$) als auch die geometrische Reihe ($c = -1$).

Satz 4.32 (NEWTONscher Binomialsatz)**.** *Für $\alpha \in X\mathbb{C}[[X]]$ und $c \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\boxed{(1+\alpha)^c = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{c}{k} \alpha^k.}$$

Beweis. Es genügt, die Behauptung für $\alpha = X$ zu beweisen. Nach der Kettenregel gilt

$$((1+X)^c)' = (\exp(c\log(1+X)))' = c\frac{(1+X)^c}{1+X} = c(1+X)^{c-1}$$

und induktiv folgt $((1+X)^c)^{(k)} = c(c-1)\dots(c-k+1)(1+X)^{c-k}$. Die Behauptung folgt nun aus der Taylorreihe. □

Beispiel 4.33.

(i) Es gilt

$$\sqrt{1+X} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} X^k = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{16}X^3 - \frac{5}{2^7}X^4 \pm \dots.$$

(ii) Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $\zeta^n = 1$ und $\alpha := (1+X)^\zeta - 1 \in X\mathbb{C}[[X]]$. Dann gilt $\alpha \circ \alpha = (1+(1+X)^\zeta - 1)^\zeta - 1 = (1+X)^{\zeta^2} - 1$ und induktiv $\alpha \circ \dots \circ \alpha = (1+X)^{\zeta^n} - 1 = X$, d. h. die Ordnung von α in der Gruppe $\mathbb{C}[[X]]^\circ$ teilt n. Im Gegensatz zu Lemma 4.8 besitzt $\mathbb{C}[[X]]^\circ$ also „interessante“ Elemente endlicher Ordnung.

Definition 4.34. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $X^n! := (1-X)(1-X^2)\dots(1-X^n)$. Für $0 \leq k \leq n$ nennt man

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle := \frac{X^n!}{X^k! X^{n-k}!} = \frac{1-X^n}{1-X^k} \cdots \frac{1-X^{n-k+1}}{1-X} \in \mathbb{C}[[X]]$$

Gaußschen Binomialkoeffizienten. Für $k < 0$ oder $k > n$ sei $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle := 0$.

Bemerkung 4.35. Wie immer ist $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\rangle = 1$ und $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ n-k \end{smallmatrix} \right\rangle$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}$. Außerdem gilt $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\rangle = \frac{1-X^n}{1-X} = 1 + X + \dots + X^{n-1}$ und

$$\left\langle \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle = \frac{(1-X^4)(1-X^3)}{(1-X^2)(1-X)} = (1+X^2)\frac{1-X^3}{1-X} = (1+X^2)(1+X+X^2) = 1 + X + 2X^2 + X^3 + X^4.$$

Das nächste Lemma zeigt induktiv, dass $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle$ stets ein Polynom ist.

Lemma 4.36. *Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle = X^k \left\langle {n \atop k} \right\rangle + \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle = \left\langle {n \atop k} \right\rangle + X^{n+1-k} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle.$$

Beweis. Für $k > n+1$ oder $k < 0$ sind alle Terme 0. Für $k = n+1$ oder $k = 0$ sind beide Seiten 1. Für $1 \le k \le n$ gilt

$$\begin{aligned} X^k \left\langle {n \atop k} \right\rangle + \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle &= \Big(X^k \frac{1 - X^{n-k+1}}{1 - X^k} + 1 \Big) \frac{X^n!}{X^{k-1}! X^{n-k+1}!} = \frac{1 - X^{n+1}}{1 - X^k} \frac{X^n!}{X^{k-1}! X^{n+1-k}!} \\ &= \left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle = \left\langle {n+1 \atop n+1-k} \right\rangle = X^{n+1-k} \left\langle {n \atop n+1-k} \right\rangle + \left\langle {n \atop n-k} \right\rangle \\ &= \left\langle {n \atop k} \right\rangle + X^{n+1-k} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.37. Man vergleiche die Rekursionsformeln[9]

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k} &\overset{1.5}{=} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \\ \left(\!\binom{n+1}{k}\!\right) &\overset{1.24}{=} \left(\!\binom{n+1}{k-1}\!\right) + \left(\!\binom{n}{k}\!\right), \\ \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} &\overset{2.16}{=} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \\ \left\{ {n+1 \atop k} \right\} &\overset{2.30}{=} \left\{ {n \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n \atop k} \right\}, \\ \left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle &\overset{4.36}{=} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle + X^k \left\langle {n \atop k} \right\rangle. \end{aligned}$$

Man kann also $\binom{n}{k}\!\!\binom{}{}$, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, $\left\{ {n \atop k} \right\}$ und $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ mit einem modifizierten pascalschen Dreieck berechnen.

Satz 4.38 (Gaussscher Binomialsatz)**.** *Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in \mathbb{C}[[X]]$ gilt*

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n-1} (1 + \alpha X^k) = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \alpha^k X^{\binom{k}{2}}.}$$

Beweis. Induktion nach n: Für $n = 0$ sind beide Seiten 1. Für $n \ge 1$ gilt

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n} (1 + \alpha X^k) &= (1 + \alpha X^n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \alpha^k X^{\binom{k}{2}} \\ &= \sum \left\langle {n \atop k} \right\rangle \alpha^k X^{\binom{k}{2}} + \sum \left\langle {n \atop k} \right\rangle \alpha^{k+1} X^{n-k} \overbrace{X^{\binom{k}{2}+k}}^{\binom{k+1}{2}} \\ &= \sum \left\langle {n \atop k} \right\rangle \alpha^k X^{\binom{k}{2}} + \sum X^{n+1-k} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \alpha^k X^{\binom{k}{2}} \\ &\overset{4.36}{=} \sum \left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle \alpha^k X^{\binom{k}{2}}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.39. Es gibt auch eine Vandermonde-Identität für $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$.

[9] Alle Formeln lassen sich vereinheitlichen: [J. Konvalina, *A unified interpretation of the binomial coefficients, the Stirling numbers, and the Gaussian coefficients*, Amer. Math. Monthly 107, (2000), 901–910]

5 Erzeugende Funktionen

Definition 5.1. Die *erzeugende Funktion* einer Zahlenfolge $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C}$ ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]].$$

Diese scheinbar belanglose Umformulierung hat erstaunliche Konsequenzen.

Beispiel 5.2.

(i) Die erzeugende Funktion der konstanten Folge $1, 1, \ldots$ ist $(1-X)^{-1}$.

(ii) Ist $\alpha \in \mathbb{C}[[X]]$ die erzeugende Funktion von $a_0, a_1, \ldots$, so ist $\alpha(-X)$ die erzeugende Funktion von $a_0, -a_1, a_2, \ldots$.

(iii) Ist α die erzeugende Funktion von $a_0, a_1, \ldots$, so ist α' die erzeugende Funktion von $a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots$. Zum Beispiel ist $\left(\frac{1}{1-X}\right)' = \frac{1}{(1-X)^2}$ (Quotientenregel) die erzeugende Funktion von $1, 2, 3, \ldots$.

(iv) Die erzeugende Funktion der Binomialkoeffizienten ist $(1+X)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} X^k$.

(v) Jede k-elementige Multimenge $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ entspricht genau einer Zerlegung $k = k_1 + \ldots + k_n$, wobei $k_i \in \mathbb{N}_0$ die Vielfachheit von i in A angibt. Dies zeigt

$$\frac{1}{(1-X)^n} = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} X^k\Big)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}_0^n \\ k_1+\ldots+k_n=k}} 1 \Big) X^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\binom{n}{k} \right) X^k$$

für $n \in \mathbb{N}$ (vgl. Satz 4.32 und Aufgabe 12).

(vi) Die erzeugende Funktion der Stirling-Zahlen $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ ist durch Satz 2.17 gegeben:

$$X(X+1)\ldots(X+n-1) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^k.$$

(vii) Für die erzeugende Funktion $\alpha := \sum F_n X^n$ der Fibonacci-Folge (Beispiel 3.1) gilt

$$\alpha = X + \sum_{n=2}^{\infty} F_n X^n = X + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-2} + F_{n-1}) X^n = X + X^2\alpha + X\alpha.$$

Also ist

$$\alpha = \frac{X}{1 - X - X^2}.$$

Man kann damit einen alternativen Beweis der Binet-Formel führen (Aufgabe 20).

(viii) In Beispiel 4.21 haben wir die erzeugende Funktion α der Catalan-Zahlen C_n über die Gleichung $\alpha - \alpha^2 = X$ eingeführt. Mit der p-q-Formel für quadratische Gleichungen erhält man

$$\alpha = \frac{1}{2}\Big(1 - \sqrt{1-4X}\Big) \in \mathbb{C}[[X]]^\circ \tag{5.1}$$

(die zweite Lösung liegt nicht in $\mathbb{C}[[X]]^\circ$). Kontrolle:

$$\alpha - \alpha^2 = \frac{1}{2}\Big(1 - \sqrt{1-4X}\Big) - \frac{1}{4}\Big(1 - 2\sqrt{1-4X} + 1 - 4X\Big) = X.$$

Satz 5.3 (Catalan). *Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\boxed{C_{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.}$$

Beweis. Nach dem Newtonschen Binomialsatz ist

$$\sum C_n X^n \overset{(5.1)}{=} \frac{1}{2}\Big(1 - \sqrt{1-4X}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 - \sum \binom{1/2}{n}(-4)^n X^n\Big).$$

Ein Koeffizientenvergleich zeigt

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= (-1)^n \frac{1}{2}\binom{1/2}{n+1} 4^{n+1} = (-1)^n \frac{2^{n+1}}{2} \cdot \frac{2(1/2)\cdot 2(1/2-1)\cdot \ldots \cdot 2(1/2-n)}{(n+1)!} \\ &= \frac{2^n}{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!} = \frac{1}{n+1}\frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{n!}\cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!} \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

□

Satz 5.4. *Es gilt*

$$(i) \qquad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} p(n) X^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-X^k}} \qquad \text{(Euler)},$$

$$(ii) \qquad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b(n)}{n!} X^n = \exp(\exp(X)-1).}$$

Beweis.

(i) Wegen $(1-X^k)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(X^k)^n \in 1 + X^k\mathbb{C}[[X]]$ ist das unendliche Produkt wohldefiniert (Bemerkung 4.11). Die Partition $(1^{a_1}, \ldots, n^{a_n})$ von $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt $a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = n$. Daher ist $p(n)$ die Anzahl aller Tupel $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$ mit $a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = n$. Dies ist genau der n-te Koeffizient von

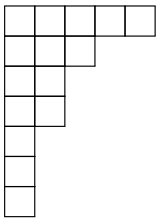
$$(1+X+X^2+X^3+\ldots)(1+X^2+X^{2\cdot 2}+X^{2\cdot 3}+\ldots)(1+X^3+X^{3\cdot 2}+X^{3\cdot 3}+\ldots)\ldots = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-X^k}.$$

(ii) Sei $\alpha := \exp(\exp(X)-1) = \sum \frac{a_n}{n!}X^n$. Dann ist $a_0 = \exp(\exp(0)-1) = \exp(0) = 1 = b(0)$. Die Kettenregel liefert

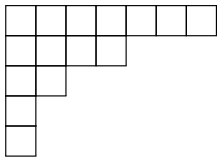
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} X^n = \alpha' &= \exp(X)\exp(\exp(X)-1) \\ &= \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}X^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}X^k\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!(n-k)!}X^n. \end{aligned}$$

Daher ist $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$ für $n \geq 0$ und die Behauptung folgt aus Satz 2.37. □

Bemerkung 5.5. Man kann Partitionen $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ (mit $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k$) von $n \in \mathbb{N}$ durch *Young-Diagramme* (auch *Ferrers-Diagramme* genannt) visualisieren. Zum Beispiel:

$(5, 3, 2^2, 1^3) =$ 

Durch Spiegelung an der Diagonalen erhält man das Young-Diagramm der *konjugierten* Partition $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_l)$ von n. Zum Beispiel:

$(5, 3, 2^2, 1^3)' =$  $= (7, 4, 2, 1^2)$

Im Allgemeinen gilt $\lambda'_i = |\{j : \lambda_j \geq i\}|$ für $i = 1, \ldots, l$. Außerdem ist $\lambda'' = \lambda$. Man nennt λ *symmetrisch*, falls $\lambda' = \lambda$.

Satz 5.6. *Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$.*

(i) (Euler) *Die Anzahl der Partitionen von n in ungleiche Teile ist gleich der Anzahl der Partitionen in ungerade Teile.*

(ii) Die Anzahl der Partitionen von n in k Teile ist gleich der Anzahl der Partitionen mit größtem Teil k.

(iii) (Sylvester) *Die Anzahl der symmetrischen Partitionen von n ist gleich der Anzahl der Partitionen in ungleiche, ungerade Teile.*

Beweis.

(i) Ist $u(n)$ die Anzahl der Partitionen in ungleiche Teile, so gilt

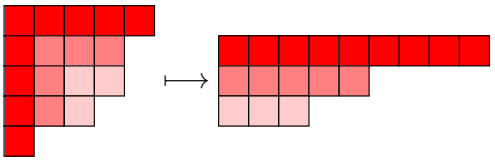
$$\begin{aligned}\sum u(n)X^n &= (1+X)(1+X^2)(1+X^3)\ldots = \frac{(1-X^2)(1-X^4)}{(1-X)(1-X^2)}\ldots \\ &= \frac{1}{(1-X)(1-X^3)(1-X^5)\ldots} \\ &= (1+X+X^2+\ldots)(1+X^3+X^6+\ldots)\ldots.\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite steht die erzeugende Funktion von der Anzahl der Partitionen in ungerade Teile.

(ii) Die Abbildung $\lambda \mapsto \lambda'$ liefert eine Bijektion zwischen den angegebenen Mengen.

(iii) Die folgende Abbildung liefert die gewünschte Bijektion:

$$\begin{aligned}\{\text{symmetrische Partitionen von } n\} &\longrightarrow \{\text{Partitionen in ungleiche, ungerade Teile}\}, \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) &\longmapsto (2\lambda_1 - 1, 2\lambda_2 - 3, 2\lambda_3 - 5, \ldots)\end{aligned}$$



□

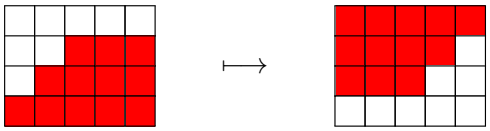
Beispiel 5.7. Für $n = 8$ erhält man

Partitionen in ungleiche Teile:	(8), $(7,1)$, $(6,2)$, $(5,3)$, $(5,2,1)$, $(4,3,1)$
Partitionen in ungerade Teile:	$(7,1)$, $(5,3)$, $(5,1^3)$, $(3^2,1^2)$, $(3,1^5)$, (1^8)
Partitionen in ungleiche, ungerade Teile:	$(7,1)$, $(5,3)$
Symmetrische Partitionen:	$(3^2,2)$, $(4,2,1^2)$
Partitionen in 4 Teile:	$(5,1^3)$, $(4,2,1^2)$, $(3^2,1^2)$, $(3,2^2,1)$, (2^4)
Partitionen mit größtem Teil 4:	(4^2), $(4,3,1)$, $(4,2^2)$, $(4,2,1^2)$, $(4,1^4)$

Bemerkung 5.8. Sei $p_k(n)$ die Anzahl der Partitionen von n in Teile $\leq k$ (nach Satz 5.6 ist dies auch die Anzahl der Partitionen in höchstens k Teile). Der Beweis von Satz 5.4 zeigt

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_k(n)X^n = (1 + X + X^2 + \ldots)(1 + X^2 + X^4 + \ldots)\ldots(1 + X^k + X^{2k} + \ldots) = \frac{1}{X^k!}.$$

Wir studieren nun die Anzahl $p_{k,l}(n) = p_{l,k}(n)$ der Partitionen von n mit höchstens k Teilen und jedem Teil $\leq l$. Dies sind genau die Partitionen, deren Young-Diagramm in ein Rechteck der Größe $k \times l$ passt. Der verbleibende Teil des Rechtecks um 180° gedreht ergibt eine Partition von $kl - n$ vom gleichen Format:



Dies zeigt $p_{k,l}(n) = p_{k,l}(kl - n)$.

Satz 5.9. *Für $k, l \geq 0$ gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{k,l}(n)X^n = \left\langle \begin{matrix} k+l \\ k \end{matrix} \right\rangle.$$

Beweis. Induktion nach $k + l$. Für $k = 0$ oder $l = 0$ sind beide Seiten gleich 1. Sei also $k, l \geq 1$. Sei $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \in P(n)$ mit höchstens k Teilen und jedem Teil $\leq l$. Ist $\lambda_1 = l$, so ist $(\lambda_2, \lambda_3, \ldots) \in P(n - l)$ mit höchstens $k - 1$ Teilen. Anderenfalls ist jeder Teil von λ höchstens $l - 1$. Dies zeigt $p_{k,l}(n) = p_{k,l-1}(n) + p_{k-1,l}(n - l)$. Für $P(k, l) := \sum p_{k,l}(n)X^n$ gilt daher

$$P(k, l) = P(k, l - 1) + X^l P(k - 1, l).$$

Die Behauptung folgt nun durch Induktion und Lemma 4.36. □

Bemerkung 5.10. Wegen $p_{k,l}(kl) = 1$ und $p_{k,l}(n) = 0$ für $n > kl$ ist $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle$ ein Polynom vom Grad $k(n - k)$ mit positiven Koeffizienten. Aus $p_{k,l}(n) = p_{k,l}(kl - n)$ folgt außerdem, dass die Koeffizienten „symmetrisch“ sind. Setzt man $X = 1$ in Satz 5.9, so erhält man auf der linken Seite die Anzahl der Partitionen, die in das $k \times l$-Rechteck passen. Die rechte Seite wird für $X = 1$ zum gewöhnlichen Binomialkoeffizienten, denn

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = \frac{\frac{1-X^n}{1-X} \cdots \frac{1-X^{n-k+1}}{1-X}}{\frac{1-X^k}{1-X} \cdots \frac{1-X}{1-X}} = \frac{(1 + X + \ldots + X^{n-1})\ldots(1 + \ldots + X^{n-k})}{(1 + \ldots + X^{k-1})\ldots 1}.$$

Der Gaußsche Binomialsatz wird für $X = 1$ also zum gewöhnlichen Binomialsatz.

Beispiel 5.11.

$$\left\langle {5 \atop 2} \right\rangle = p_{2,3}(0) + \ldots + p_{2,3}(6)X^6 = 1 + X + 2X^2 + 2X^3 + 2X^4 + X^5 + X^6.$$

Satz 5.12 (Erdős-Turán)**.** *Seien $n, d \in \mathbb{N}$. Die Anzahl der Permutationen von S_n, deren Zyklenlängen nicht durch d teilbar sind, ist*

$$n! \prod_{k=1}^{\lfloor n/d \rfloor} \frac{kd-1}{kd}.$$

Beweis (Pólya). Die Anzahl der Permutationen vom Typ $(1^{l_1}, \ldots, n^{l_n})$ ist

$$\frac{n!}{1^{l_1} \ldots n^{l_n} l_1! \ldots l_n!}$$

nach Satz 2.25. Die gesuchte Anzahl, geteilt durch $n!$, ist daher der Koeffizient von X^n in

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{k=1 \\ d \nmid k}}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \Big(\frac{X^k}{k}\Big)^l &= \prod_{d \nmid k} \exp(X^k/k) \overset{4.18}{=} \exp\Big(\sum_{d \nmid k} \frac{X^k}{k}\Big) = \exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^k}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^{dk}}{dk}\Big) \\
&= \exp(-\log(1-X) + \frac{1}{d}\log(1-X^d)) \overset{4.28}{=} \frac{1}{1-X} \sqrt[d]{1-X^d} \\
&= \frac{1-X^d}{1-X}(1-X^d)^{\frac{1-d}{d}} \overset{4.32}{=} \Big(\sum_{r=0}^{d-1} X^r\Big)\Big(\sum_{q=0}^{\infty} \binom{(1-d)/d}{q} (-X^d)^q\Big).
\end{aligned}$$

Darin tritt X^n genau dann auf, wenn $n = qd + r$ mit $0 \leq r < d$ und $q = \lfloor n/d \rfloor$ (Division mit Rest). Der Koeffizient ist dann

$$(-1)^q \binom{(1-d)/d}{q} = (-1)^q \prod_{k=1}^{q} \frac{\frac{1}{d} - k}{k} = \prod_{k=1}^{q} \frac{kd-1}{kd}. \qquad \square$$

Beispiel 5.13. Eine Permutation hat genau dann ungerade Ordnung, wenn sie nur aus Zyklen ungerader Länge besteht. Die Anzahl der Permutationen in S_n mit ungerader Ordnung ist daher

$$n! \prod_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2k-1}{2k} = \begin{cases} 1^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (n-1)^2 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 1^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (n-2)^2 \cdot n & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(vgl. Aufgabe 22). Speziell für $n = 5$ zählt man $4! = 24$ 5-Zyklen (Satz 2.10), $\frac{5!}{3 \cdot 2!} = 20$ Permutationen vom Zyklentyp $(3, 1^2)$ und die Identität. Also insgesamt $24 + 20 + 1 = 45 = 3^2 \cdot 5$.

Satz 5.14 (Eulers Pentagonalzahlensatz)**.**

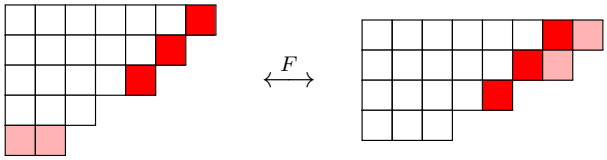
$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{\infty}(1-X^k) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \Big(X^{\frac{3k^2-k}{2}} + X^{\frac{3k^2+k}{2}}\Big) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k X^{\frac{3k^2+k}{2}} \\
&= 1 - X - X^2 + X^5 + X^7 - X^{12} - X^{15} + \ldots.
\end{aligned}$$

Beweis (Franklin). Sei $n \in \mathbb{N}$ und Λ_n die Menge der Partitionen von n in ungleiche Teile. Für $\lambda \in \Lambda_n$ sei $|\lambda|$ die Anzahl der Teile von λ. Der n-te Koeffizient von $(1-X)(1-X^2)\dots$ ist dann $\sum_{\lambda\in\Lambda_n}(-1)^{|\lambda|}$ (vgl. Beweis von Satz 5.6). Sei zunächst $n \neq (3k^2 \pm k)/2$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir konstruieren eine Permutation F auf Λ_n mit $|F(\lambda)| = |\lambda| \pm 1$ für alle $\lambda \in \Lambda_n$. Dann folgt

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_n}(-1)^{|\lambda|} = \sum_{\lambda\in\Lambda_n}(-1)^{|F(\lambda)|} = -\sum_{\lambda\in\Lambda_n}(-1)^{|\lambda|} = 0$$

wie gewünscht. Sei $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \in \Lambda_n$ mit $\lambda_1 > \dots > \lambda_l$ und $s := \max\{1 \le i \le l : \lambda_i = \lambda_1 - i + 1\}$. Wir definieren

$$F(\lambda) := \begin{cases} (\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_s - 1, \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_l, s) & \text{falls } s < \lambda_l, \\ (\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_{\lambda_l} + 1, \lambda_{\lambda_l+1}, \dots, \lambda_{l-1}) & \text{falls } s \ge \lambda_l. \end{cases}$$



Dies funktioniert nur in zwei Fällen nicht: Im ersten Fall ist $\lambda = (2k-1, 2k-2, \dots, k)$ und

$$n = \sum_{i=k}^{2k-1} i = \binom{2k}{2} - \binom{k}{2} = \frac{3k^2 - k}{2}.$$

Im zweiten Fall ist $\lambda = (2k, 2k-1, \dots, k+1)$ und

$$n = \sum_{i=k+1}^{2k} i = \binom{2k+1}{2} - \binom{k+1}{2} = \frac{3k^2 + k}{2}.$$

Beides war ausgeschlossen. Also ist F wohldefiniert und $|F(\lambda)| = |\lambda| \pm 1$ für alle $\lambda \in \Lambda_n$. Wegen $F^2 = \mathrm{id}$ ist F eine Permutation.

Ist nun $n = (3k^2 \pm k)/2$, so kann man F immer noch auf $\Lambda_n \setminus \{\mu\}$ definieren, wobei μ eine der beiden oben genannten Partitionen ist. Man erhält dann

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_n}(-1)^{|\lambda|} = (-1)^{|\mu|} + \sum_{\lambda\in\Lambda_n\setminus\{\mu\}}(-1)^{|F(\lambda)|} = (-1)^k - \sum_{\lambda\in\Lambda_n\setminus\{\mu\}}(-1)^{|\lambda|} = (-1)^k$$

wie gewünscht. □

Bemerkung 5.15. Aus den Sätzen 5.4 und 5.14 folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)X^n \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k X^{\frac{3k^2+k}{2}} = 1$$

und

$$\sum_{k=-n}^{n}(-1)^k p\Big(n - \frac{3k^2+k}{2}\Big) = 0$$

für $n \in \mathbb{N}$, wobei $p(k) := 0$ für $k < 0$. Man erhält eine Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} &p(0) = 1, \\ &p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + \dots \qquad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Beispiel 5.16. Es gilt

$$\begin{aligned}
p(1) &= p(0) = 1,\\
p(2) &= p(1) + p(0) = 2,\\
p(3) &= p(2) + p(1) = 3,\\
p(4) &= p(3) + p(2) = 3 + 2 = 5,\\
p(5) &= p(4) + p(3) - p(0) = 5 + 3 - 1 = 7,\\
p(6) &= p(5) + p(4) - p(1) = 7 + 5 - 1 = 11
\end{aligned}$$

(vgl. `https://oeis.org/A000041`).

Folgerung 5.17. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $p(n) \leq F_{n+1}$, wobei F_n die n-te Fibonacci-Zahl ist.*

Beweis. Da man aus jeder Partition von n durch Anfügen einer 1 eine Partition von $n+1$ herstellen kann, gilt $p(n) \leq p(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Aus Bemerkung 5.15 folgt daher $p(n) \leq p(n-1) + p(n-2)$. Wegen $p(0) = 1 = F_1$ und $p(1) = 1 = F_2$ erhält man induktiv $p(n) \leq F_{n+1}$. □

Bemerkung 5.18. Ramanujan hat

$$\begin{aligned}
5 \mid p(5n+4),\\
7 \mid p(7n+5),\\
11 \mid p(11n+6)
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen.[10]

6 Zählen bis auf Symmetrie

Bemerkung 6.1. Viele Zählprobleme vereinfachen sich, wenn man Symmetrien berücksichtigt. Symmetrien werden durch Gruppen modelliert. Wir wiederholen ein paar Fakten aus der Algebra.

Definition 6.2. Eine *Operation* einer Gruppe G auf einer Menge Ω ist eine Abbildung $G \times \Omega \to \Omega$, $(g, \omega) \mapsto {}^g\omega$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\forall \omega \in \Omega : {}^1\omega = \omega$,
- $\forall g, h \in G \, \forall \omega \in \Omega : {}^g({}^h\omega) = {}^{gh}\omega$.

Für $\omega \in \Omega$ nennt man ${}^G\omega := \{{}^g\omega : g \in G\} \subseteq \Omega$ die *Bahn* von ω und $G_\omega := \{g \in G : {}^g\omega = \omega\} \leq G$ den *Stabilisator* von ω in G. Existiert nur eine Bahn, so heißt die Operation *transitiv*. Man nennt $|{}^G\omega|$ die *Länge* der Bahn.

Beispiel 6.3.

(i) Für jede Menge A operiert $G := \mathrm{Sym}(A)$ auf A durch ${}^\sigma a := \sigma(a)$, denn $\mathrm{id}(a) = a$ und ${}^\sigma({}^\tau a) = \sigma(\tau(a)) = (\sigma\tau)(a) = {}^{\sigma\tau}a$ für $a \in A$ und $\sigma, \tau \in G$. Diese Operation ist transitiv, denn für verschiedene $a, b \in A$ liegt die Transposition (a, b) in G und ${}^{(a,b)}a = b$. Dies zeigt ${}^G a = A$ für alle $a \in A$. Die Länge eines Zyklus $\sigma \in \mathrm{Sym}(A)$ ist gleichzeitig die Länge einer Bahn von $\langle\sigma\rangle$.

[10] Ein Beweis der ersten beiden Aussagen steht in meinem Kombinatorik-Skript.

(ii) Für jeden K-Vektorraum V operiert $G := \mathrm{GL}(V)$ auf V durch ${}^f v := f(v)$ für $f \in \mathrm{GL}(V)$ und $v \in V$. Dies folgt aus (i) wegen $G \leq \mathrm{Sym}(V)$. Die Bahn des Nullvektors ist ${}^G 0 = \{0\}$. Insbesondere ist die Operation nur transitiv, falls $V = \{0\}$.

(iii) Sei $\Omega := \{1, \ldots, n\}$ die Menge der Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $n \geq 3$. Bei geeigneter Anordnung beschreibt der n-Zyklus $\sigma = (1, \ldots, n) \in S_n$ eine Drehung von Δ um den Winkel $2\pi/n$. Auf diese Weise operiert die zyklische Gruppe $\langle\sigma\rangle$ transitiv auf Ω. Die Permutation $\tau = (1, n)(2, n-1)\ldots \in S_n$ beschreibt eine Spiegelung von Δ (ist n ungerade, so verläuft die Spiegelachse durch den Fixpunkt $(n+1)/2$; ist n gerade, so hat τ keine Fixpunkte). Die Symmetrien σ und τ erzeugen gemeinsam die *Diedergruppe* $D_{2n} := \langle\sigma, \tau\rangle \leq S_n$. Bekanntlich besteht D_{2n} aus allen Produkten der Form $\sigma^{i_1}\tau^{i_2}\sigma^{i_3}\ldots$. Wegen $\sigma^n = \tau^2 = 1$ und $\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$ lässt sich jedes Element eindeutig in der Form $\sigma^i\tau^j$ mit $0 \leq i \leq n-1$ und $0 \leq j \leq 1$ schreiben. Dies zeigt $|D_{2n}| = 2n$.

Bemerkung 6.4.

(i) Für $g \in G$ ist die Abbildung $\omega \mapsto {}^g\omega$ eine Bijektion auf Ω mit Umkehrabbildung $\omega \mapsto {}^{g^{-1}}\omega$, denn ${}^g({}^{g^{-1}}\omega) = {}^{gg^{-1}}\omega = {}^1\omega = \omega = \ldots = {}^{g^{-1}}({}^g\omega)$. Daher bestimmt jedes g eine Permutation in $\mathrm{Sym}(\Omega)$.

(ii) Wir zeigen, dass

$$\alpha \sim \beta \ :\Longleftrightarrow\ \exists g \in G : {}^g\alpha = \beta$$

eine Äquivalenzrelation auf Ω definiert. Wegen ${}^1\alpha = \alpha$ ist $\sim$ reflexiv. Aus ${}^g\alpha = \beta$ folgt ${}^{g^{-1}}\beta = {}^{g^{-1}}({}^g\alpha) = {}^{g^{-1}g}\alpha = {}^1\alpha = \alpha$. Also ist $\sim$ symmetrisch. Sei schließlich ${}^g\alpha = \beta$ und ${}^h\beta = \gamma$ für $g, h \in G$ und $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega$. Dann ist ${}^{hg}\alpha = {}^h({}^g\alpha) = {}^h\beta = \gamma$. Daher ist $\sim$ transitiv und eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen sind genau die Bahnen. Insbesondere bilden die Bahnen eine Partition von Ω.

(iii) Sei $H \leq G$. Dann operiert H auf G durch ${}^h x := xh^{-1}$ für $h \in H$ und $x \in G$, denn ${}^1x = x1^{-1} = x$ und

$${}^g({}^h x) = {}^g(xh^{-1}) = (xh^{-1})g^{-1} = x(h^{-1}g^{-1}) = x(gh)^{-1} = {}^{gh}x$$

für $g, h \in H$. Die Bahnen sind die *Linksnebenklassen* $xH := \{xh : h \in H\}$ für $x \in G$. Sei $G/H := \{xH : x \in G\}$ und $|G : H| := |G/H|$ der *Index* von H in G. Für $x \in G$ ist die Abbildung $H \to xH$, $h \to xh$ bijektiv mit Umkehrabbildung $g \mapsto x^{-1}g$. Also haben alle Linksnebenklassen von H die Mächtigkeit $|H|$. Es folgt der Satz von *Lagrange* $\boxed{|G| = |G : H||H|.}$ Insbesondere sind $|H|$ und $|G : H|$ Teiler von $|G|$, falls $|G| < \infty$.

Satz 6.5 (Bahn-Stabilisator-Satz)**.** *Für jede Operation von G auf einer Menge Ω gilt*

$$\boxed{|{}^G\omega| = |G : G_\omega|}$$

für alle $\omega \in \Omega$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die Abbildung $F\colon G/G_\omega \to {}^G\omega$, $xG_\omega \mapsto {}^x\omega$ eine Bijektion ist. Wegen

$$xG_\omega = yG_\omega \iff y^{-1}x \in G_\omega \iff {}^{y^{-1}x}\omega = \omega \iff {}^y\omega = {}^y({}^{y^{-1}x}\omega) = {}^x\omega$$

für $x, y \in G$ ist F wohldefiniert und injektiv. Die Surjektivität folgt aus der Definition der Bahn. □

Bemerkung 6.6.

(i) Satz 6.5 und Lagrange zeigen, dass die Bahnenlängen stets Teiler der Gruppenordnung sind, falls $|G| < \infty$.

(ii) Ist Δ ein Repräsentantensystem für die Bahnen von G auf Ω, so erhält man die *Bahnengleichung*

$$\boxed{|\Omega| = \sum_{\delta\in\Delta} |{}^G\delta| = \sum_{\delta\in\Delta} |G : G_\delta|.}$$

(iii) Sei $|G| = 77$ und $|\Omega| = 23$. Nach der Bahnengleichung existieren $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ mit $23 = a + 7b + 11c$. Es folgt $a > 0$, d. h. G hat stets einen Fixpunkt auf Ω.

Satz 6.7 (Burnsides Lemma)**.** *Sei G eine endliche Gruppe, die auf einer Menge Ω operiert. Für $g \in G$ sei $f(g) := |\{\omega \in \Omega : g \in G_\omega\}|$ die Anzahl der Fixpunkte von g auf Ω. Dann ist*

$$\boxed{\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)}$$

die Anzahl der Bahnen von G auf Ω.

Beweis. Liegen $\alpha, \beta \in \Omega$ in der gleichen Bahn, so gilt $|G : G_\alpha| = |{}^G\alpha| = |{}^G\beta| = |G : G_\beta|$. Nach Lagrange folgt $|G_\alpha| = |G_\beta|$ (beachte: $|G| < \infty$). Sei $\Delta \subseteq \Omega$ ein Repräsentantensystem für die Bahnen von G auf Ω. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{g\in G} f(g) &= |\{(g,\omega) \in G \times \Omega : {}^g\omega = \omega\}| = \sum_{\omega\in\Omega} |G_\omega| = \sum_{\delta\in\Delta} |{}^G\delta||G_\delta| \\ &= \sum_{\delta\in\Delta} |G : G_\delta||G_\delta| = \sum_{\delta\in\Delta} |G| = |\Delta||G|.\end{aligned}$$

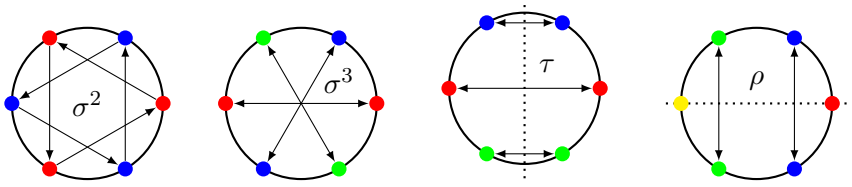
Dies zeigt die Behauptung. □

Beispiel 6.8.

(i) Sei G eine endliche Gruppe, die transitiv auf Ω mit $|\Omega| > 1$ operiert. Nach Burnsides Lemma ist 1 die durchschnittliche Anzahl an Fixpunkten von Elementen aus G. Andererseits gilt $f(1) = |\Omega| > 1$. Es muss daher stets fixpunktfreie Elemente in G geben. Dies verallgemeinert Satz 2.2.

(ii) Wir wollen Halsketten mit sechs Perlen zählen, wobei Perlen in drei Farben zur Verfügung stehen. Naiverweise gibt es zunächst 3^6 solche Halsketten, von denen jedoch einige identisch sind. Wir ordnen die Halskette so an, dass die Perlen ein regelmäßiges 6-Eck bilden. Rotation um $\pi/3$ wird die Halsketten nicht verändern. Ebenso können wir die Halskette im Raum drehen und dadurch eine Spiegelung der 6 Eckpunkte realisieren. Zwei Halsketten sind also genau dann identisch, wenn sie in der gleichen Bahn unter $G := D_{12}$ liegen. Wir wenden Burnsides Lemma auf die Menge Ω der 3^6 Halsketten an.

Sicher ist $f(1) = 3^6$. Eine Drehung $\sigma \in G$ um $\pi/3$ lässt nur die drei einfarbigen Halsketten fest, d. h. $f(\sigma) = 3$. Die Drehung σ^2 um $2\pi/3$ lässt die einfarbigen Halsketten und die Halsketten mit alternierenden Farben fest. Davon gibt es $f(\sigma^2) = 3^2$ Stück. Analog zeigt man $f(\sigma^3) = 3^3$. Außerdem ist $f(\sigma^4) = f(\sigma^{-2}) = 3^2$, $f(\sigma^5) = f(\sigma^{-1}) = 3$ sowie $\sigma^6 = 1$. Sei nun τ eine der drei Spiegelungen durch zwei Seitenmittelpunkte. Dann ist $f(\tau) = 3^3$. Sei schließlich ρ eine der drei Spiegelungen durch zwei Eckpunkte. Dann ist $f(\rho) = 3^4$.



Nach Burnsides Lemma gibt es

$$\frac{1}{12}\big(3^6 + 2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 3^3 + 3\cdot 3^3 + 3\cdot 3^4\big) = \frac{1}{4}\big(3^4(3+1) + 3^2(1+3) + 2 + 6\big)$$
$$= 81 + 9 + 2 = 92$$

verschiedene Halsketten.

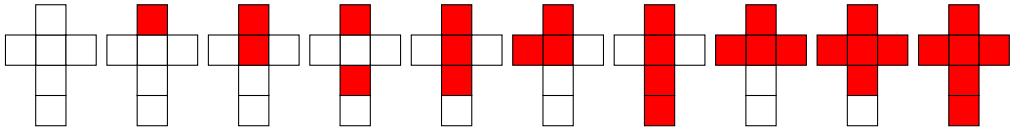
(iii) Auf wie viele Weisen kann man die sechs Flächen eines Würfels $W \subseteq \mathbb{R}^3$ färben, wenn n Farben zur Verfügung stehen? Naiv: n^6. Drehungen im Raum verändern W nicht wesentlich. Spiegelungen aber schon. Wir suchen daher die Anzahl der Bahnen unter der Drehgruppe von W.

Drehachse	Winkel	Anzahl Drehungen	Anzahl Fixpunkte
gegenüberliegende Seitenmittelpunkte	$0°$	1	n^6
gegenüberliegende Seitenmittelpunkte	$\pm 90°$	6	n^3
gegenüberliegende Seitenmittelpunkte	$180°$	3	n^4
gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	$180°$	6	n^3
Raumdiagonale	$\pm 120°$	8	n^2
		24	

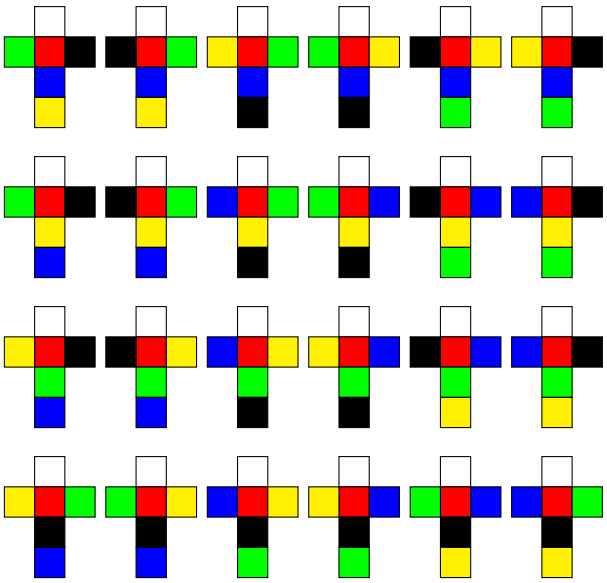
Nach Burnsides Lemma ist die Anzahl der gefärbten Würfel gegeben durch

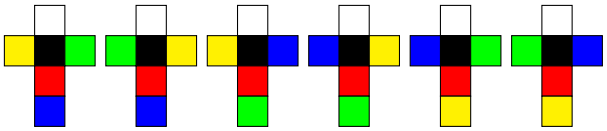
$$\frac{1}{24}\Big(n^6 + 6n^3 + 3n^4 + 6n^3 + 8n^2) = \frac{n^2}{24}\Big(n^4 + 3n^2 + 12n + 8\Big).$$

Für $n = 2$ erhält man folgende zehn Würfel:



Möchte man nur Würfel mit paarweise verschiedenen Seitenfarben, so hat man zunächst $n(n-1)\dots(n-5)$ Möglichkeiten (Variationen ohne Wiederholung). Da nun jede nicht-triviale Drehung fixpunktfrei ist, vereinfacht sich Burnsides Lemma zu $\frac{1}{24}n(n-1)\dots(n-5)$. Für $n = 6$ erhält man die 30 MacMahon-Würfel:





(iv) Es gibt

$$2^{27} \cdot 3^{14} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 = 43.252.003.274.489.856.000$$

Zustände des $3 \times 3 \times 3$-Zauberwürfels, von denen sich aber viele durch räumliche Drehung und Spiegelung ineinander überführen lassen. Mit Burnsides Lemma reduziert sich die Anzahl auf

$$901.083.404.981.813.616$$

wesentlich verschiedene Zustände.[11] Damit konnte man 2010 zeigen, dass sich jeder Zustand durch höchstens 20 „Züge“ lösen lässt (*god's number*, siehe `https://cube20.org/`).

(v) Mit Burnsides Lemma kann man auch zeigen, dass es

$$5.472.730.538$$

wesentlich verschiedene (ausgefüllte) 9×9-Sudokus gibt.[12]

Bemerkung 6.9. Im Folgenden verfeinern wir Burnsides Lemma, um zum Beispiel Halsketten mit bestimmtem *Wert* zu zählen (die Perlenfarben sollen dabei nicht mehr unbedingt gleichwertig sein). Dafür betrachten wir eine Operation von G auf Ω („Perlen“) und eine weitere endliche Menge Δ („Farben“). Dann operiert G auf $\Delta^\Omega = \{f \colon \Omega \to \Delta\}$ („Halsketten“) durch ${}^{(g}f)(\omega) := f({}^{g^{-1}}\omega)$ für $g \in G$, $\omega \in \Omega$ und $f \in \Delta^\Omega$, denn ${}^{(1}f)(\omega) = f(\omega)$ und

$$\big({}^{g}({}^{h}f)\big)(\omega) = ({}^{h}f)({}^{g^{-1}}\omega) = f\big({}^{h^{-1}}({}^{g^{-1}}\omega)\big) = f\big({}^{h^{-1}g^{-1}}\omega\big) = f\big({}^{(gh)^{-1}}\omega\big) = \big({}^{gh}f\big)(\omega)$$

für $g, h \in G$. Für eine Funktion $w \colon \Delta \to \mathbb{N}_0$ („Wert“) definieren wir $w(f) := \sum_{\alpha \in \Omega} w(f(\alpha))$, $w_i := |w^{-1}(i)|$ für $i \in \mathbb{N}_0$ und

$$W(X) := \sum_{i=0}^{\infty} w_i X^i \in \mathbb{C}[X].$$

Sei

$$(\Delta^\Omega)_k := \big\{f \in \Delta^\Omega : w(f) = k\big\}$$

(„Halsketten vom Wert k“). Wegen

$$w({}^{g}f) = \sum_{\alpha \in \Omega} w\big(({}^{g}f)(\alpha)\big) = \sum_{\alpha \in \Omega} w\big(f({}^{g^{-1}}\alpha)\big) = \sum_{\alpha \in \Omega} w(f(\alpha)) = w(f)$$

für $g \in G$ operiert G auch auf $(\Delta^\Omega)_k$. Schließlich sei $(1^{z_1(g)}, 2^{z_2(g)}, \ldots)$ der Zyklentyp von g als Element von $\mathrm{Sym}(\Omega)$ (vgl. Satz 2.25).

Satz 6.10 (Pólya)**.** *Mit den Bezeichnungen aus Bemerkung 6.9 ist die Anzahl der Bahnen von G auf $(\Delta^\Omega)_k$ der Koeffizient von X^k in*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{i=1}^{\infty} W(X^i)^{z_i(g)}. \tag{6.1}$$

[11] siehe [Sambale, Endliche Permutationsgruppen, Springer, 2017]
[12] siehe [Russell-Jarvis, Mathematics of Sudoku II, Mathematical Spectrum 39 (2006), 54–58]

Beweis. Sei $f_k(g)$ die Anzahl der Fixpunkte von $g \in G$ auf $(\Delta^\Omega)_k$. Nach Burnsides Lemma müssen wir zeigen, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f_k(g)\Big)X^k = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{k=0}^{\infty} f_k(g)X^k$$

mit (6.1) übereinstimmt. Es genügt also

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(g)X^k = \prod_{i=1}^{\infty} W(X^i)^{z_i(g)}$$

für $g \in G$ zu beweisen. Seien $\Delta_1, \ldots, \Delta_s \subseteq \Omega$ die Bahnen von g mit Längen $l_1, \ldots, l_s$. Dann sind $l_1, \ldots, l_s$ auch die Zyklenlängen von g und es folgt

$$\prod_{i=1}^{\infty} W(X^i)^{z_i(g)} = \prod_{i=1}^{s}(w_0 + w_1X^{l_i} + w_2X^{2l_i} + \ldots) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_s)\in\mathbb{N}_0^s\\ k_1l_1+\ldots+k_sl_s=k}} w_{k_1}\ldots w_{k_s}X^k.$$

Also müssen wir

$$f_k(g) = \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_s)\in\mathbb{N}_0^s\\ k_1l_1+\ldots+k_sl_s=k}} w_{k_1}\ldots w_{k_s}$$

nachweisen. Jeder Fixpunkt $f \in (\Delta^\Omega)_k$ von g ist auf Δ_i für jedes i konstant. Für die Wahl von $f(\delta)$ mit $w(f(\delta)) = k_i$ gibt es w_{k_i} Möglichkeiten. Dabei gilt

$$k = w(f) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{\delta\in\Delta_i} w(f(\delta)) = k_1l_1 + \ldots + k_sl_s.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Beispiel 6.11.

(i) Wir betrachten noch einmal die Halsketten mit sechs Perlen aus drei Farben (rot, blau und grün). Die roten Perlen seien 3 € wert, die blauen 2 € und die grünen 1 €. Wie viele Halsketten im Wert von 12 € kann man herstellen? Sei $\Omega := \{1, \ldots, 6\}$, $\Delta := \{r, b, g\}$ und $w(r) := 3$, $w(b) := 2$ und $w(g) := 1$. Dann ist $W(X) = X + X^2 + X^3$ und wir suchen die Anzahl der Bahnen von $G := D_{12}$ auf $(\Delta^\Omega)_{12}$. Das triviale Element von G hat Zyklentyp (1^6). Die Rotation σ um $\pi/3$ hat Zyklentyp (6^1). Analog erhält man $z_3(\sigma^2) = 2 = z_3(\sigma^4)$ und $z_2(\sigma^3) = 3$. Für die Spiegelungen $\tau \in G$ durch Seitenmittelpunkte ist $z_2(\tau) = 3$ und die verbleibenden drei Spiegelungen durch Eckpunkte haben Zyklentyp $(1^2, 2^2)$. Gleichung (6.1) hat nun die Form

$$\begin{aligned}\frac{1}{12}\Big(W(X)^6 + 2W(X^6) + 2W(X^3)^2 + W(X^2)^3 + 3W(X^2)^3 + 3W(X)^2W(X^2)^2\Big)\\ = \ldots = X^{18} + X^{17} + 4X^{16} + 6X^{15} + 12X^{14} + 13X^{13}\\ +18X^{12} + 13X^{11} + 12X^{10} + 6X^9 + 4X^8 + X^7 + X^6\end{aligned}$$

Es gibt also 18 Halsketten im Wert von 12 €.

(ii) Pólya hat mit Satz 6.10 die Anzahl von Isomeren von Alkoholen und Paraffinen bestimmt.

Graphentheorie

Bemerkung. Graphentheorie könnte man als Diskretisierung von Geometrie beschreiben. Im Gegensatz zur Geometrie interessieren wir uns nicht für Winkel, Flächeninhalte oder Krümmungsverhalten, sondern nur für die Relationen, in denen Objekte miteinander stehen (benachbart, verbunden u. ä.).

1 Eulersche Touren und Hamiltonsche Kreise

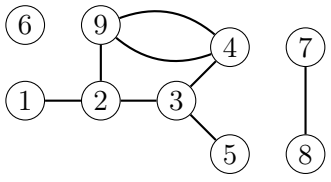
Definition 1.1.

- Ein *(Multi)graph* $\Omega = (\Omega_E, \Omega_K)$ besteht aus einer endlichen nichtleeren Menge Ω_E von *Ecken* und einer (Multi)menge $\Omega_K \subseteq \binom{\Omega_E}{2}$ von *Kanten*.[1] Ist Ω_K eine Menge, so nennt man Ω *einfach*.
- Ecken $\alpha, \beta \in \Omega_E$ heißen *benachbart*, wenn $\{\alpha, \beta\} \in \Omega_K$. Allgemeiner nennt man Ecken $\alpha, \beta \in \Omega_E$ *verbunden*, falls ein *Weg* $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_m = \beta \in \Omega_E$ mit $\{\alpha_i, \alpha_{i+1}\} \in \Omega_K$ für $i = 1, \ldots, m-1$ existiert ($m-1$ ist die *Länge* des Wegs). Dies beschreibt eine Partition auf Ω_E, deren Teile man *(Zusammenhangs)komponenten* von Ω nennt.
- Gibt es nur eine Komponente, so heißt Ω *zusammenhängend* und anderenfalls *unzusammenhängend*.

Bemerkung 1.2. Wie üblich werden wir Multigraphen durch Diagramme veranschaulichen. Auf dem Computer lassen sich Graphen als DOT-Datei beschreiben und mittels Graphviz visualisieren.

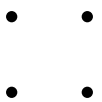
Beispiel 1.3.

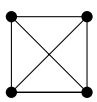
(i) Der folgende Multigraph Ω hat Eckenmenge $\Omega_E = \{1, \ldots, 9\}$.



Zwischen 4 und 9 liegt eine doppelte Kante (wir sagen auch Mehrfachkanten dazu). Also ist Ω nicht einfach. Die Ecken 1 und 5 sind verbunden, aber nicht benachbart. Die Komponenten von Ω sind $\{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $\{6\}$ und $\{7, 8\}$.

(ii) Der *triviale* Graph $\mathcal{T}_n := \left(\{1, \ldots, n\}, \varnothing\right)$ ohne Kanten und der *vollständige* Graph $\mathcal{V}_n := \left(\{1, \ldots, n\}, \binom{\{1,\ldots,n\}}{2}\right)$ mit jeweils $n \geq 1$ Ecken.[2]

$\mathcal{T}_4$: 

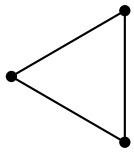
$\mathcal{V}_4$: 

[1] Im Gegensatz zu vielen Büchern lassen wir keine *Schleifen* zu, also Kanten der Form $\{\omega, \omega\}$.
[2] In der Literatur wird der vollständige Graph meist mit K_n bezeichnet.

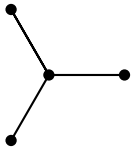
(iii) Eine *Gerade* $\mathcal{G}_n := \big(\{1,\dots,n\}, \{\{i,i+1\} : i = 1,\dots,n-1\}\big)$ mit $n \geq 2$ Ecken.

$\mathcal{G}_5$:

(iv) Ein *Kreis* $\mathcal{K}_n := \big(\{1,\dots,n\}, \{\{i,i+1\} : i = 1,\dots,n-1\} \cup \{\{1,n\}\}\big)$ mit $n \geq 3$ Ecken (wir sagen auch *n-Eck*, um die Anzahl der Ecken zu betonen).

$\mathcal{K}_3 = \mathcal{V}_3$: 

(v) Ein *Stern* $\mathcal{S}_n := (\{1,\dots,n\}, \{\{i,n\} : i = 1,\dots,n-1\})$ mit $n \geq 4$ Ecken.

$\mathcal{S}_4$: 

(vi) Für jeden (einfachen) Graphen Ω existiert der *komplementäre* Graph $\Omega^C = (\Omega_E, \binom{\Omega_E}{2} \setminus \Omega_K)$. Offenbar ist $\mathcal{T}_n = \mathcal{V}_n^C$.

Ω : 

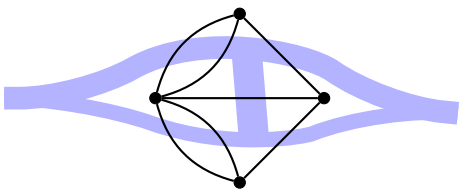
Ω^C : 

(vii) Für Multigraphen Ω und Δ ist auch die (*disjunkte*) *Vereinigung* $\Omega \sqcup \Delta := (\Omega_E \sqcup \Delta_E, \Omega_K \sqcup \Delta_K)$ ein Graph mit $|\Omega \sqcup \Delta| = |\Omega| + |\Delta|$. Offenbar ist jeder Multigraph die Vereinigung seiner Komponenten.

(viii) Für Induktionszwecke werden wir oft Ecken oder Kanten eines Multigraphen Ω entfernen. Beim Entfernen von Ecken werden auch die anliegenden Kanten entfernt. Konkret definieren wir

$$\Omega \setminus \Delta := \begin{cases} (\Omega_E, \Omega_K \setminus \Delta) & \text{falls } \Delta \subseteq \Omega_K, \\ (\Omega_E \setminus \Delta, \Omega_K \cap \binom{\Omega_E \setminus \Delta}{2}) & \text{falls } \Delta \subseteq \Omega_E. \end{cases}$$

Bemerkung 1.4 (Königsberger Brückenproblem)**.** Folgende von Euler beantwortete Frage ist die Geburtsstunde der Graphentheorie: Königsberg wurde damals durch sieben Brücken über die Pregel unterteilt; etwa so:



Ist es möglich, eine Stadtführung zu organisieren, bei der jede der Brücken genau einmal überquert wird?

Definition 1.5. Sei Ω ein Multigraph.

- Der *Grad* $\deg(\alpha)$ einer Ecke $\alpha \in \Omega_E$ ist die Anzahl der Kanten (gezählt mit Vielfachheiten), die α enthalten. Haben alle Ecken denselben Grad k, so heißt Ω *k-regulär*.

- Ein Weg $w = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Omega_E^n$ heißt *geschlossen*, falls $\alpha_1 = \alpha_n$ (Start = Ziel). Ein geschlossener Weg w heißt *eulersche Tour*, falls w jede Kante von Ω_K genau einmal benutzt, d. h. die Multimengen $\{\{\alpha_1, \alpha_2\}, \ldots, \{\alpha_{n-1}, \alpha_n\}\}$ und Ω_K sind gleich (Ecken dürfen beliebig oft in w auftreten).
- Man nennt Ω *eulersch*, falls Ω eine eulersche Tour besitzt.

Lemma 1.6 (Handschlaglemma)**.** *Für jeden Multigraphen Ω gilt $\sum_{\alpha \in \Omega_E} \deg(\alpha) = 2|\Omega_K|$. Insbesondere ist die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad gerade.*

Beweis. Jede Kante $\{\alpha, \beta\}$ liefert einen Beitrag zu $\deg(\alpha)$ und einen Beitrag zu $\deg(\beta)$. Dies zeigt die Formel. Die zweite Aussage folgt aus

$$|\{\alpha \in \Omega_E : \deg(\alpha) \text{ ungerade}\}| \equiv \sum_{\alpha \in \Omega_E} \deg(\alpha) \equiv 2|\Omega_K| \equiv 0 \pmod 2. \qquad \square$$

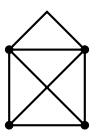
Bemerkung 1.7. Ein unzusammenhängender Multigraph Ω ist genau dann eulersch, wenn er eine eulersche Komponente Δ besitzt mit $\Omega = \Delta \sqcup \mathcal{T}_n$ für ein $n \geq 1$ (denn jede eulersche Tour findet innerhalb einer Komponente statt). Wir können uns daher auf zusammenhängende Multigraphen konzentrieren.

Satz 1.8 (Euler-Hierholzer)**.** *Ein zusammenhängender Multigraph ist genau dann eulersch, wenn alle Ecken geraden Grad haben.*

Beweis. Sei $w = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine eulersche Tour in Ω. Angenommen α_1 wird k-mal auf w besucht. Da w geschlossen ist, „verbraucht“ man dafür $2k$ verschiedene Kanten (je eine für „Ankunft“ und „Abfahrt“). Da auf diese Weise alle Kanten an α_1 benutzt werden müssen, ist $\deg(\alpha_1) = 2k$ eine gerade Zahl. Nun ist offenbar auch $(\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_2)$ eine eulersche Tour und $\deg(\alpha_2)$ muss gerade sein usw.

Seien nun $\deg(\alpha)$ gerade für alle $\alpha \in \Omega_E$. Sei $w = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ein möglichst langer Weg in Ω, bei dem jede Kante höchstens einmal benutzt wird. Da man w nicht verlängern kann, wurden alle Kanten an α_n benutzt. Wird α_n zwischendurch besucht, d. h. $\alpha_n = \alpha_i$ für $1 < i < n$, so verbraucht man dabei zwei Kanten von α_n. Da $\deg(\alpha_n)$ gerade ist, muss $\alpha_1 = \alpha_n$ gelten, d. h. w ist geschlossen. Nehmen wir an, dass w keine eulersche Tour ist. Dann wurde mindestens eine Kante, sagen wir $\{\alpha, \beta\}$, nicht in w benutzt. Da Ω zusammenhängend ist, können wir diese Kante so wählen, dass α zu w gehört, o. B. d. A. $\alpha = \alpha_n$. Dies widerspricht aber der Feststellung, dass bereits alle Kanten an α_n verbraucht wurden. Also ist w eine eulersche Tour und Ω ist eulersch. $\square$

Beispiel 1.9. Das Königsberger Brückenproblem ist unlösbar, da hier alle Ecken ungeraden Grad haben. Selbst wenn man auf die Geschlossenheit der eulerschen Tour verzichtet, kann es keine Lösung geben, denn dafür dürften höchstens zwei Ecken ungeraden Grad haben (nämlich Start- und Zielecke; verbindet man diese Ecken mit einer zusätzlichen Kante, so erhält man eine eulersche Tour). Aus diesem Grund lässt sich andererseits das *Haus vom Nikolaus* zeichnen ohne Absetzen des Stifts und ohne Kanten doppelt zu ziehen:



Die beiden unteren Ecken mit ungeradem Grad dienen als Start- und Zielecke.

Definition 1.10. Sei Ω ein Multigraph.

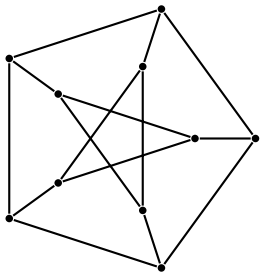
- Ein geschlossener Weg der Länge ≥ 3 heißt *Kreis*, falls er jede Ecke höchstens einmal besucht (offenbar wird dann auch jede Kante höchstens einmal besucht). Die entsprechenden Ecken bilden also einen $\mathcal{K}_n$.
- Ein Kreis heißt *hamiltonsch*, falls er jede Ecke von Ω (genau) einmal besucht. Man nennt Ω *hamiltonsch*, falls Ω einen hamiltonschen Kreis besitzt.

Bemerkung 1.11. Da bei Kreisen jede Kante höchstens einmal benutzt wird, hängt die Existenz von Kreisen nicht von möglichen Mehrfachkanten ab. Bei der Frage, ob ein Graph hamiltonsch ist, kann man sich daher auf einfache zusammenhängende Graphen beschränken.

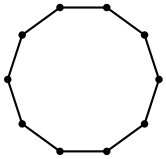
Beispiel 1.12.

(i) Selbstverständlich ist der Kreisgraph $\mathcal{K}_n$ hamiltonsch und ebenso der vollständige Graph $\mathcal{V}_n$ für $n \geq 3$, denn er „enthält“ $\mathcal{K}_n$. Andererseits können $\mathcal{G}_n$ und $\mathcal{S}_n$ nicht hamiltonsch sein, denn sie besitzen überhaupt keine Kreise.

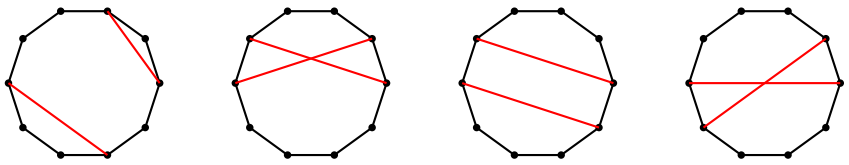
(ii) Wir betrachten den zusammenhängenden, 3-regulären *Petersen-Graph* Ω:



Angenommen Ω besitzt einen hamiltonschen Kreis. Durch Umformen hat dieser die Form



Im „Inneren“ des Kreises verlaufen fünf weitere Kanten, denn Ω besitzt insgesamt 15 Kanten ($2|\Omega_K| = \sum \deg(\alpha) = 3 \cdot 10$). Da jede Ecke Grad 3 hat, sind die inneren Kanten paarweise disjunkt. Durch diese Bedingung entsteht immer ein Dreieck oder Viereck:



Man prüft aber leicht, dass Ω weder Dreiecke noch Vierecke besitzt. Also ist Ω nicht hamiltonsch.

(iii) (Springerproblem) Ein Springer (auch Pferd genannt) steht als einzige Figur auf einem Schachbrett. Kann der Springer durch hintereinander folgende Züge jedes der 64 Felder genau einmal besuchen und anschließend wieder auf seinem Startfeld landen? Gesucht ist also ein hamiltonscher Kreis in einem Graphen mit 64 Ecken.

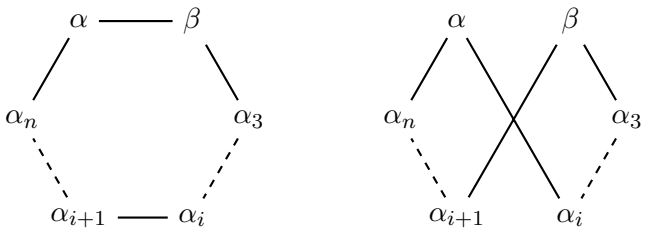
(iv) (Problem des Handelsreisenden) Ein Geschäftsmann möchte 10 Städte besuchen. Durch Verkehrshindernisse (Gebirge, Seen, Grenzen, ...) gibt es nicht zwischen allen Städten eine direkte Verbindung. Gibt es eine Route, bei der der Geschäftsmann jede Stadt genau einmal besucht und schließlich zum Heimatort zurückfindet? Noch schwieriger wird es, wenn man die Reisezeit (oder den Kraftstoffverbrauch) minimieren möchte. Man muss dann den Kanten des Graphen Gewichte zuweisen.

Satz 1.13 (Ore)**.** *Sei Ω ein Graph mit mindestens drei Ecken. Für je zwei verschiedene Ecken $\alpha, \beta \in \Omega_E$ gelte $\{\alpha, \beta\} \in \Omega_K$ oder $\deg(\alpha) + \deg(\beta) \geq |\Omega_E|$. Dann ist Ω hamiltonsch.*

Beweis. Sei Ω ein Gegenbeispiel mit möglichst vielen Kanten, d. h. nach Hinzufügen einer beliebigen Kante sei Ω kein Gegenbeispiel mehr. Da der vollständige Graph hamiltonsch ist, existieren verschiedene $\alpha, \beta \in \Omega_E$ mit $\{\alpha, \beta\} \notin \Omega_K$, also $\deg(\alpha) + \deg(\beta) \geq |\Omega_E|$. Der Graph $\Omega' := (\Omega_E, \Omega_K \cup \{\{\alpha, \beta\}\})$ erfüllt ebenfalls die Voraussetzung und muss nach unserer Annahme hamiltonsch sein. Es gibt außerdem einen hamiltonschen Kreis $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_1)$, der die Kante $\{\alpha, \beta\}$ benutzt, o. B. d. A. $\alpha_1 = \alpha$ und $\alpha_2 = \beta$. Sei S_α die Menge der Nachbarn von α in Ω und sei

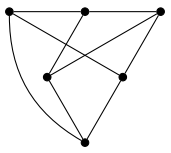
$$S_\beta := \{\alpha_i : i < n, \{\alpha_{i+1}, \beta\} \in \Omega_K\}.$$

Dann ist $\alpha \notin S_\alpha \cup S_\beta$ und daher $|S_\alpha \cup S_\beta| < |\Omega_E| = n$. Wegen $\{\alpha, \beta\} \notin \Omega_K$ hat jeder Nachbar von β die Form α_{i+1} mit $i < n$. Dies zeigt $|S_\alpha| + |S_\beta| = \deg(\alpha) + \deg(\beta) \geq n$. Also existiert $\alpha_i \in S_\alpha \cap S_\beta$. Dann wäre aber $(\alpha, \alpha_i, \alpha_{i-1}, \ldots, \underbrace{\alpha_2}_{=\beta}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n, \alpha)$ ein hamiltonscher Kreis in Ω.



□

Beispiel 1.14. Der Graph Ω



hat sechs Ecken und ist 3-regulär. Nach Ore ist Ω hamiltonsch.

Bemerkung 1.15.

(i) Der Kreisgraph $\mathcal{K}_5$ zeigt, dass die Umkehrung vom Satz von Ore falsch ist. Im Gegensatz zu eulerschen Touren ist es schwer zu entscheiden, wann ein Graph hamiltonsch ist. Diese Frage ist sogar NP-vollständig, d. h. sie ist genauso schwer wie eine Reihe bekannter Probleme. Die Entdeckung eines Algorithmus mit polynomialer Laufzeit würde das Millenniumsproblem „P = NP“ lösen, wofür ein Preisgeld von einer Million Dollar ausgeschrieben ist.

(ii) Für das Springerproblem findet man explizite Lösungen bei Wikipedia, aber keine abstrakte mathematische Begründung, warum eine Lösung existieren muss (die Bedingung von Ore ist nicht erfüllt).

Definition 1.16. Sei Ω ein Multigraph mit $\Omega_E = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Sei a_{ij} die Anzahl der Kanten $\{\alpha_i, \alpha_j\} \in \Omega_K$. Man nennt $A(\Omega) := (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die *Adjazenzmatrix* von Ω.

Satz 1.17. *Sei Ω ein einfacher Graph mit $\Omega_E = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Die Anzahl der Wege der Länge l von α_i nach α_j ist gleich dem Eintrag von $A(\Omega)^l$ an Position (i, j).*

Beweis. Die Wege der Länge $l = 1$ entsprechen genau den Kanten $\{\alpha_i, \alpha_j\} \in \Omega_K$. Daher gilt die Aussage für $l = 1$. Sei nun $l \geq 2$ und $A(\Omega)^{l-1} = (b_{st})$. Durch Induktion nach l können wir annehmen, dass b_{it} die Anzahl der Wege der Länge $l-1$ von α_i nach α_t ist. Jeder solche Weg lässt sich auf a_{tj} verschiedene Weisen nach α_j fortsetzen. Daher ist $\sum_{t=1}^{n} b_{it}a_{tj}$ die Anzahl der Wege der Länge l von α_i nach α_j. Dies ist auch der Eintrag von $A(\Omega)^{l-1}A(\Omega) = A(\Omega)^l$ an Position (i, j). □

Beispiel 1.18. Sei $v := (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $vv^{\mathrm{t}} = n$ und $J := v^{\mathrm{t}}v \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Matrix, die nur Einsen enthält. Für $k \geq 1$ ist $J^k = (v^{\mathrm{t}}v)^k = v^{\mathrm{t}}vv^{\mathrm{t}} \ldots v = n^{k-1}J$. Für den vollständigen Graphen gilt $A := A(\mathcal{V}_n) = J - 1_n$. Da J mit 1_n vertauschbar ist, lässt sich die binomische Formel anwenden:

$$\begin{aligned} A^l &= \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^{l-k} J^k = (-1)^l 1_n + J \sum_{k=1}^{l} (-1)^{l-k} \binom{l}{k} n^{k-1} \\ &= (-1)^l 1_n + \frac{1}{n}((n-1)^l - (-1)^l)J. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Wege der Länge l zwischen zwei Ecken α, β in $\mathcal{V}_n$ ist daher $\frac{1}{n}((n-1)^l - (-1)^l)$ falls $\alpha \neq \beta$ und $\frac{n-1}{n}((n-1)^{l-1} + (-1)^l)$ falls $\alpha = \beta$.

Bemerkung 1.19. Nach Konstruktion ist die Adjazenzmatrix $A(\Omega)$ reell und symmetrisch. Daher sind alle Eigenwerte reell und $A(\Omega)$ ist diagonalisierbar (Hauptachsentransformation).

Satz 1.20. *Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte (mit Vielfachheiten) der Adjazenzmatrix eines einfachen Graphen Ω. Dann ist $\lambda_1^l + \ldots + \lambda_n^l$ die Anzahl aller geschlossenen Wege der Länge l in Ω.*

Beweis. Sei $A := A(\Omega)$. Die Anzahl der (geschlossenen) Wege der Länge l von α_i nach α_i ist der Diagonaleintrag (i, i) von A^l nach Satz 1.17. Daher ist die Spur $\mathrm{tr}(A^l)$ die Anzahl aller geschlossenen Wege der Länge l. Sei $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit $SAS^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) =: D$. Dann ist

$$\mathrm{tr}(A^l) = \mathrm{tr}(S^{-1}D^lS) = \mathrm{tr}(D^lSS^{-1}) = \mathrm{tr}(D^l) = \lambda_1^l + \ldots + \lambda_n^l. \qquad \square$$

2 Nachbarn und Zusammenhang

Bemerkung 2.1. Angenommen auf einer Party haben je zwei Personen genau einen gemeinsamen Freund. Wir zeigen, dass es einen „Gastgeber“ geben muss, also eine Person, die mit allen befreundet ist.

Satz 2.2 (Freundschaft-Theorem)**.** *Sei Ω ein Graph, in dem je zwei verschiedene Ecken genau einen gemeinsamen Nachbarn haben. Dann existiert eine Ecke, die zu allen anderen Ecken benachbart ist.*

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an, d. h. jede Ecke ist zu mindestens einer anderen Ecke nicht benachbart. Aus der Voraussetzung folgt, dass Ω zusammenhängend ist. Wir zeigen zunächst, dass Ω regulär ist. Seien $\alpha, \beta \in \Omega_E$ verschieden und nicht benachbart. Seien $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ die Nachbarn von α. O. B. d. A. sei γ_2 der gemeinsame Nachbar von α und β und γ_1 sei der gemeinsame Nachbar von α und γ_2. Für $i = 2, \dots, d$ sei δ_i der gemeinsame Nachbar von β und γ_i. Im Fall $\delta_i = \gamma_1$ hätten α und β die beiden Nachbarn γ_1 und γ_2. Im Fall $\delta_i = \delta_j$ mit $i \neq j$ wären γ_i und γ_j zwei gemeinsame Nachbarn von δ_i und α. Also besitzt β mindestens die Nachbarn $\gamma_2, \delta_2, \dots, \delta_d$. Dies zeigt $\deg(\beta) \geq d$. Aus Symmetriegründen gilt auch $d \geq \deg(\beta)$. Jede Ecke, die nicht zu α benachbart ist, hat also Grad d. Da γ_i für $i \neq 2$ nicht zu β benachbart sind, gilt auch $\deg(\gamma_i) = d$ für $i \neq 2$. Schließlich existiert nach Voraussetzung eine Ecke ϵ, die nicht zu γ_2 benachbart ist. Aus $\deg(\epsilon) = d$ folgt $\deg(\gamma_2) = d$. Daher ist Ω d-regulär.

Insbesondere ist $\sum_{i=1}^{d} \deg(\gamma_i) = d^2$. In dieser Summe wird jedes $\beta \neq \alpha$ genau einmal gezählt, während α selbst genau d-mal gezählt wird. Es folgt $n = d^2 - d + 1$. Sei A die Adjazenzmatrix von Ω. Nach Voraussetzung besitzt jede Zeile von A genau d Einsen. Daher ist $v = (1, \dots, 1)$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert d. Aus Satz 1.17 ergibt sich

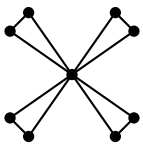
$$A^2 = \begin{pmatrix} d & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & d & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & d \end{pmatrix} = (d-1)1_n + J,$$

wobei $J = (1)_{i,j}$ wie in Beispiel 1.18. Die Eigenwerte von J sind n (mit Eigenvektor v) und 0 mit Vielfachheit $n - 1$ (da J Rang 1 hat). Daher sind $n + d - 1 = d^2$ und $d - 1$ die Eigenwerte von A^2 (mit den gleichen Eigenvektoren). Also besitzt A neben d noch Eigenwerte der Form $\pm\sqrt{d-1}$. Sagen wir, die Vielfachheit von $\sqrt{d-1}$ (bzw. $-\sqrt{d-1}$) ist r (bzw. s). Dann gilt $r + s = n - 1$. Bekanntlich (lineare Algebra) ist $0 = \operatorname{tr}(A) = d + r\sqrt{d-1} - s\sqrt{d-1}$, also $r \neq s$ und $\sqrt{d-1} = \frac{d}{s-r}$. Da das Quadrat einer gebrochenen rationalen Zahl keine ganze Zahl sein kann (betrachte Primfaktorzerlegung), muss $s - r$ ein Teiler von d sein, sagen wir $m := \sqrt{d-1} \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$1 \equiv m^2 + 1 = d = (s-r)m \equiv 0 \pmod{m}.$$

Dies zeigt $m \leq 1$, $d \leq 2$ und $n = d^2 - d + 1 \leq 3$. Es verbleiben nur die Möglichkeiten $\Omega \in \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_3\}$. Beide erfüllen aber die Behauptung. □

Beispiel 2.3. Die Graphen im Freundschaft-Theorem haben die Form von Windmühlen:



Satz 2.4 (Erdős-Gallai). *Für ganze Zahlen $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 0$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) Es existiert ein Graph mit n Ecken $e_1, \ldots, e_n$, sodass $\deg(e_i) = d_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt.

(2) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ ist gerade und für $k = 1, \ldots, n$ gilt

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{d_i, k\}.$$

Beweis (Tripathi-Venugopalan-West).

(1)⇒(2): Sei Ω ein Graph mit den gegebenen Eckengraden. Aus dem Handschlaglemma folgt $\sum d_i = 2|\Omega_K| \equiv 0 \pmod 2$. Sei $1 \leq k \leq n$ und s die Anzahl der Kanten zwischen $e_1, \ldots, e_k$. Dann ist $s \leq k(k-1)/2$ und $-2s + \sum_{i=1}^{k} d_i$ ist die Anzahl der Kanten von $e_1, \ldots, e_k$ nach $e_{k+1}, \ldots, e_n$. Da der Graph einfach ist, können an jeder Ecke e_i mit $i > k$ höchstens $\min\{d_i, k\}$ solche Kanten ankommen. Dies zeigt $-2s + \sum_{i=1}^{k} d_i \leq \sum_{i=k+1}^{n} \min\{d_i, k\}$. Es folgt

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq 2s + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{d_i, k\} \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{d_i, k\}.$$

(2)⇒(1): Wir starten mit $\Omega = \mathcal{T}_n$ und fügen sukzessiv Kanten hinzu, bis (1) erfüllt ist. Im Fall $d_1 = 0$ sind wir bereits fertig. Sei nun $d_1 > 0$. Induktiv nehmen wir an, dass Ω folgende Eigenschaften hat:

(a) $\deg(e_i) = d_i$ für $i = 1, \ldots, r-1$, $\deg(e_r) < d_r$ und $\deg(e_i) \leq d_i$ für $i = r+1, \ldots, n$.

(b) Es gibt keine Kanten zwischen $e_{r+1}, \ldots, e_n$.

Wir werden schrittweise $\deg(e_r)$ und r erhöhen.

Schritt 1: Für i mit $\deg(e_i) < d_i$ ist $\{e_r, e_i\} \in \Omega_K$.
Ist $\{e_r, e_i\}$ keine Kante, so füge man sie hinzu. Dies erhöht $\deg(e_r)$ und $\deg(e_i)$ jeweils um 1. Im Fall $\deg(e_r) = d_r$ können wir r erhöhen, sodass (a) und (b) weiterhin gelten.

Schritt 2: e_r ist zu $e_1, \ldots, e_{r-1}$ benachbart.
Nehmen wir an, dass e_r nicht zu e_i mit $i < r$ benachbart ist. Wegen $\deg(e_i) = d_i \geq d_r > \deg(e_r)$ existiert ein Nachbar f von e_i, der nicht zu e_r benachbart ist. Im Fall $d_r - \deg(e_r) \geq 2$ können wir die Kante $\{e_i, f\}$ durch die Kanten $\{e_i, e_r\}$ und $\{e_r, f\}$ ersetzen. Dadurch wird $\deg(e_r)$ um 2 erhöht, während $\deg(e_i)$ und $\deg(f)$ gleich bleiben. Sei nun $d_r - \deg(e_r) = 1$. Nach Voraussetzung und Lemma 1.6 ist

$$1 + \sum_{i=r+1}^{n} (d_i - \deg(e_i)) = \sum_{i=1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{n} \deg(e_i) \equiv 0 \pmod 2.$$

Daher existiert $k > r$ mit $\deg(e_k) < d_k$. Nach Schritt 1 ist e_k zu e_r benachbart. Wir ersetzen die Kanten $\{e_r, e_k\}$, $\{e_i, f\}$ durch $\{e_i, e_r\}$, $\{e_r, f\}$. Dabei wird $\deg(e_r)$ um 1 erhöht, $\deg(e_k)$ um 1 verringert und $\deg(e_i)$ sowie $\deg(f)$ bleiben gleich.

Schritt 3: Für alle $k > r$ ist $\deg(e_k) = \min\{r, d_k\}$.
Nehmen wir $\deg(e_k) \neq \min\{r, d_k\}$ für ein $k > r$ an. Nach Eigenschaft (b) kann e_k nur zu $e_1, \ldots, e_r$ benachbart sein. Dies zeigt $\deg(e_k) \leq r$. Wegen $\deg(e_k) \leq d_k$ ist also $\deg(e_k) < \min\{r, d_k\}$. Nach Schritt 1 sind e_k und e_r benachbart. Wegen $\deg(e_k) < r$ existiert ein $i < r$, sodass e_k nicht zu e_i benachbart ist. Wegen $\deg(e_i) = d_i \geq d_r > \deg(e_r)$ existiert wie im vorherigen Schritt ein Nachbar

f von e_i, der nicht zu e_r benachbart ist. Da e_r ein Nachbar von e_i ist (Schritt 2), können wir $f \neq e_r$ wählen. Wir ersetzen nun $\{e_i, f\}$ durch $\{e_r, f\}$ und $\{e_i, e_k\}$. Dies erhöht $\deg(e_r)$ und $\deg(e_k)$ um 1, während $\deg(e_i)$ und $\deg(f)$ gleich bleiben. Wegen $i < r$ bleibt auch Eigenschaft (b) erhalten.

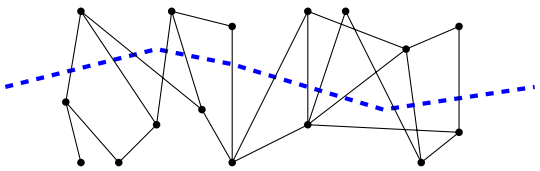
Schritt 4: Für $1 \leq i < j < r$ sind e_i und e_j benachbart.
Angenommen e_i und e_j sind nicht benachbart. Wegen $\deg(e_i), \deg(e_j) > \deg(e_r)$ existieren Nachbarn f von e_i und g von e_j, sodass e_r weder zu f noch zu g benachbart ist (der Fall $f = g$ ist zugelassen). Wir ersetzen $\{e_i, f\}$, $\{e_j, g\}$ durch $\{e_i, e_j\}$, $\{e_r, f\}$. Dies erhöht $\deg(e_r)$ und verringert $\deg(g)$ jeweils um 1, während $\deg(e_i)$, $\deg(e_j)$ und $\deg(f)$ gleich bleiben (außer im Fall $f = g$).

Schritt 5: $\deg(e_r) = d_r$.
Nach Schritt 2 und 4 sind $e_1, \ldots, e_r$ paarweise benachbart. Aus Eigenschaft (b) und Schritt 3 folgt

$$\sum_{i=1}^{r} d_i \leq r(r-1) + \sum_{i=r+1}^{n} \min(r, d_i) = \sum_{i=1}^{r} \deg(e_i) \leq \sum_{i=1}^{r} d_i$$

und $\deg(e_r) = d_r$. Wir können nun r erhöhen und den Prozess wiederholen. □

Beispiel 2.5. An der deutsch-österreichischen Grenze sollen Mautstationen auf allen Verbindungsstraßen installiert werden. Da sich verschiedene Wege überschneiden können, ist nicht unmittelbar klar, wie viele Mautstationen man braucht.



Definition 2.6. Ein Multigraph Ω mit mehr als k Ecken heißt *k-zusammenhängend*, falls Ω nach Entfernen von $k-1$ beliebigen Ecken (immer noch) zusammenhängend ist. Der *Zusammenhang* $k(\Omega)$ von Ω ist die größte Zahl $k \geq 0$, sodass Ω k-zusammenhängend ist.

Bemerkung 2.7.

(i) Wie üblich beeinflussen Mehrfachkanten den Zusammenhang nicht. Wir werden uns daher auf einfache Graphen beschränken.

(ii) Jeder Graph ist 0-zusammenhängend. Die 1-zusammenhängenden Graphen sind genau die zusammenhängenden Graphen außer $\mathcal{T}_1$.

(iii) Der einzige k-zusammenhängende Graph mit $k+1$ Ecken ist $\mathcal{V}_{k+1}$.

Beispiel 2.8. Man zeigt leicht

Ω	$\mathcal{T}_n$	$\mathcal{V}_n$	$\mathcal{V}_{k,l}$	$\mathcal{G}_n$	$\mathcal{K}_n$	$\mathcal{S}_n$
$k(\Omega)$	0	$n-1$	$\min\{k,l\}$	1	2	1

Definition 2.9. Sei Ω ein Graph und $\Delta, \Gamma \subseteq \Omega_E$.

- Ein Weg $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ in Ω heißt Δ-Γ-*Weg*, falls $\alpha_1 \in \Delta$ und $\alpha_k \in \Gamma$ ($k = 1$ ist zugelassen). Zwei Wege $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ und $(\beta_1, \ldots, \beta_l)$ heißen *kreuzungsfrei*, falls sie außer Start und Ziel keine Ecken gemeinsam haben, d. h. $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}\} \cap \{\beta_2, \ldots, \beta_{l-1}\} = \varnothing$.

- Ein Δ-Γ-*Separator* ist eine Teilmenge $\Lambda \subseteq \Omega_E$, sodass es keine Δ-Γ-Wege in $\Omega \setminus \Lambda$ gibt. Im Fall $\Delta = \{\delta\}$ und $\Gamma = \{\gamma\}$ sprechen wir von δ-γ-Separatoren.

Bemerkung 2.10.

(i) Disjunkte Wege sind offenbar kreuzungsfrei.

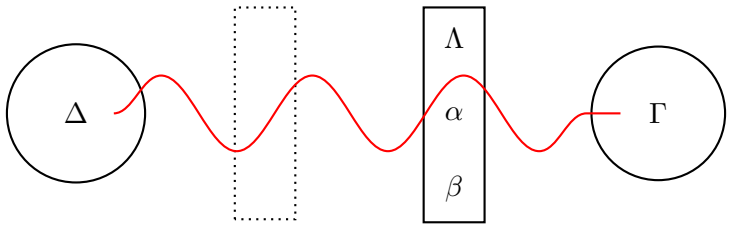
(ii) Sowohl Δ als auch Γ sind Δ-Γ-Separatoren. Umgekehrt muss jeder Δ-Γ-Separator $\Delta \cap \Gamma$ enthalten.

(iii) Für $\delta \neq \gamma$ und jeden δ-γ-Separator $\Lambda \subseteq \Omega_E \setminus \{\delta, \gamma\}$ gilt $k(\Omega) \leq |\Lambda|$, denn $\Omega \setminus \Lambda$ ist unzusammenhängend. Ist Ω nicht vollständig, so existiert umgekehrt $\Lambda \subseteq \Omega_E$ mit $|\Lambda| = k(\Omega)$, sodass $\Omega \setminus \Lambda$ unzusammenhängend ist. Für unverbundene Ecken $\delta, \gamma \in \Omega_E \setminus \Lambda$ ist Λ ein δ-γ-Separator.

Satz 2.11 (Menger)**.** *Sei Ω ein Graph und $\Delta, \Gamma \subseteq \Omega_E$. Die minimale Mächtigkeit eines Δ-Γ-Separators ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter Δ-Γ-Wege in Ω.*

Beweis. Sei Λ ein minimaler Δ-Γ-Separator und $k := |\Lambda|$. Da jeder Δ-Γ-Weg eine Ecke aus Λ benutzt, kann es höchstens k paarweise disjunkte Δ-Γ-Wege in Ω geben. Für die umgekehrte Ungleichung argumentieren wir durch Induktion nach $|\Omega_K|$. Im Fall $\Omega_K = \varnothing$ ist $\Lambda = \Delta \cap \Gamma$ und die Δ-Γ-Wege in Ω haben die Form $\{\delta\}$ mit $\delta \in \Delta \cap \Gamma$. Sei also $a := \{\alpha, \beta\} \in \Omega_K$. Durch Entfernen von a und Vereinigen von α und β erhält man einen Graphen Ω', in dem $\alpha = \beta$ gilt. Nehmen wir an, dass Ω (und damit auch Ω') keine k paarweise disjunkten Δ-Γ-Wege besitzt. Nach Induktion existiert ein Δ-Γ-Separator $\Lambda' \subseteq \Omega'_E$ mit $|\Lambda'| < k$. Dabei gilt $\alpha = \beta \in \Lambda'$, denn anderenfalls wäre Λ' auch ein Δ-Γ-Separator in Ω. Somit ist $\Lambda' \cup \{\alpha, \beta\}$ ein k-elementiger Δ-Γ-Separator in Ω. Wir können also $\Lambda = \Lambda' \cup \{\alpha, \beta\}$ setzen (insbesondere enthält Λ nun benachbarte Ecken).

Wir untersuchen nun $\Omega' := \Omega \setminus \{a\}$. Da jeder Δ-Γ-Weg in Ω über Λ verläuft, ist jeder Δ-Λ-Separator in Ω' auch ein Δ-Γ-Separator in Ω (beachte: $\alpha, \beta \in \Lambda$).



Jeder solche Separator besteht also aus mindestens k Ecken. Nach Induktion gibt es k paarweise disjunkte Δ-Λ-Wege in Ω'. Aus Symmetriegründen besitzt Ω' auch k paarweise disjunkte Λ-Γ-Wege. Da Λ ein Δ-Γ-Separator in Ω ist, lassen sich diese Wege zu k paarweise disjunkten Δ-Γ-Wegen in Ω verbinden. Widerspruch. □

Folgerung 2.12. [3] *Ein Graph ist genau dann k-zusammenhängend, wenn es zwischen je zwei verschiedenen Ecken mindestens k kreuzungsfreie Wege gibt.*

Beweis. Sei Ω ein Graph. Gibt es mindestens k kreuzungsfreie Wege zwischen je zwei verschiedenen Ecken in Ω, so ist $|\Omega_E| > k$ und $\Omega \setminus \Lambda$ ist für alle $\Lambda \subseteq \Omega_E$ mit $|\Lambda| < k$ zusammenhängend. Also ist Ω k-zusammenhängend.

Sei umgekehrt Ω k-zusammenhängend und $\alpha, \beta \in \Omega_E$ verschieden. Angenommen es gibt weniger als k kreuzungsfreie Wege zwischen α und β. Nehmen wir zunächst $a := \{\alpha, \beta\} \notin \Omega_K$ an. Sei $\Omega' := \Omega \setminus \{\alpha, \beta\}$,

[3] In der Literatur *globaler* Satz von Menger genannt.

Δ die Menge der Nachbarn von α und Γ die Menge der Nachbarn von β. Disjunkte Δ-Γ-Wege in Ω' entsprechen kreuzungsfreien α-β-Wegen in Ω. Nach Menger gibt es einen Δ-Γ-Separator $\Lambda \subseteq \Omega'_E$ mit weniger als k Elementen. Jetzt wären aber α und β nicht in $\Omega \setminus \Lambda$ verbunden. Dieser Widerspruch zeigt $a \in \Omega_K$. In $\Omega' := \Omega \setminus \{a\}$ gibt es höchstens $k-2$ kreuzungsfreie α-β-Wege. Wie eben liefert der Satz von Menger einen α-β-Separator $\Lambda \subseteq \Omega_E \setminus \{\alpha, \beta\}$ in Ω' mit höchstens $k-2$ Elementen. Wegen $|\Omega_E| > k$ existiert eine Ecke $\gamma \notin \Lambda \cup \{\alpha, \beta\}$. Nun ist Λ ein α-γ-Separator oder ein β-γ-Separator in Ω', o. B. d. A. nehmen wir den ersten Fall an. Dann ist $\Lambda \cup \{\beta\}$ ein α-γ-Separator in Ω. Wegen $|\Lambda \cup \{\beta\}| \leq k-1$ widerspricht dies $k(\Omega) \geq k$. □

3 Isomorphe Graphen

Bemerkung 3.1. In diesem Abschnitt betrachten wir ausschließlich einfache Graphen Ω. Die Anzahl aller Graphen mit $\Omega_E = \{1, \ldots, n\}$ ist $|2^{\binom{\Omega_E}{2}}| = 2^{\binom{n}{2}}$. Allerdings sehen viele dieser Graphen gleich aus. Zum Beispiel gibt es sechs Graphen mit vier Ecken und einer Kante.

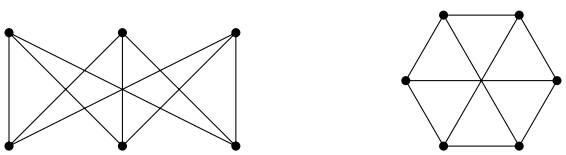
Definition 3.2. Graphen Ω und Δ heißen *isomorph*, falls eine Bijektion $\sigma\colon \Omega_E \to \Delta_E$ mit

$$\{x, y\} \in \Omega_K \iff \{\sigma(x), \sigma(y)\} \in \Delta_K$$

existiert. Wir schreiben dann $\Omega \cong \Delta$.

Bemerkung 3.3. Wie bei Gruppen oder Vektorräumen ist die Isomorphie von Graphen eine Äquivalenzrelation. Isomorphe Graphen unterscheiden sich nur durch die Bezeichnung der Eckpunkte und haben daher die gleichen Eigenschaften (Anzahl der Komponenten, Multimenge der Eckengrade usw.). Ob zwei gegebene Graphen isomorph sind, ist eine der wenigen Fragen, von denen man noch nicht weiß, wie schwer sie sind.

Beispiel 3.4. Die Graphen



sind isomorph, während



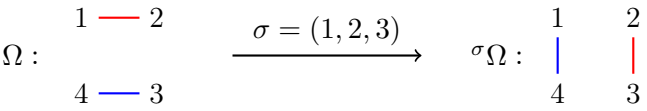
nicht isomorph sind (obwohl die Multimenge der Eckengrade übereinstimmt).

Definition 3.5. Sei $g(n)$ die Anzahl der Isomorphieklassen von Graphen mit n Ecken.

Bemerkung 3.6. Um $g(n)$ zu bestimmen, genügt es, die Menge Γ_n aller Graphen Ω mit $\Omega_E = \{1,\dots,n\} =: N$ zu betrachten. Also $g(n) \le |\Gamma_n| = 2^{\binom{n}{2}}$. Wir zählen die Isomorphieklassen in Γ_n. Dafür überlegen wir uns, dass S_n auf $\binom{N}{2}$ operiert durch

$$^{\sigma}\{a,b\} := \{\sigma(a),\sigma(b)\}$$

für $\sigma \in S_n$ und $\{a,b\} \in \binom{N}{2}$. Dies induziert eine Operation von S_n auf $2^{\binom{N}{2}}$. Daher operiert S_n auch auf Γ_n durch $^{\sigma}\Omega := (N, {}^{\sigma}\Omega_K)$.

Beispiel: 

Zwei Graphen in Γ_n sind genau dann isomorph, wenn sie in der gleichen Bahn von S_n liegen. Zur Berechnung der Anzahl dieser Bahnen benutzen wir Burnsides Lemma. Dafür müssen wir zählen, wie viele Fixpunkte $\sigma \in S_n$ auf Γ_n hat. Sei $\widetilde{\sigma}$ die von σ induzierte Permutation auf $\binom{N}{2}$. Für $\sigma = (1,2,3)$ wie oben ist beispielsweise

$$\widetilde{\sigma} = \big(\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\big)\big(\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\}\big).$$

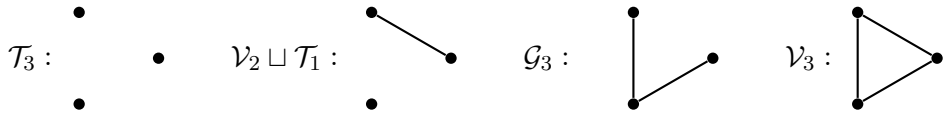
Ein Graph $\Omega \in \Gamma_n$ bleibt genau dann unter σ fest, wenn Ω_K die Vereinigung von Bahnen von $\widetilde{\sigma}$ ist. Die Anzahl $f(\sigma)$ dieser Fixpunkte ist also $2^{z(\widetilde{\sigma})}$, wobei $z(\widetilde{\sigma})$ die Anzahl der Zyklen von $\widetilde{\sigma}$ ist. Burnsides Lemma zeigt

$$g(n) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} 2^{z(\widetilde{\sigma})}. \tag{3.1}$$

Es ist leicht zu sehen, dass $f(\sigma)$ nur vom Zyklentyp von σ abhängt (vgl. Aufgabe 36). Außerdem wissen wir nach Satz 2.25, wie viele Elemente von jedem Zyklentyp existieren. Man braucht in (3.1) also „nur“ über die Partitionen von n zu summieren. Man kennt trotzdem keine explizite Formel für $g(n)$. Es gilt $g(50) \approx 1{,}9 \cdot 10^{304}$ (siehe `https://oeis.org/A000088`).

Beispiel 3.7.

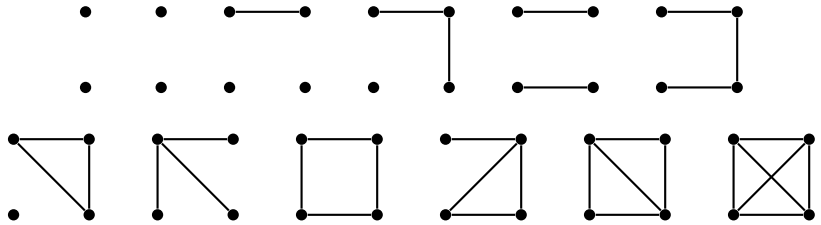
(i) Sicher ist $g(1) = 1$, $g(2) = 2$ und $g(3) = 4$:



(ii) Wir betrachten den Fall $n = 4$ in Bemerkung 3.6. Offenbar hat $\sigma = 1$ genau $z(\widetilde{\sigma}) = \binom{4}{2} = 6$ Zyklen (der Länge 1) auf $\binom{N}{2}$, d. h. $f(\sigma) = 2^6$. Weiter hat $\sigma = (1,2)$ die Zyklen $(\{1,2\})$, $(\{3,4\})$, $(\{1,3\},\{2,3\})$ und $(\{1,4\},\{2,4\})$ auf $\binom{N}{2}$ und es folgt $f(\sigma) = 2^4$. Analog zeigt man $f((1,2,3)) = 2^2$, $f((1,2)(3,4)) = 2^4$ und $f((1,2,3,4)) = 2^2$. Nach Satz 2.25 gibt es sechs Permutationen vom Zyklentyp (2), acht vom Typ (3), drei vom Typ (2^2) und sechs vom Typ (4). Mit (3.1) erhält man

$$\begin{aligned} g(4) &= \frac{1}{4!}\big(f(1) + 6f((1,2)) + 8f((1,2,3)) + 3f((1,2)(3,4)) + 6f((1,2,3,4))\big) \\ &= \frac{1}{24}\big(2^6 + 6\cdot 2^4 + 8\cdot 2^2 + 3\cdot 2^4 + 6\cdot 2^2\big) = \frac{1}{24}\big(2^5(2+3+1) + 3\cdot 2^3(2+1)\big) = 11. \end{aligned}$$

Repräsentanten dieser Graphen sind:



(iii) Mit Pólyas Satz können wir genauer die Graphen mit vorgegebener Anzahl an Ecken und Kanten zählen. Sei dafür $\Lambda := \binom{N}{2}$ und $\Delta := \{0,1\}$. Jeder Graph $\Omega \in \Gamma_n$ entspricht einer Abbildung $f \in \Delta^\Lambda$ mit $f(a) = 1$, falls a eine Kante von Ω ist, und 0 sonst. Wie in Bemerkung 3.6 operiert S_n auf Δ^Λ. Mit den Bezeichnungen aus Satz 6.10 sei $w\colon \Delta \to \mathbb{N}_0$, $w(0) = 0$, $w(1) = 1$. Dann ist $W(X) = 1 + X$. Die Anzahl der Bahnen von S_n auf $(\Delta^\Lambda)_k$ ist genau die Anzahl der Graphen mit n Ecken und k Kanten bis auf Isomorphie. Mit den Rechnungen aus (ii) erhält man das Polynom

$$\begin{aligned}\frac{1}{4!}\sum_{\sigma\in S_4}\prod_{i=1}^{4}(1+X^i)^{z_i(\widetilde{\sigma})} &= \frac{1}{24}\Big((1+X)^6 + 6(1+X)^2(1+X^2)^2 \\ &\quad + 8(1+X^3)^2 + 3(1+X)^2(1+X^2)^2 + 6(1+X^2)(1+X^4)^1\Big) \\ &= \ldots = X^6 + X^5 + 2X^4 + 3X^3 + 2X^2 + X + 1.\end{aligned}$$

Es gibt also genau drei Graphen mit vier Ecken und drei Kanten bis auf Isomorphie ($\mathcal{G}_4$, $\mathcal{S}_4$, $\mathcal{S}_4^C$, siehe obige Abbildung). Die Symmetrie in den Koeffizienten erklärt sich durch die Bijektion $\Omega \mapsto \Omega^C$.

Definition 3.8. Die *Automorphismengruppe* $\mathrm{Aut}(\Omega)$ eines Graphen Ω besteht aus den Isomorphismen von Ω auf sich selbst, d. h.

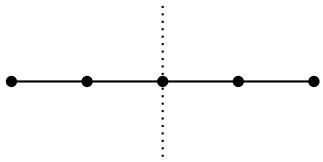
$$\mathrm{Aut}(\Omega) := \big\{\sigma \in \mathrm{Sym}(\Omega_E) : \{x,y\} \in \Omega_K \iff \{\sigma(x),\sigma(y)\} \in \Omega_K\big\} \leq \mathrm{Sym}(\Omega_E).$$

Im Fall $|\mathrm{Aut}(\Omega)| \neq 1$ nennt man Ω *symmetrisch* und anderenfalls *asymmetrisch*.

Beispiel 3.9.

(i) Für jeden Graphen Ω gilt $\mathrm{Aut}(\Omega) = \mathrm{Aut}(\Omega^C)$. Insbesondere ist $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_n) = \mathrm{Aut}(\mathcal{V}_n) \cong S_n$.

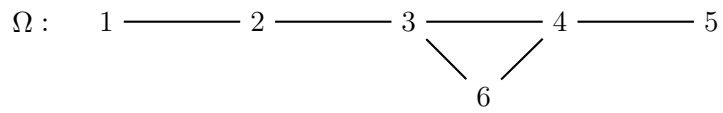
(ii) Für $n \geq 2$ ist $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_n)$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 2, wobei der nicht-triviale Automorphismus eine Spiegelung an der Mitte der Geraden beschreibt.

$\mathcal{G}_5$: 

(iii) Für $n \geq 3$ gilt $\mathrm{Aut}(\mathcal{K}_n) \cong D_{2n}$, denn jeder Automorphismus muss die Abstände der Ecken erhalten und entspricht somit einer Symmetrie des regelmäßigen n-Ecks (vgl. Beispiel 6.3).

(iv) Für $n \geq 4$ gilt $\mathcal{S}_n^C \cong \mathcal{T}_1 \sqcup \mathcal{V}_{n-1}$ und $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_n) \cong S_{n-1}$.

(v) Wir untersuchen die Automorphismengruppe des Graphen



Jedes $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ muss die beiden Ecken 3 und 4 vom Grad 3 permutieren, d. h. $\{\alpha(3), \alpha(4)\} = \{3, 4\}$. Der einzige gemeinsame Nachbar von 3 und 4 muss daher festbleiben, also $\alpha(6) = 6$. Neben 6 hat nur noch Ecke 2 Grad 2. Dies zeigt $\alpha(2) = 2$. Es folgt nun leicht $\alpha = \mathrm{id}$ und $\mathrm{Aut}(\Omega) = \{\mathrm{id}\}$, d. h. Ω ist asymmetrisch. Dies ist der kleinste asymmetrische Graph mit mindestens zwei Ecken. Überraschenderweise sind aber fast alle Graphen asymmetrisch.

Satz 3.10 (Erdős-Rényi)**.** *Es gilt*

$$g(n) \sim \frac{1}{n!} 2^{\binom{n}{2}}.$$

Insbesondere sind fast alle Graphen asymmetrisch.

Beweis. Sei $m := \binom{n}{2}$. Mit (3.1) aus Bemerkung 3.6 müssen wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^m} \sum_{\sigma \in S_n} 2^{z(\widetilde{\sigma})} = 1$$

zeigen. Im Folgenden sei n daher stets „groß genug“.

Sei $2 \le k < n$ und $\Sigma_k \subseteq S_n$ die Menge der Permutationen mit höchstens k Fixpunkten. Für $\sigma \in \Sigma_k$ hat dann $\widetilde{\sigma}$ höchstens $\binom{k}{2} + \frac{n-k}{2}$ Fixpunkte (wobei Gleichheit nur gilt, wenn σ ein disjunktes Produkt von $\frac{n-k}{2}$ Transpositionen ist). Alle anderen Bahnen von $\widetilde{\sigma}$ haben mindestens Länge 2. Also ist

$$\begin{aligned} z(\widetilde{\sigma}) &\le m - \frac{1}{2}\Big(m - \binom{k}{2} - \frac{n-k}{2}\Big) = m - \frac{n(n-1) - k(k-1) - n + k}{4} \\ &= m - \frac{n(n-2) - k(k-2)}{4} \le m - \frac{n(n-k)}{4} \qquad \text{(ersetze } k(k-2) \text{ durch } n(k-2)\text{)}. \end{aligned}$$

Für $1 \ne \sigma \in S_n \setminus \Sigma_k$ gilt $\sigma \in \Sigma_{n-2}$ und

$$\begin{aligned} z(\widetilde{\sigma}) &\le m - \frac{1}{2}\Big(m - \binom{n-2}{2} - 1\Big) \\ &= m - \frac{n(n-1) - (n-2)(n-3) - 2}{4} = m - n + 2. \end{aligned}$$

Wegen $|\Sigma_k| \le n! \le n^n$ und $|S_n \setminus \Sigma_k| \le \binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!} \le n^{n-k}$ folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_n} 2^{z(\widetilde{\sigma})} &= 2^{z(1)} + \sum_{\sigma \in \Sigma_k} 2^{z(\widetilde{\sigma})} + \sum_{1 \ne \sigma \in S_n \setminus \Sigma_k} 2^{z(\widetilde{\sigma})} \\ &\le 2^m + n^n 2^{m - n(n-k)/4} + n^{n-k} 2^{m-n+2}. \end{aligned}$$

Wir dividieren beide Seiten durch 2^m. Es genügt dann zu zeigen, dass $n^n 2^{-n(n-k)/4}$ und $n^{n-k} 2^{2-n}$ gegen 0 streben, wenn man k geeignet wählt. Wir logarithmieren zur Basis 2 und setzen anschließend $k = n - 5\lfloor \log n \rfloor$ (was für große n erlaubt ist). Dann ist

$$\begin{aligned} n\log(n) - \frac{n(n-k)}{4} &\longrightarrow -\frac{n\log(n)}{4} \longrightarrow -\infty \\ (n-k)\log(n) + 2 - n &\longrightarrow 5\log(n)^2 - n \longrightarrow -\infty \end{aligned}$$

für $n \to \infty$.

Für die zweite Behauptung sei $t(n)$ die Anzahl der asymmetrischen Graphen mit n Ecken bis auf Isomorphie. Die Bahnen dieser Graphen unter obiger Operation haben dann Länge $n!$. Alle anderen Bahnen haben höchstens Länge $n!/2$. Dies zeigt

$$2^m \leq n!t(n) + \frac{n!}{2}(g(n) - t(n)) = \frac{n!}{2}\big(g(n) + t(n)\big).$$

Wir teilen durch $g(n)n!$ und erhalten

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{2^m}{g(n)n!} \leq \frac{1}{2}\Big(1 + \lim_{n\to\infty} \frac{t(n)}{g(n)}\Big) \leq 1.$$

Also strebt $\frac{t(n)}{g(n)}$ gegen 1, d. h. fast alle Graphen sind asymmetrisch. □

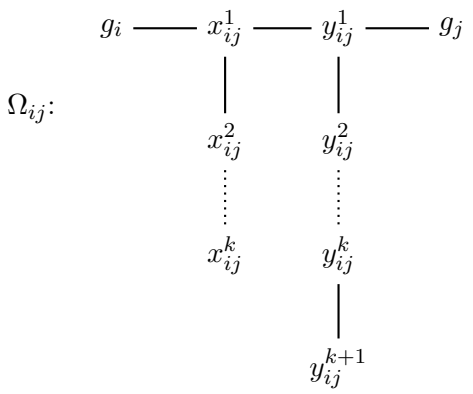
Beispiel 3.11. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Graph mit 20 Ecken asymmetrisch ist, beträgt bereits

$$\frac{t(20)}{g(20)} \geq \frac{2^{191}}{g(20)20!} - 1 > 0{,}998$$

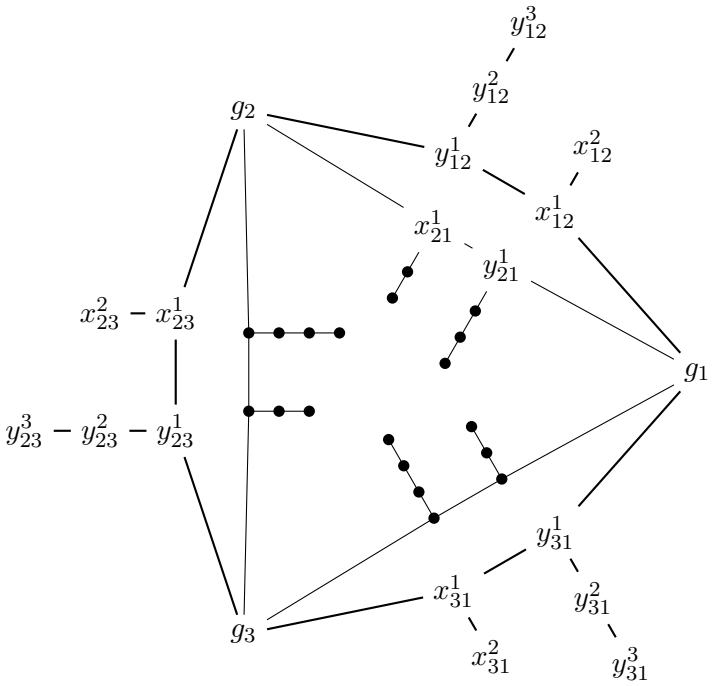
(siehe `https://oeis.org/A000088`).

Satz 3.12 (Frucht)**.** *Jede endliche Gruppe ist die Automorphismengruppe eines Graphen.*

Beweis. Für eine gegebene Gruppe $G = \{1 = g_1, \ldots, g_n\}$ betrachten wir zunächst den trivialen Graphen mit Eckenmenge G. Zwischen jedem Paar von verschiedenen Ecken (g_i, g_j) fügen wir den folgenden Graphen ein, wobei $g_k = g_i^{-1} g_j$:



Sei Ω der daraus resultierende Graph. Für $n = 3$ erhält man zum Beispiel



Für $g \in G$ sei $\sigma \in S_n$ mit $gg_i = g_{\sigma(i)}$ für $i = 1, \ldots, n$. Wegen $g_{\sigma(i)}^{-1} g_{\sigma(j)} = g_i^{-1} g^{-1} g g_j = g_i^{-1} g_j$ ist die Abbildung $\alpha_g \in \mathrm{Sym}(\Omega_E)$ mit

$$\alpha_g(g_i) := g_{\sigma(i)}, \qquad \alpha_g(x_{ij}^l) := x_{\sigma(i)\sigma(j)}^l, \qquad \alpha_g(y_{ij}^l) := y_{\sigma(i)\sigma(j)}^l$$

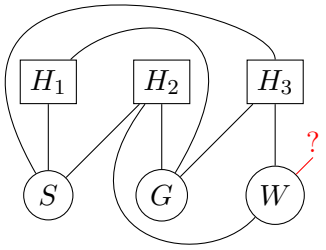
ein Automorphismus auf Ω. Wegen $\alpha_{gh}(g_i) = ghg_i = \alpha_g(\alpha_h(g_i))$ für $g, h, g_i \in G$ ist $\Gamma \colon G \to \mathrm{Aut}(\Omega)$, $g \mapsto \alpha_g$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

Sei nun $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ beliebig und o. B. d. A. $n \geq 3$. Dann haben die Ecken g_i Grad $2(n-1) > 3$, während die Ecken x_{ij}^l und y_{ij}^l Grad höchstens 3 haben. Daher existiert ein $\sigma \in S_n$ mit $\alpha(g_i) = g_{\sigma(i)}$ für $i = 1, \ldots, n$. Für $i \neq j$ bildet α die Gerade g_i—x_{ij}^1—y_{ij}^1—g_j auf $g_{\sigma(i)}$—$x_{\sigma(i)\sigma(j)}^1$—$y_{\sigma(i)\sigma(j)}^1$—$g_{\sigma(j)}$ oder auf $g_{\sigma(i)}$—$y_{\sigma(j)\sigma(i)}^1$—$x_{\sigma(j)\sigma(i)}^1$—$g_{\sigma(j)}$ ab. Offenbar muss α dann den gesamten Graphen Ω_{ij} auf $\Omega_{\sigma(i)\sigma(j)}$ oder auf $\Omega_{\sigma(j)\sigma(i)}$ abbilden. Der zweite Fall ist jedoch ausgeschlossen, denn $\alpha(x_{ij}^k) = y_{\sigma(j)\sigma(i)}^k$ und $\alpha(y_{ij}^{k+1}) = x_{\sigma(j)\sigma(i)}^{k+1}$ mit $g_k = g_i^{-1} g_j$ können nicht beide Grad 1 haben. Also ist $\alpha(\Omega_{ij}) = \Omega_{\sigma(i)\sigma(j)}$ und $g_{\sigma(i)}^{-1} g_{\sigma(j)} = g_i^{-1} g_j$ für alle $i \neq j$. Dies zeigt $\alpha(g_i) = g_{\sigma(i)} = g_{\sigma(1)} g_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Es folgt $\alpha = \alpha_{g_{\sigma(1)}}$ und Γ ist surjektiv. Also gilt $\mathrm{Aut}(\Omega) \cong G$. □

Bemerkung 3.13. Der im Beweis konstruierte Graph ist selbstverständlich nicht minimal. Babai hat gezeigt, dass jede Gruppe $G \notin \{C_3, C_4, C_5\}$ die Automorphismengruppe eines Graphen mit höchstens $2|G|$ Ecken ist. Für $G \in \{C_3, C_4, C_5\}$ gibt es minimale Graphen mit Ordnung 9, 10 bzw. 15 (vgl. Aufgabe 52).

4 Planare und bipartite Graphen

Beispiel 4.1. Drei Häuser H_1, H_2, H_3 sollen mit Strom, Gas und Wasser versorgt werden. Kann man dies erreichen, ohne dass sich die Leitungen kreuzen?[4]

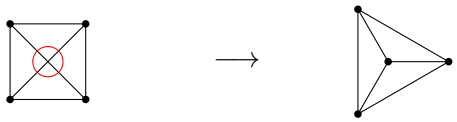


Definition 4.2. Sei Ω ein Multigraph. Man nennt Ω

- *planar*, falls sich Ω in der Ebene zeichnen lässt, ohne dass sich zwei Kanten schneiden. Eine solche Zeichnung heißt *planare Einbettung*.
- *bipartit*, falls eine disjunkte Vereinigung $\Omega_E = \Delta \cup \Gamma$ mit $\Omega_K \cap \left(\binom{\Delta}{2} \cup \binom{\Gamma}{2}\right) = \varnothing$ existiert, d. h. jede Kante verbindet Δ mit Γ.

Beispiel 4.3.

(i) Der vollständige Graph $\mathcal{V}_4$ ist (auf den zweiten Blick) planar:



(ii) In der Definition von bipartit lassen wir $\Delta = \varnothing$ (oder $\Gamma = \varnothing$) zu. Ggf. ist Ω trivial.

(iii) Für $n, m \in \mathbb{N}$ sei $\Omega = \mathcal{V}_{n,m}$ der *vollständige bipartite* Graph mit $\Omega_E = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m\}$ und $\Omega_K = \{\{\alpha_i, \beta_j\} : 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$. Die Frage in Beispiel 4.1 ist äquivalent zu: Ist $\mathcal{V}_{3,3}$ planar?

Bemerkung 4.4.

(i) Ein Multigraph Ω ist genau dann planar, wenn der entsprechende einfache Graph planar ist, denn man kann Mehrfachkanten stets parallel zeichnen. Außerdem ist Ω genau dann planar, wenn jede Komponente von Ω planar ist. Wir werden uns daher meist auf zusammenhängende einfache Graphen beschränken.

(ii) Der Satz von Wagner-Fáry besagt, dass man eine planare Einbettung eines einfachen Graphen stets so zeichnen kann, dass alle Kanten gerade Linien sind. Offen hingegen ist die Vermutung von Harborth, dass die Kantenlängen zusätzlich ganzzahlig gewählt werden können.

Satz 4.5. *Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er nur Kreise gerader Länge enthält. Insbesondere ist jeder Graph ohne Kreise bipartit.*

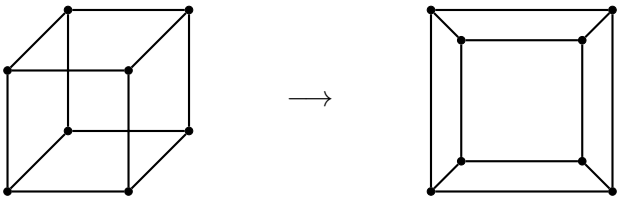
[4] Probieren Sie auch das Spiel Planarity.

Beweis. Sei Ω bipartit mit Zerlegung $\Omega_E = \Delta \cup \Gamma$. Jeder Weg besucht abwechselnd Ecken in Δ und Γ. Jeder geschlossene Weg muss daher gerade Länge haben. Sei umgekehrt Ω ein Graph mit ausschließlich Kreisen gerader Länge. O. B. d. A. sei Ω zusammenhängend. Sei $\omega \in \Omega_E$ fest. Für $\alpha \in \Omega_E$ sei $d(\omega, \alpha) \in \mathbb{N}_0$ der *Abstand* zwischen ω und α, also die Länge eines kürzesten Wegs zwischen α und ω. Wir definieren

$$\Delta := \{\alpha \in \Omega_E : d(\omega, \alpha) \text{ ist gerade}\},$$
$$\Gamma := \{\alpha \in \Omega_E : d(\omega, \alpha) \text{ ist ungerade}\}.$$

Sicher ist $\Omega_E = \Delta \cup \Gamma$ eine Partition. Angenommen es existieren $\alpha, \beta \in \Delta$ mit $\{\alpha, \beta\} \in \Omega_K$. Seien $(\omega = \alpha_0, \ldots, \alpha_{2k} = \alpha)$ und $(\omega = \beta_0, \ldots, \beta_{2l} = \beta)$ kürzeste Wege und sei i maximal mit $\alpha_i = \beta_i$ (notfalls $i = 0$). Dann ist $(\alpha_i, \ldots, \alpha_{2k}, \beta_{2l}, \ldots, \beta_i)$ ein Kreis mit ungerader Länge $2(k + l - i) + 1$. Analog führt der Fall $\alpha, \beta \in \Gamma$ zum Widerspruch. □

Beispiel 4.6. Die Ecken und Kanten eines platonischen Körpers im $\mathbb{R}^3$ (allgemeiner jedes Polyeders) bilden einen (regulären) planaren Graphen, indem man eine Seitenfläche unendlich ausdehnt (vgl. Aufgabe 42):



Allgemeiner unterteilt jede planare Einbettung eines (planaren) Graphen die Ebene in *Flächen*, wovon eine unendlich groß ist (das „Äußere“).[5] Der folgende Satz zeigt, dass die Anzahl der Flächen nicht von der planaren Einbettung abhängt.

Satz 4.7 (EULERsche Polyederformel)**.** *Für jede planare Einbettung eines zusammenhängenden Multigraphen Ω mit e Ecken, f Flächen und k Kanten gilt* $\boxed{e + f - k = 2.}$[6]

Beweis. Induktion nach k. Im Fall $k = 0$ ist $e = f = 1$ und die Formel stimmt. Sei also $k \geq 1$. Angenommen es existiert eine Ecke $\omega \in \Omega$ mit Grad 1. Der zusammenhängende, planare Graph $\Omega \setminus \{\omega\}$ besitzt $e - 1$ Ecken, f Flächen und $k - 1$ Kanten. Nach Induktion ist die Formel korrekt. Da Ω zusammenhängend ist, können wir nun annehmen, dass alle Ecken Grad ≥ 2 haben. Man findet dann einen Kreis, indem man lange genug einen Weg verfolgt. Durch Entfernen einer Kante eines Kreises entsteht ein zusammenhängender, planarer Graph mit e Ecken, $f - 1$ Flächen und $k - 1$ Kanten. Wieder gilt die Formel. □

Lemma 4.8. *Sei Ω ein zusammenhängender, planarer Graph mit e Ecken, f Flächen und k Kanten. Dann gilt:*

(i) Ist $e \geq 3$, so ist $k \leq 3e - 6$ mit Gleichheit genau dann, wenn alle Flächen Dreiecke sind.

(ii) Es existiert eine Ecke vom Grad ≤ 5.

[5] Dieser intuitive Sachverhalt ist eigentlich der tiefliegende *Jordansche Kurvensatz*.

[6] Merkregel: Schreibt man die Formel als alternierende Summe $e - k + f$, so sind die „Dimensionen“ aufsteigend (Ecken sind 0-dimensional, Kanten 1-dimensional und Flächen 2-dimensional). Als Verallgemeinerung betrachtet man in der Topologie die *Euler-Charakteristik*.

Beweis.

(i) O. B. d. A. sei $k \geq 3$. Jede Fläche wird von mindestens drei Kanten begrenzt und jede Kante trennt höchstens zwei Flächen. Dies zeigt

$$k \geq \frac{3}{2} f \overset{4.7}{=} \frac{3}{2}(k + 2 - e).$$

Umstellen ergibt $k \leq 3e - 6$ mit Gleichheit genau dann, wenn jede Fläche von drei Kanten begrenzt ist.

(ii) Haben alle Ecken Grad ≥ 6, so ist $e > 6$ und man erhält den Widerspruch

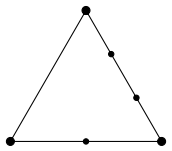
$$6e \leq \sum_{\alpha \in \Omega_E} \deg(\alpha) \overset{1.6}{=} 2k \overset{\text{(i)}}{\leq} 6e - 12. \qquad \square$$

Beispiel 4.9. Nach Lemma 4.8 ist $\mathcal{V}_5$ nicht planar ($e = 5$, $k = 10$). Nehmen wir nun an, dass $\Omega = \mathcal{V}_{3,3}$ planar ist. Dann gibt es eine planare Einbettung mit $f = 2 + k - e = 2 + 3^2 - 6 = 5$ Flächen. Da Ω keine Dreiecke besitzt (Satz 4.5), wird jede Fläche von mindestens vier Kanten begrenzt. Somit bräuchte man $\frac{5 \cdot 4}{2} > 9$ Kanten. Also ist $\mathcal{V}_{3,3}$ ebenfalls nicht planar.

Definition 4.10. Sei Ω ein Graph.

- Ein *Teilgraph* von Ω ist ein Graph Δ mit $\Delta_E \subseteq \Omega_E$ und $\Delta_K \subseteq \Omega_K$.
- Indem wir eine neue Ecke ω auf einer Kante $\{\alpha, \beta\} \in \Omega_K$ hinzufügen, entsteht ein neuer Graph $(\Omega_E \cup \{\omega\}, \big(\Omega_K \setminus \{\{\alpha, \beta\}\}\big) \cup \{\{\alpha, \omega\}, \{\beta, \omega\}\})$. Eine *Unterteilung* von Ω ist ein Graph, der durch endlich viele solche Ersetzungen entsteht.

Beispiel 4.11. Eine Unterteilung des $\mathcal{V}_3$:

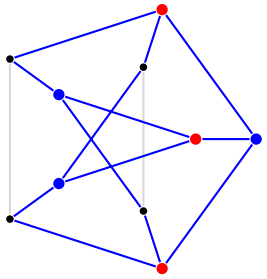


Satz 4.12 (Kuratowski)**.** *Ein Graph ist genau dann planar, wenn er keine Unterteilungen von $\mathcal{V}_5$ oder $\mathcal{V}_{3,3}$ als Teilgraphen enthält.*

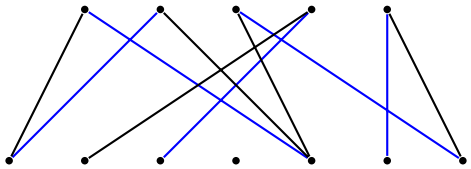
Beweisskizze. Enthält Ω eine Unterteilung von $\mathcal{V}_5$ oder $\mathcal{V}_{3,3}$ als Teilgraphen, so liefert jede planare Einbettung von Ω auch eine planare Einbettung von $\mathcal{V}_5$ bzw. $\mathcal{V}_{3,3}$. Nach Beispiel 4.9 ist dies ausgeschlossen.

Sei umgekehrt Ω nicht planar. Da Ecken vom Grad 1 keinen Einfluss auf die Planarität haben, können diese entfernt werden. Ebenso kann man Ecken vom Grad 2 entfernen, indem man die beiden beteiligten Kanten direkt verbindet. Für den entstehenden Graphen Δ gilt anschließend $\deg \alpha \geq 3$ für alle $\alpha \in \Delta_E$. Es folgt $3|\Delta_E| \leq 2|\Delta_K|$ aus dem Handschlaglemma. Nach Lemma 4.8 können wir außerdem so lange Kanten entfernen, bis $|\Delta_K| \leq 3|\Delta_E| - 5 \leq 2|\Delta_K| - 5$ gilt. Man führt nun eine aufwendige Fallunterscheidung nach dem k-Zusammenhang von Ω durch. $\square$

Beispiel 4.13. Der Petersen-Graph ist nicht planar, da er eine Unterteilung von $\mathcal{V}_{3,3}$ als Teilgraphen enthält:



Beispiel 4.14. Bei einem Ball wollen Frauen und Männer gleichzeitig tanzen (nur gemischte Paare). Ist es möglich, dass jede Frau mit einem befreundeten Mann tanzt? Dies kann nur funktionieren, wenn jede Gruppe von n Frauen insgesamt mit mindestens n Männern befreundet ist. Wir zeigen, dass diese Bedingung sogar hinreichend ist. Dazu arrangieren wir die Männer und Frauen als bipartiten Graphen, sodass die Kanten genau den Freundschaften zwischen Mann und Frau entsprechen. Im folgenden Beispiel sind die Frauen die oberen Punkte. Die blauen Kanten bilden eine mögliche Auswahl von Tanzpaaren.



Definition 4.15. Sei Ω ein Graph.

- Für $\Delta \subseteq \Omega_E$ sei $N(\Delta) := \{\alpha \in \Omega_E : \exists \beta \in \Delta : \{\alpha, \beta\} \in \Omega_K\}$ die Menge der Nachbarn von Δ.
- Eine *Paarung* P von Ω ist eine Menge von paarweise disjunkten Kanten in Ω, d. h. jede Ecke kommt in höchstens einer Kante von P vor. Man nennt P *perfekt*, falls jede Ecke in (genau) einer Kante vorkommt. Ggf. ist $|\Omega_E| = 2|P|$.
- Eine *Überdeckung* von Ω ist eine Teilmenge $U \subseteq \Omega_E$, sodass jede Kante eine Ecke aus U enthält.

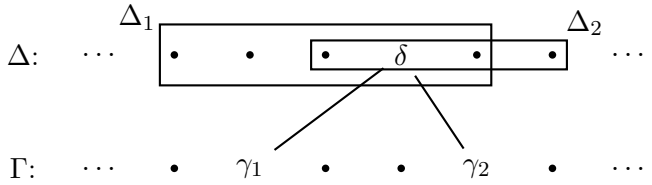
Satz 4.16 (König)**.** *Sei Ω ein bipartiter Graph. Die maximale Mächtigkeit einer Paarung von Ω ist die minimale Mächtigkeit einer Überdeckung von Ω.*

Beweis. Sei $\Omega = \Delta \cup \Gamma$ eine bipartite Zerlegung. Eine Paarung von Ω besteht aus paarweise disjunkten Δ-Γ-Wegen. Eine Überdeckung von Ω ist ein Δ-Γ-Separator. Die Aussage folgt daher aus dem Satz von Menger. □

Satz 4.17 (Halls Heiratssatz)**.** *Sei Ω ein bipartiter Graph mit Zerlegung $\Omega_E = \Delta \cup \Gamma$. Genau dann existiert eine Paarung mit $|\Delta|$ Kanten, falls $|N(\Delta_1)| \geq |\Delta_1|$ für alle $\Delta_1 \subseteq \Delta$ gilt.*

Beweis. Sei $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Existiert eine Paarung P mit n Kanten, so hat diese die Form $P = \{\{\delta_i, \gamma_i\} : i = 1, \ldots, n\}$, wobei $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ paarweise verschieden sind. Für $\Delta_1 = \{\delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_k}\}$ gilt dann $\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_k} \in N(\Delta_1)$ und $|N(\Delta_1)| \geq k = |\Delta_1|$.

Sei nun $|N(\Delta_1)| \geq |\Delta_1|$ für alle $\Delta_1 \subseteq \Delta$. Die Wahl $\Delta_1 = \{\delta_i\}$ zeigt $\deg(\delta_i) \geq 1$ für $i = 1, \ldots, n$. Durch Induktion nach $|\Omega_K|$ können wir annehmen, dass die Bedingung $|N(\Delta_1)| \geq |\Delta_1|$ durch Entfernen einer beliebigen Kante verletzt wird. Wenn wir $\deg(\delta_i) = 1$ für $i = 1, \ldots, n$ zeigen können, so ist Ω_K eine Paarung mit n Kanten. Sei indirekt $\delta \in \Delta$ mit Nachbarn $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Die Graphen $\Omega_i := \Omega \setminus \{\{\delta, \gamma_i\}\}$ für $i = 1, 2$ verletzen die Bedingung $|N_i(\Delta_1)| \geq |\Delta_1|$, wobei N_i die Nachbar-Funktion N auf Ω_i ist. Wähle $\Delta_i \subseteq \Delta$ mit $|N_i(\Delta_i)| < |\Delta_i|$ für $i = 1, 2$. Es gilt $N_i(\Delta_i) = N(\Delta_i) \setminus \{\gamma_i\}$ und $\delta \in \Delta_1 \cap \Delta_2$.



Dies zeigt $N(\Delta_1 \cap \Delta_2 \setminus \{\delta\}) \subseteq N_1(\Delta_1) \cap N_2(\Delta_2)$ und $N_1(\Delta_1) \cup N_2(\Delta_2) = N(\Delta_1 \cup \Delta_2)$. Mit dem Inklusions-Exklusions-Prinzip erhält man den Widerspruch

$$\begin{aligned} |N(\Delta_1 \cap \Delta_2 \setminus \{\delta\})| &\leq |N_1(\Delta_1) \cap N_2(\Delta_2)| = |N_1(\Delta_1)| + |N_2(\Delta_2)| - |N_1(\Delta_1) \cup N_2(\Delta_2)| \\ &= |N_1(\Delta_1)| + |N_2(\Delta_2)| - |N(\Delta_1 \cup \Delta_2)| \leq |\Delta_1| - 1 + |\Delta_2| - 1 - |\Delta_1 \cup \Delta_2| \\ &= |\Delta_1 \cap \Delta_2 \setminus \{\delta\}| - 1. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.18. In der Situation von Satz 4.17 kann man eine Paarung als injektive Abbildung $f \colon \Delta \to \Gamma$ auffassen. Im Fall $|\Delta| = |\Gamma|$ ist f bijektiv und die Paarung ist perfekt.

Folgerung 4.19. *Seien $M = A_1 \cup \ldots \cup A_n = B_1 \cup \ldots \cup B_n$ zwei Partitionen einer endlichen Menge M in gleich große Teile. Dann gilt $A_i \cap B_i \neq \varnothing$ für $i = 1, \ldots, n$ bei geeigneter Anordnung.*

Beweis. Wir betrachten den bipartiten Graphen Ω mit $\Omega_E = \{A_1, \ldots, A_n\} \cup \{B_1, \ldots, B_n\}$. Dabei sei $\{A_i, B_j\} \in \Omega_K$ genau dann, wenn $A_i \cap B_j \neq \varnothing$. Für $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| = |I||A_1| = |I|\frac{|M|}{n} = |I||B_1|.$$

Daher sind mindestens $|I|$ der B_j zu Ecken A_i mit $i \in I$ benachbart. Nach dem Heiratssatz besitzt Ω eine perfekte Paarung. Daraus folgt die Behauptung. □

Beispiel 4.20.

(i) Ein gut gemischtes Skatblatt wird auf acht Stapel mit je vier Karten ausgegeben. Dann ist es stets möglich, von jedem Stapel eine Karte zu ziehen, sodass die acht gezogenen Karten genau die Werte $7, 8, \ldots,$ König, Ass (in beliebigen Farben) repräsentieren. Dies folgt aus Folgerung 4.19, indem man die Karten zusätzlich sortiert auslegt, je ein Stapel für einen Wert in den vier Farben.

(ii) Gibt es unter sechs Personen stets drei, die sich alle kennen oder alle nicht kennen? Die Kennen-Relation sei symmetrisch und durch die Kanten eines Graphen Ω mit sechs Ecken modelliert. Sei $\alpha_1 \in \Omega_E$ beliebig. Nach dem Schubfachprinzip existieren $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \Omega_E$, sodass α_1 entweder zu allen oder keiner der drei Ecken benachbart ist. Indem man Ω durch sein Komplement ersetzt, kann man annehmen, dass der erste Fall eintritt. Gibt es keine Kante zwischen $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, so hat man drei Personen, die sich nicht kennen. Anderenfalls existiert eine Kante, o. B. d. A. $\{\alpha_2, \alpha_3\}$. Dann sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ drei Personen, die sich kennen. Wir verallgemeinern:

Definition 4.21. Sei Ω ein Graph und $\Delta \subseteq \Omega_E$. Dann nennt man $(\Delta, \Omega_K \cap \binom{\Delta}{2})$ den von Δ *induzierten* Teilgraphen. Dies ist genau der Graph, der durch Entfernen von $\Omega_E \setminus \Delta$ entsteht.

Satz 4.22 (Ramsey)**.** *Sei $k \in \mathbb{N}$ und Ω ein Graph mit mindestens 4^{k-1} Ecken. Dann existieren k Ecken in Ω, die einen vollständigen oder trivialen Teilgraphen induzieren.*

Beweis. Wir wählen $\delta_1 \in \Delta_1 \subseteq \Omega_E$ mit $|\Delta_1| = 4^{k-1} = 2^{2k-2}$ beliebig. Sei $\Gamma \subseteq \Delta_1$ die Menge der Nachbarn von δ_1 in Δ_1. Im Fall $|\Gamma| \geq 2^{2k-3}$ wählen wir $\delta_2 \in \Delta_2 \subseteq \Gamma \subseteq \Delta_1 \setminus \{\delta_1\}$ mit $|\Delta_2| = 2^{2k-3}$. Anderenfalls wählen wir $\delta_2 \in \Delta_2 \subseteq \Delta_1 \setminus (\Gamma \cup \{\delta_1\})$ mit $|\Delta_2| = 2^{2k-3}$. Analog konstruieren wir $\delta_3 \in \Delta_3 \subseteq \Delta_2 \setminus \{\delta_2\}$ usw. Am Ende erhält man $\Delta_1, \ldots, \Delta_{2k-1} \subseteq \Omega_E$ und $\delta_i \in \Delta_i$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $|\Delta_i| \geq 2^{2k-1-i}$ für $i = 1, \ldots, 2k-1$,

(ii) $\Delta_{i+1} \subseteq \Delta_i \setminus \{\delta_i\}$ für $i = 1, \ldots, 2k-2$,

(iii) δ_i ist entweder zu jeder oder zu keiner Ecke in Δ_{i+1} benachbart für $i = 1, \ldots, 2k-2$.

Nach dem Schubfachprinzip existieren $1 \leq i_1 < \ldots < i_{k-1} \leq 2k-2$, sodass für $\delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_{k-1}}$ der gleiche Fall in (iii) eintritt. Wegen $\Delta_{i_1} \supseteq \Delta_{i_2} \supseteq \ldots \supseteq \Delta_{i_{k-1}} \supseteq \Delta_{2k-1}$ induzieren $\delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_{k-1}}, \delta_{2k-1}$ einen vollständigen oder trivialen Teilgraphen. □

Bemerkung 4.23. Offensichtlich ist die Bedingung $|\Omega_E| \geq 4^{k-1}$ in Satz 4.22 nicht optimal (betrachte $k = 2$). Bessere Abschätzungen erhält man durch folgende Verfeinerung: Die *Ramsey-Zahl* $R(k, l)$ ist die kleinste natürliche Zahl, sodass jeder Graph mit mindestens $R(k, l)$ Ecken $\mathcal{V}_k$ oder $\mathcal{T}_l$ als induzierten Teilgraphen enthält. Nach Satz 4.22 ist $R(k, l) \leq 4^{\max\{k,l\}-1}$. Offensichtlich ist $R(k, l) = R(l, k)$ (betrachte komplementären Graphen) und $R(1, l) = 1$. Jeder Graph mit l Ecken ist entweder vollständig oder besitzt $\mathcal{T}_2$ als induzierten Teilgraphen. Dies zeigt $R(2, l) = l$.

Lemma 4.24. *Für $k, l \geq 2$ gilt*

$$R(k, l) \leq R(k-1, l) + R(k, l-1) \leq \binom{k+l-2}{k-1}.$$

Sind $R(k-1, l)$ und $R(k, l-1)$ beide gerade, so ist $R(k, l) < R(k-1, l) + R(k, l-1)$.

Beweis. Sei Ω ein Graph mit $n := R(k-1, l) + R(k, l-1)$ Ecken. Sei $\omega \in \Omega_E$ beliebig. Sei $\Delta \subseteq \Omega_E$ die Menge der Nachbarn von ω und $\Gamma := \Omega_E \setminus (\Delta \cup \{\omega\})$. Dann ist

$$|\Delta| + |\Gamma| = |\Delta \dot\cup \Gamma| = |\Omega_E \setminus \{\omega\}| = n - 1 = R(k-1, l) + R(k, l-1) - 1.$$

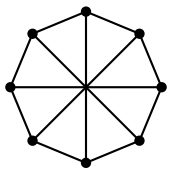
Es folgt $|\Delta| \geq R(k-1, l)$ oder $|\Gamma| \geq R(k, l-1)$. O. B. d. A. sei $|\Delta| \geq R(k-1, l)$. Besitzt Δ einen induzierten $\mathcal{V}_{k-1}$, so besitzt Ω einen $\mathcal{V}_k$, da ω zu allen Ecken in Δ benachbart ist. Anderenfalls besitzt Δ (und damit auch Ω) einen induzierten $\mathcal{T}_l$. Dies zeigt $R(k, l) \leq n$. Wegen $R(1, l) = R(k, 1) = 1 = \binom{l-1}{0} = \binom{k-1}{0}$ folgt induktiv

$$R(k, l) \leq R(k-1, l) + R(k, l-1) \leq \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1} \overset{1.5}{=} \binom{k+l-2}{k-1}.$$

Nehmen wir nun an, dass $R(k-1, l)$ und $R(k, l-1)$ gerade sind. Sei $|\Omega_E| = n - 1$. Das obige Argument funktioniert nur dann nicht, wenn $|\Delta| = R(k-1, l) - 1$ und $|\Gamma| = R(k, l-1) - 1$ für alle $\omega \in \Omega_E$ gilt. In diesem Fall ist Ω $\big(R(k-1, l) - 1\big)$-regulär und es folgt $|\Omega_K| = \frac{1}{2}(n-1)\big(R(k-1, l) - 1\big)$. Nach Voraussetzung ist dies aber keine ganze Zahl. Daher ist $R(k, l) \leq n - 1$. □

Bemerkung 4.25. Aus Lemma 4.24 und dem Satz von Catalan folgt $R(k,k) \leq \binom{2(k-1)}{k-1} = kC_k$. Man kann zeigen, dass diese Abschätzung etwas besser ist als Satz 4.22.

Beispiel 4.26. Aus Lemma 4.24 oder Beispiel 4.20 folgt $R(3,3) \leq 6$. Der $\mathcal{K}_5$ zeigt $R(3,3) > 5$ und damit $R(3,3) = 6$. Da $R(3,3)$ und $R(2,4) = 4$ gerade sind, folgt $R(3,4) \leq 9$ aus Lemma 4.24. Der folgende Graph („Wagenrad“ genannt) zeigt umgekehrt $R(3,4) \geq 9$:



Weitere bekannte Werte sind (ohne Beweis):

$$R(3,5) = 14, \qquad R(3,6) = 18, \qquad R(3,7) = 23, \qquad R(3,8) = 28,$$
$$R(3,9) = 36, \qquad R(4,4) = 18, \qquad R(4,5) = 25.$$

Satz 4.27 (Erdős)**.** *Für $k \geq 3$ gilt $R(k,k) > 2^{k/2}$.*

Beweis. Für $k = 3$ gilt $R(3,3) = 6 > 2\sqrt{2}$. Sei also $k \geq 4$ und $n := \lfloor 2^{k/2} \rfloor$. Sei v die Anzahl aller Graphen mit n (festen) Ecken, die $\mathcal{V}_k$ als (induzierten) Teilgraphen besitzen. Für die Wahl der k Ecken, die $\mathcal{V}_k$ induzieren, gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten. Man hat dann noch $2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$ Möglichkeiten, die verbleibenden Kanten zu wählen. Also ist $v \leq \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$ (man zählt viele Graphen auf diese Weise doppelt). Die Abbildung $\Omega \to \Omega^C$ zeigt, dass v auch die Anzahl der Graphen ist mit einem induzierten $\mathcal{T}_k$. Die Anzahl aller Graphen mit n (festen) Ecken ist $2^{\binom{n}{2}}$. Wegen $k \geq 4$ gilt $k! > 2^k$ (Induktion nach k). Dies zeigt

$$\begin{aligned} 2v \leq 2\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}} &= 2\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}} < 2\frac{n^k}{2^k} 2^{\binom{n}{2}-\frac{k(k-1)}{2}} \\ &\leq 2^{1+\frac{k^2}{2}-k} 2^{\binom{n}{2}-\frac{k(k-1)}{2}} = 2^{1-\frac{k}{2}} 2^{\binom{n}{2}} < 2^{\binom{n}{2}}. \end{aligned}$$

Also muss es Graphen mit n Ecken geben, die weder $\mathcal{V}_k$ noch $\mathcal{T}_k$ als induzierten Teilgraphen enthalten. Dies zeigt $R(k,k) \geq n + 1 > 2^{k/2}$. □

Bemerkung 4.28. Der Satz von Ramsey lässt sich wie folgt verallgemeinern: Für $r, s, t \in \mathbb{N}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft: Für jede n-elementige Menge M und jede Partition $\binom{M}{r} = \mathcal{M}_1 \dot\cup \dots \dot\cup \mathcal{M}_s$ existiert eine t-elementige Teilmenge $A \subseteq M$ mit $\binom{A}{r} \subseteq \mathcal{M}_i$ für ein $i \in \{1, \dots, s\}$.[7]

Satz 4.29 (Turán)**.** *Sei Ω ein Graph mit n Ecken ohne induzierten vollständigen Teilgraphen $\mathcal{V}_k$. Dann gilt*

$$|\Omega_K| \leq \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2}{2}.$$

[7] Siehe Skript zur Logik und Mengenlehre

Beweis.[8] Induktion nach n: Da jeder Graph $\mathcal{V}_1$ enthält, gilt $k \geq 2$. Im Fall $k = 2$ ist Ω trivial und $|\Omega_K| = 0$. Sei nun $k \geq 3$. Wir können annehmen, dass $|\Omega_K|$ so groß wie möglich ist, d. h. durch Hinzufügen einer Kante würde ein induzierter $\mathcal{V}_k$ entstehen. Unter dieser Annahme besitzt Ω einen induzierten Teilgraphen $\Delta \cong \mathcal{V}_{k-1}$. Der Graph $\Omega' := \Omega \setminus \Delta_E$ erfüllt die Induktionsvoraussetzung, d. h.

$$|\Omega'_K| \leq \frac{k-2}{k-1}\frac{(n-k+1)^2}{2}.$$

Jede Ecke $\alpha \in \Omega'$ hat höchstens $k-2$ Nachbarn in Δ_E, denn anderenfalls wird $\mathcal{V}_k$ von $\Delta_E \cup \{\alpha\}$ induziert. Dies zeigt

$$\begin{aligned}
|\Omega_K| &\leq |\Delta_K| + |\Omega'_K| + (n-k+1)(k-2) \\
&\leq \frac{1}{2}\Big((k-1)(k-2) + \frac{k-2}{k-1}(n-k+1)^2 + 2(n-k+1)(k-2)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{k-2}{k-1}\Big((k-1)^2 + n^2 + (k-1)^2 - 2n(k-1) + 2(n-k+1)(k-1)\Big) \\
&= \frac{k-2}{k-1}\cdot\frac{n^2}{2}
\end{aligned}$$

□

Beispiel 4.30. Im Gegensatz zum Satz von Ramsey ist die Abschätzung in Satz 4.29 optimal: Sei Ω ein Graph und $\Omega_E = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_{k-1}$ eine Partition mit $|\Delta_1| = \ldots = |\Delta_{k-1}| = s$. Außerdem sei

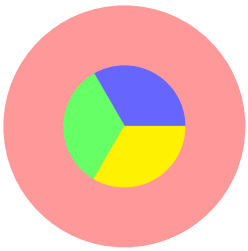
$$\Omega_K = \big\{\{\delta_i, \delta_j\} : \delta_i \in \Delta_i, \delta_j \in \Delta_j, i \neq j\big\}$$

(Ω ist also eine naheliegende Verallgemeinerung von $\mathcal{V}_{s,s}$). Offenbar erfüllt Ω die Voraussetzung von Satz 4.29 mit $n = s(k-1)$ und $|\Omega_K| = \binom{k-1}{2}s^2 = \frac{k-2}{k-1}\cdot\frac{n^2}{2}$. Man nennt Ω einen *Turán-Graphen*.

5 Färben von Graphen

Beispiel 5.1.

(i) Wie viele Farben benötigt man, um eine politische Landkarte zu färben, sodass je zwei benachbarte Länder unterschiedlich gefärbt sind? Drei Farben reichen nicht:



Reichen vier Farben?[9] Idee: Interpretiere die Hauptstädte der Länder als Ecken eines Graphen und verbinde zwei solche Ecken, wenn die Länder benachbart sind.

(ii) Können alle Vorlesungen der LUH so gelegt werden, dass kein Studierender einen Terminkonflikt hat? Idee: Jede Vorlesung ist eine Ecke eines Graphen. Verbinde zwei Vorlesungen, wenn sie mindestens einen gemeinsamen Hörer haben. Weise jeder Vorlesung ein Zeitfenster (Farbe) zu, sodass „benachbarte“ Vorlesungen unterschiedlich gefärbt sind.

[8] alternative Beweise stehen in [Aigner-Ziegler, Das BUCH der Beweise, Springer, 2014]
[9] Probieren Sie dazu dieses Spiel: kongregate.com

Definition 5.2. Sei C eine Menge (von Farben). Eine *Färbung* eines Multigraphen Ω ist eine Abbildung $f\colon \Omega_E \to C$, sodass benachbarte Ecken unterschiedlichen Wert haben, d. h. für $\{\alpha, \beta\} \in \Omega_K$ gilt $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Die *chromatische Zahl* $\chi(\Omega)$ ist die kleinste natürliche Zahl c, sodass eine Färbung mit $c = |C|$ Farben existiert.

Bemerkung 5.3. Da Mehrfachkanten die chromatische Zahl nicht ändern, können wir uns wie üblich auf einfache Graphen beschränken. Sind $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ die Komponenten von Ω, so gilt offenbar $\chi(\Omega) = \max\{\chi(\Omega_i) : i = 1, \dots, n\}$. Daher genügt es, zusammenhängende Graphen zu untersuchen.

Beispiel 5.4. Man zeigt leicht

Ω	$\mathcal{T}_n$	$\mathcal{V}_n$	$\mathcal{V}_{k,l}$	$\mathcal{G}_n$	$\mathcal{K}_{2n}$	$\mathcal{K}_{2n+1}$	$\mathcal{S}_n$
$\chi(\Omega)$	1	n	2	2	2	3	2

Lemma 5.5. *Für jeden Graphen Ω gilt $\chi(\Omega) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2|\Omega_K| + \frac{1}{4}}$.*

Beweis. Sei $f\colon \Omega_E \to C$ eine Färbung mit $|C| = \chi(\Omega)$. Für verschiedene Farben $c, d \in C$ muss es mindestens eine Kante zwischen den Urbildern $f^{-1}(c)$ und $f^{-1}(d)$ geben, denn anderenfalls könnte man $c = d$ setzen und mit $\chi(\Omega) - 1$ Farben auskommen. Daher gilt $|\Omega_K| \geq |\binom{C}{2}| = \chi(\Omega)(\chi(\Omega) - 1)/2$. Die Behauptung folgt aus der p-q-Formel für quadratische Gleichungen. □

Lemma 5.6. *Ein Graph Ω ist genau dann bipartit, wenn $\chi(\Omega) \leq 2$.*

Beweis. Sei Ω bipartit mit Zerlegung $\Omega_E = \Delta \cup \Gamma$. Dann genügt es, eine Farbe für Δ und eine für Γ zu wählen. Also ist $\chi(\Omega) \leq 2$. Sei umgekehrt $\chi(\Omega) \leq 2$. Im Fall $\chi(\Omega) = 1$ ist Ω trivial und bipartit. Sei also $\chi(\Omega) = 2$ und $f\colon \Omega_E \to C$ eine Färbung mit $C = \{c, d\}$. Sei $\Delta := \{\omega \in \Omega_E : f(\omega) = c\}$ und $\Gamma := \{\omega \in \Omega_E : f(\omega) = d\}$. Dann ist Ω bipartit mit Zerlegung $\Omega_E = \Delta \cup \Gamma$. □

Definition 5.7. Für einen Graphen Ω sei $\deg(\Omega) := \max\{\deg(\omega) : \omega \in \Omega\}$ der *Maximalgrad* von Ω.

Satz 5.8. *Für jeden Graphen Ω gilt $\chi(\Omega) \leq \deg(\Omega) + 1$.*

Beweis. Sei $\Omega_E := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ und $C := \{1, \dots, \deg(\Omega) + 1\}$. Wegen $\deg(\alpha_i) \leq \deg(\Omega) < |C|$ kann man

$$f(\alpha_i) := \min\ C \setminus \{f(\alpha_j) : 1 \leq j < i, \{\alpha_i, \alpha_j\} \in \Omega_K\}$$

für $i = 1, \dots, n$ definieren. Offenbar ist $f\colon \Omega_E \to C$ eine Färbung. □

Bemerkung 5.9. Beispiel 5.4 zeigt, dass die Abschätzung in Satz 5.8 im Allgemeinen nicht verbessert werden kann. Allerdings kann man die Ausnahmen genau klassifizieren. Dazu benutzen wir folgendes Argument. Sei Ω ein Graph mit $\deg(\Omega) \leq d$, in dem bereits einige Ecken mit höchstens d Farben gefärbt sind. Sei $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein Weg von ungefärbten Ecken. Da α_1 höchstens $d - 1$ gefärbte Nachbarn hat (α_2 ist ungefärbt), lässt sich α_1 färben. Analog kann man $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ nacheinander färben. Lediglich α_n lässt sich möglicherweise nicht färben.

Satz 5.10 (Brooks)**.** *Für jeden Graphen Ω gilt eine der folgenden Aussagen:*

(1) $\chi(\Omega) \leq \deg(\Omega)$.

(2) $\mathcal{V}_{\chi(\Omega)}$ *ist eine Komponente von* Ω*.*

(3) $\chi(\Omega) = 3$ *und* $\mathcal{K}_{2n+1}$ *ist eine Komponente von* Ω *für ein* $n \in \mathbb{N}$*.*

Beweis (Zając). Nach Satz 5.8 können wir $d := \deg(\Omega) = \chi(\Omega) - 1$ annehmen.

Schritt 1: $d \geq 3$.
Im Fall $d \leq 1$ ist $\mathcal{V}_{d+1}$ eine Komponente von Ω. Im Fall $d = 2$ ist jede Komponente von Ω eine Gerade oder ein Kreis. Kommt kein Kreis ungerader Länge vor, so wäre $\chi(\Omega) = 2$. Also gilt (3).

Sei nun Ω ein Gegenbeispiel mit möglichst wenigen Ecken.

Schritt 2: Für jeden Teilgraphen Δ von Ω mit $|\Delta_E| < |\Omega_E|$ gilt $\chi(\Delta) \leq d$.
Nach Satz 5.8 ist $\chi(\Delta) \leq \deg(\Delta) + 1 \leq d + 1$. Nehmen wir $\chi(\Delta) = d + 1$ an. Da Δ kein Gegenbeispiel ist und $\chi(\Delta) > 3$, ist $\mathcal{V}_{d+1}$ eine Komponente von Δ. Somit ist $\mathcal{V}_{d+1}$ ein Teilgraph von Ω. Wegen $\deg(\Omega) = d$ wäre $\mathcal{V}_{d+1}$ dann aber sogar eine Komponente von Ω.

Schritt 3: Ω ist d-regulär.
Sei $\alpha \in \Omega_E$ mit $\deg(\alpha) < d$. Nach Schritt 2 lässt sich $\Omega \setminus \{\alpha\}$ mit d Farben färben. Wegen $\deg(\alpha) < d$ lässt sich auch α färben, ohne eine neue Farbe zu benutzen. Dies widerspricht $\chi(\Omega) = d + 1$.

Da $\mathcal{V}_{d+1}$ kein Teilgraph von Ω ist, existiert ein Weg $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, sodass α_1 und α_3 nicht benachbart sind. Wir verlängern diesen Weg so weit es geht $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, ohne Ecken mehrfach zu benutzen. Dann sind alle Nachbarn von α_s in $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}\}$.

Fall 1: $\Omega_E = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$.
Wegen $d \geq 3$ existiert $i \notin \{1, 3\}$, sodass α_i ein Nachbar von α_2 ist. Nach Voraussetzung können wir α_1 und α_3 mit der gleichen Farbe färben. Anschließend färben wir $(\alpha_4, \alpha_5, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i)$ und $(\alpha_s, \alpha_{s-1}, \ldots, \alpha_i, \alpha_2)$ wie in Bemerkung 5.9 beschrieben. Zum Schluss können wir auch α_2 färben, denn α_2 hat zwei gleichfarbige Nachbarn (α_1 und α_3). Damit sind alle Ecken mit höchstens d Farben gefärbt. Widerspruch.

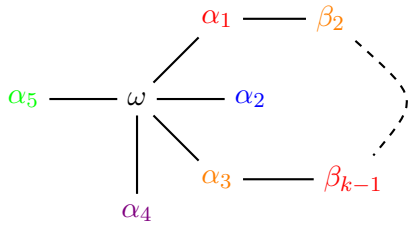
Fall 2: $\Omega_E \neq \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$.
Sei i minimal, sodass α_i ein Nachbar von α_s ist (alle Nachbarn von α_s liegen in $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}\}$). Nach Schritt 2 lässt sich $\Omega' := \Omega \setminus \{\alpha_i, \ldots, \alpha_s\}$ mit d Farben färben. Außerdem ist Ω zusammenhängend. Sei j maximal, sodass α_j einen Nachbarn β in Ω' hat. Dann ist $j < s$. Da α_{j+1} keinen Nachbarn in Ω' hat, können wir α_{j+1} mit der gleichen Farbe wie β färben. Nun wenden wir Bemerkung 5.9 auf den Weg $(\alpha_{j+2}, \ldots, \alpha_s, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_j)$ an. Anschließend können wir auch α_j färben, denn α_j hat zwei gleichfarbige Nachbarn (α_{j+1} und β). Damit sind alle Ecken mit höchstens d Farben gefärbt. Widerspruch. □

Satz 5.11 (Heawood)**.** *Für jeden planaren Graphen* Ω *gilt* $\chi(\Omega) \leq 5$*.*

Beweis. O. B. d. A. sei Ω zusammenhängend. Induktion nach $e := |\Omega_E|$. Für $e \leq 5$ gilt $\chi(\Omega) \leq \chi(\mathcal{V}_5) = 5$. Sei also $e \geq 6$. Wir betrachten eine planare Einbettung von Ω. Nach Lemma 4.8 existiert $\omega \in \Omega_E$ mit $\deg(\omega) \leq 5$. Für den planaren Graphen $\Omega' = \Omega \setminus \{\omega\}$ gilt $\chi(\Omega') \leq 5$ nach Induktion. Sei $f \colon \Omega'_E \to C = \{1, \ldots, 5\}$ eine entsprechende Färbung. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Omega'_E$ die Nachbarn von ω im Uhrzeigersinn nummeriert. Im Fall $|\{f(\alpha_i) : i = 1, \ldots, n\}| \leq 4$ können wir $f(\omega) \in C \setminus \{f(\alpha_i) : i = 1, \ldots, n\}$ wählen. Sei also $n = 5$ und o. B. d. A. $f(\alpha_i) = i$ für $i = 1, \ldots, 5$. Sei Ω_{13} der von den Ecken $\beta \in \Omega'_E$ mit $f(\beta) \in \{1, 3\}$ induzierte Teilgraph von Ω. Analog definieren wir Ω_{24}.

Fall 1: α_1 und α_3 liegen in verschiedenen Komponenten Δ und Γ von Ω_{13}.
Hier vertauschen wir die Farben 1 und 3 in Δ und setzen $f(\omega) = 1$. Dann gilt $\chi(\Omega) \leq 5$.

Fall 2: α_1 und α_3 sind in Ω_{13} verbunden.
Sei $(\alpha_1 = \beta_1, \dots, \beta_k = \alpha_3)$ ein kürzester Weg in Ω_{13}. Dann ist $(\beta_1, \dots, \beta_k, \omega, \alpha_1)$ ein Kreis, in dessen Inneren entweder α_2 oder α_4, α_5 liegt. Insbesondere sind α_2 und α_4 nicht in Ω_{24} verbunden. Wir können dann analog wie in Fall 1 argumentieren.



□

Satz 5.12 (Vierfarbensatz)**.** *Für jeden planaren Graphen* Ω *gilt* $\chi(\Omega) \leq 4$.

Beweis. Der Beweis von Appel und Haken aus dem Jahr 1976 war der erste Computerbeweis in der Mathematik. Es mussten fast zweitausend Fälle überprüft werden. 1996 hat man die Anzahl der Fälle auf 633 reduziert. Nach wie vor kennt man keinen Beweis, der ohne den Computer auskommt. □

Bemerkung 5.13.

(i) Der Vierfarbensatz impliziert die uns bereits bekannte Tatsache, dass $\mathcal{V}_5$ nicht planar ist (Beispiel 4.9).

(ii) Die Bestimmung der chromatischen Zahl eines (nicht unbedingt planaren) Graphen ist NP-vollständig (man kann also wieder eine Million Dollar verdienen…). Selbst die Frage, ob ein planarer Graph chromatische Zahl 3 hat, ist NP-vollständig.

Definition 5.14. Sei Ω ein Graph und C eine Menge von Farben. Eine *Kantenfärbung* von Ω ist eine Abbildung $f\colon \Omega_K \to C$ mit $f(A) \neq f(B)$ für alle $A, B \in \Omega_K$ mit $A \neq B$ und $A \cap B \neq \varnothing$. Eine Kante mit Farbe c nennen wir auch *c-Kante*. Die minimale Anzahl an Farben, die man für eine Kantenfärbung benötigt, nennt man den *chromatischen Index* $\chi'(\Omega)$.

Bemerkung 5.15.

(i) Offensichtlich ist $\chi'(\Omega) \geq \deg(\Omega)$ für jeden Graphen Ω.

(ii) Im Fall $\deg(\Omega) \leq 2$ ist jede Komponente von Ω eine Gerade oder ein Kreis. Man sieht dann leicht: $\chi'(\Omega) \leq \chi(\Omega) \leq 3$.

(iii) Der Satz von Ramsey lässt sich mit Farben interpretieren: Sei $k \in \mathbb{N}$ und $n \geq 4^{k-1}$. Wir färben die Kanten von $\mathcal{V}_n$ beliebig mit rot und blau (ohne die Bedingung der Kantenfärbung zu erfüllen). Dann lassen sich stets k Ecken auswählen, die nur durch rote oder nur durch blaue Kanten verbunden sind (wende Satz 4.22 auf den „roten“ Teilgraphen an).

(iv) Man kann die Kanten von Ω als Ecken eines neuen Graphen $\widehat{\Omega}$ auffassen. Dabei seien zwei Ecken in $\widehat{\Omega}$ benachbart, wenn die entsprechenden Kanten in Ω eine gemeinsame Ecke haben. Man nennt $\widehat{\Omega}$ den *Kantengraphen* von Ω. Es gilt $\chi'(\Omega) = \chi(\widehat{\Omega})$. Wegen $\deg(\widehat{\Omega}) \leq 2\deg(\Omega) - 2$ erhält man $\chi'(\Omega) \leq 2\deg(\Omega) - 1$ aus Satz 5.8. Um diese Abschätzung zu verschärfen, benutzen wir folgendes Argument:

Seien e, f Farben einer Kantenfärbung. Sei $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ein Weg, dessen Kanten $\{\alpha_i, \alpha_{i+1}\}$ abwechselnd mit e und f gefärbt sind. Angenommen der Weg lässt sich weder vorn noch hinten verlängern, ohne die alternierende Färbung zu verlieren. Dann darf man die Farben e und f auf dem Weg $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ vertauschen, ohne die Färbungseigenschaft zu verletzen.

Satz 5.16 (König). *Für jeden bipartiten Graphen Ω gilt $\chi'(\Omega) = \deg(\Omega)$.*

Beweis. Wir müssen $\chi'(\Omega) \leq \deg(\Omega) =: d$ zeigen. Induktion nach $|\Omega_K|$. Ist Ω trivial, so braucht man keine Farbe. Sei daher $A := \{\alpha, \beta\} \in \Omega_K$ und $\Omega' := \Omega \setminus A$. Nach Induktion besitzt Ω' eine Kantenfärbung mit $d \geq \deg(\Omega')$ Farben. In Ω' gilt $\deg(\alpha), \deg(\beta) < d$. Daher „fehlt“ mindestens eine Farbe e an α (d. h. es gibt keine e-Kante in Ω', die α enthält). Analog fehle die Farbe f an β. Im Fall $e = f$ können wir A mit e färben und sind fertig. Sei also $e \neq f$. Außerdem können wir annehmen, dass α eine f-Kante besitzt. Ausgehend von α konstruieren wir einen maximalen Weg $(\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mit alternierenden f- und e-Kanten (da e an α fehlt, lässt sich der Weg auch nicht am Beginn verlängern). Im Fall $\alpha_n = \beta$ ist n gerade, da Ω bipartit ist. Dann wäre $\{\alpha_{n-1}, \alpha_n\}$ eine f-Kante, was nicht sein kann, da f an β fehlt. Also ist $\alpha_n \neq \beta$. Wie in Bemerkung 5.15 beschrieben darf man e und f auf dem Weg vertauschen. Anschließend fehlt f an α und an β. Wir können also $\{\alpha, \beta\}$ mit f färben. □

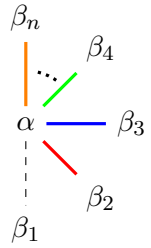
Satz 5.17 (Vizing). *Für jeden Graphen Ω gilt $\chi'(\Omega) \in \{\deg(\Omega), \deg(\Omega) + 1\}$.*

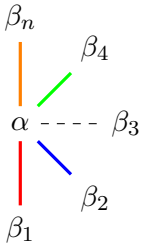
Beweis. Wir zeigen $\chi'(\Omega) \leq \deg(\Omega) + 1$ durch Induktion nach $|\Omega_K|$. O. B. d. A. sei $\Omega_K \neq \varnothing$ und $d := \deg(\Omega) \geq 1$. Sei $A = \{\alpha, \beta\} \in \Omega_K$ und $\Omega' := \Omega \setminus A$. Nach Induktion existiert eine Kantenfärbung $\varphi\colon \Omega'_K \to C$ mit $|C| = d + 1$ Farben. Wie im Beweis von Satz 5.16 fehlt an jeder Ecke mindestens eine Farbe. Angenommen die Farbe e fehlt an α und f fehlt an β. Ein maximaler Weg mit alternierenden e- und f-Kanten beginnend von α muss dann bei β enden, denn anderenfalls könnte man wie in Bemerkung 5.15 e und f auf diesem Weg vertauschen und anschließend A mit f färben.

Wir wählen eine möglichst lange Folge von verschiedenen Nachbarn $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_n$ von α, sodass $\varphi(\{\alpha, \beta_{i+1}\})$ an β_i fehlt für $i = 1, \ldots, n-1$. Auf den Graphen $\Omega_i := \Omega \setminus \{\{\alpha, \beta_i\}\}$ definieren wir eine Färbung

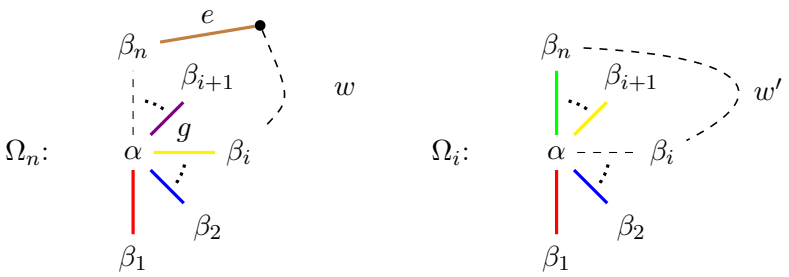
$$\varphi_i(B) := \begin{cases} \varphi(\{\alpha, \beta_{j+1}\}) & \text{falls } 1 \leq j \leq i-1 \text{ und } B = \{\alpha, \beta_j\}, \\ \varphi(B) & \text{sonst} \end{cases}$$

für $i = 1, \ldots, n$. In jeder dieser Färbungen fehlen die gleichen Farben an α wie in Ω'.

$\Omega' = \Omega_1$: 

Ω_3: 

Sei g eine an β_n fehlende Farbe. Der maximale Weg w mit alternierenden e- und g-Kanten in Ω_n beginnend von β_n muss an α enden (nach dem ersten Teil des Beweises). Die letzte Kante auf diesem Weg, sagen wir $\{\alpha, \gamma\}$, trägt Farbe g. Da die Folge $\beta_1, \ldots, \beta_n$ nicht verlängert werden kann, muss $\gamma = \beta_i$ mit $1 \leq i < n$ gelten. Nun gilt $g = \varphi_n(\{\alpha, \beta_i\}) = \varphi(\{\alpha, \beta_{i+1}\})$.

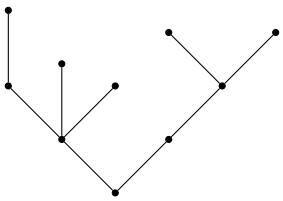


Nach Wahl von β_{i+1} bedeutet dies, dass g in φ an β_i fehlt. Somit fehlt g auch in φ_i an β_i. Wir können also den alternierenden Weg w' mit g- und e-Kanten in Ω_i aus β_i betrachten. Der erste Wegabschnitt muss mit w übereinstimmen (in umgekehrter Richtung). Bzgl. $\varphi_1 = \varphi$ und φ_i fehlt jedoch Farbe g an β_n. Daher muss w' in β_n enden. Nach dem ersten Teil des Beweises hätte w' jedoch in α enden müssen. Widerspruch. □

6 Bäume

Definition 6.1. Ein zusammenhängender Graph Ω heißt *Baum*, falls Ω keinen Kreis enthält, d. h. je zwei Ecken von Ω sind durch genau einen Weg ohne doppelte Ecken verbunden. Ecken vom Grad ≤ 1 heißen dann (treffenderweise) *Blätter*.

Beispiel 6.2. Geraden und Sterne sind stets Bäume. Dagegen sind $\mathcal{T}_n$, $\mathcal{V}_n$ und $\mathcal{K}_n$ für $n \geq 3$ keine Bäume. Typische Bäume sind Stammbäume:



Bemerkung 6.3. Nach Satz 4.5 ist jeder Baum Ω ein bipartiter Graph. Insbesondere ist $\chi(\Omega) \leq 2$ und $\chi'(\Omega) = \deg(\Omega)$ nach Satz 5.16.

Satz 6.4. *Ein zusammenhängender Graph Ω mit n Ecken ist genau dann ein Baum, wenn $|\Omega_K| = n - 1$ gilt. Insbesondere hat jeder zusammenhängende Graph mit n Ecken mindestens $n - 1$ Kanten.*

Beweis. Induktion nach n: Für $n = 1$ ist die Behauptung klar. Sei also Ω ein Baum mit $n \geq 2$ Ecken. Sei $\omega = \omega_1, \ldots, \omega_k$ ein Weg maximaler Länge ohne doppelte Ecken. Dann ist ω ein Blatt, denn anderenfalls könnte man den Weg um eine Ecke verlängern. Nach Induktion ist $\Omega \setminus \{\omega\}$ ein Baum mit $n - 1$ Ecken und $n - 2$ Kanten. Also ist $|\Omega_K| = n - 1$.

Sei umgekehrt Ω ein zusammenhängender Graph mit n Ecken und k Kanten. Nehmen wir an, dass Ω einen Kreis Δ enthält. Dann kann man eine Kante von Δ entfernen, sodass Ω immer noch zusammenhängend

ist. Dies kann man so oft wiederholen, bis man einen Baum erhält. Nach dem ersten Teil gilt also $k \geq n-1$, wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn Ω bereits ein Baum ist. □

Bemerkung 6.5.

(i) Aus dem Beweis von Satz 6.4 geht hervor, dass jeder Baum mindestens ein Blatt besitzt. Durch Induktion nach der Eckenzahl folgt leicht, dass jeder Baum planar ist (in einer planaren Einbettung lässt sich an jeder Ecke ein Blatt anfügen). Dies erhält man natürlich auch aus Kuratowski, da $\mathcal{V}_5$ und $\mathcal{V}_{3,3}$ Kreise enthalten.

(ii) Bekanntlich gibt es genau $2^{\binom{n}{2}} = 2^{n(n-1)/2}$ Graphen mit n vorgegebenen Ecken (ohne Berücksichtigung von Isomorphie). Wir zählen, wie viele solche Graphen Bäume sind.

Satz 6.6 (Cayley-Formel)**.** *Es gibt genau n^{n-2} Bäume mit Eckenmenge $\{1,\dots,n\}$.*

Beweis[10] (Prüfer). O. B. d. A. sei $n \geq 3$. Für eine n-elementige Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ sei $B(M)$ die Menge aller Bäume Ω mit $\Omega_E = M$. Wir konstruieren zueinander inverse Bijektionen

$$f\colon B(M) \to M^{n-2},$$
$$g\colon M^{n-2} \to B(M)$$

durch Induktion nach n. Für $n=3$ ist $\Omega \in B(M)$ eine Gerade und wir definieren $f(\Omega)$ als Mittelpunkt von Ω (die einzige Ecke vom Grad 2). Ist umgekehrt $\alpha \in M = M^{n-2}$ gegeben, so definieren wir $g(\alpha)$ als Gerade mit Mittelpunkt α. Sicher ist dann $f \circ g = \mathrm{id}_{M^{n-2}}$ und $g \circ f = \mathrm{id}_{B(M)}$.

Sei nun $n \geq 4$ und $\Omega \in B(M)$ gegeben. Sei $\alpha \in \Omega_E = M$ das Blatt mit dem kleinsten Wert in M und sei β der einzige Nachbar von α. Wir definieren induktiv $f(\Omega) := \big(\beta, f(\Omega \setminus \{\alpha\})\big)$. Mit Induktion folgt, dass $M \setminus f(\Omega)$ die Menge der Blätter von Ω ist. Sei umgekehrt $(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-2}) \in M^{n-2}$ gegeben. Wir setzen $\alpha := \min M \setminus \{\alpha_1,\dots,\alpha_{n-2}\}$. Induktiv existiert bereits $\Delta := g(\alpha_2,\dots,\alpha_{n-2}) \in B\big(M \setminus \{\alpha\}\big)$ und wir können

$$g(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-2}) := \big(M, \Delta_K \cup \{\{\alpha_1,\alpha\}\}\big) \in B(M)$$

definieren.

Um $g \circ f$ zu berechnen, wählen wir $\Omega \in B(M)$, das kleinste Blatt $\alpha \in \Omega_E$, den Nachbarn β von α und $\Delta := \Omega \setminus \{\alpha\} \in B(M \setminus \{\alpha\})$. Da $M \setminus f(\Omega)$ die Menge der Blätter von Ω ist, gilt $\min M \setminus f(\Omega) = \alpha$. Induktiv gilt $g(f(\Delta)) = \Delta$ und es folgt

$$g\big(f(\Omega)\big) = g\big(\beta, f(\Delta)\big) = \big(M, \Delta_K \cup \{\{\beta,\alpha\}\}\big) = \Omega.$$

Sei umgekehrt $(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-2}) \in M^{n-2}$, $\alpha := \min M \setminus \{\alpha_1,\dots,\alpha_{n-2}\}$ und $\Delta := g(\alpha_2,\dots,\alpha_{n-2}) \in B(M \setminus \{\alpha\})$. Induktiv ist $f(\Delta) = (\alpha_2,\dots,\alpha_{n-2})$. Also sind $M \setminus \{\alpha,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-2}\}$ die Blätter von Δ und $M \setminus \{\alpha_1,\dots,\alpha_{n-2}\}$ sind die Blätter von $g(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-2})$. Daher ist α das kleinste Blatt von $g(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-2})$ und es folgt

$$f\big(g(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-2})\big) = f\big(M, \Delta_K \cup \{\{\alpha_1,\alpha\}\}\big) = \big(\alpha_1, f(\Delta)\big) = (\alpha_1,\dots,\alpha_{n-2}).$$

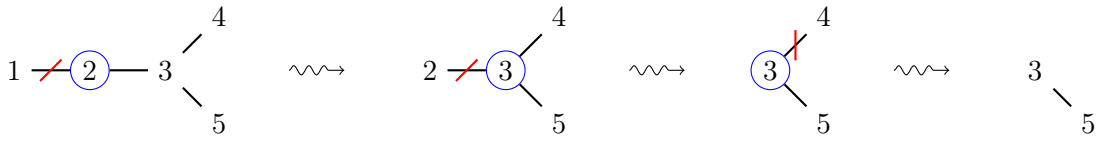
Somit sind f und g zueinander inverse Bijektionen. Insbesondere ist f bijektiv und $|B(M)| = |M^{n-2}| = n^{n-2}$. □

[10] alternative Beweise stehen in [Aigner-Ziegler, Das BUCH der Beweise, Springer, 2014]

Bemerkung 6.7. Mit der Bezeichnung aus obigem Beweis nennt man $f(\Omega)$ den *Prüfer-Code* eines Baums Ω.

Beispiel 6.8.

(i) Der Prüfer-Code von



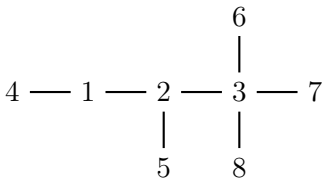
ist $(2, 3, 3)$. Wie im Beweis behauptet kommen die Blätter nicht im Prüfer-Code vor.

(ii) Sei umgekehrt der Prüfer-Code $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2})$ gegeben und $M = \{1, \ldots, n\}$. Die Konstruktion des entsprechenden Baumes geschieht nach folgendem Algorithmus: Für $k = 1, \ldots, n-2$ verbinde man die Ecken α_k und

$$\beta_k := \min M \setminus \big(\{\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}\} \cup \{\alpha_k, \ldots, \alpha_{n-2}\}\big)$$

mit einer Kante. Anschließend verbinde man die verbleibenden beiden Ecken in $M \setminus \{\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$. Für den Prüfer-Code $(1, 2, 2, 3, 3, 3)$ erhält man:

α_k	1	2	2	3	3	3
β_k	4	1	5	?		



Bemerkung 6.9.

(i) Sei Ω ein Baum mit $\Omega_E = \{1, \ldots, n\}$ und sei d_i der Grad der Ecke $i \in \{1, \ldots, n\}$. Bei der Konstruktion des Prüfer-Codes werden $d_i - 1$ Nachbarn von i entfernt und jedes Mal i in $f(\Omega)$ geschrieben. Anschließend ist i ein Blatt und taucht nicht mehr in $f(\Omega)$ auf. Also ist $d_i - 1$ die Vielfachheit von i im Prüfer-Code. Nach Satz 6.4 hat Ω genau $n-1$ Kanten und es folgt $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$ aus dem Handschlaglemma. Die Anzahl der Bäume mit vorgegebenen Eckengraden $d_1, \ldots, d_n$ ist somit

$$\binom{n-2}{d_1 - 1, \ldots, d_n - 1}$$

nach Satz 1.18.

(ii) Die Multimenge $\{d_1 - 1, \ldots, d_n - 1\}$ beschreibt eine Partition von $n-2$ (wenn man Nullen weglässt) und umgekehrt gibt es zu jeder Partition von $n-2$ einen entsprechenden Baum. Isomorphe Bäume liefern offenbar die gleiche Multimenge $\{d_1, \ldots, d_n\}$. Die Anzahl der Isomorphieklassen von Bäumen der Ordnung n ist also mindestens $p(n-2)$.

(iii) Seien $e_1, \ldots, e_s$ die Vielfachheiten in der Multimenge $\{d_1, \ldots, d_n\}$ (also $e_1 + \ldots + e_s = n$). Dann kann man die Zahlen $d_1, \ldots, d_n$ auf

$$\binom{n}{e_1, \ldots, e_s}$$

Weisen anordnen. Die Anzahl der Bäume, deren Eckengrade die Multimenge $\{d_1, \ldots, d_n\}$ liefern, ist somit

$$\binom{n-2}{d_1 - 1, \ldots, d_n - 1}\binom{n}{e_1, \ldots, e_s}.$$

Für $n = 7$ und $\{d_1, \ldots, d_7\} = \{1, 1, 1, 2, 2, 2, 3\}$ erhält man

$$\binom{5}{1,1,1,2}\binom{7}{3,3,1} = \frac{5!7!}{2!3!3!} = 5! \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 120 \cdot 70 = 8.400.$$

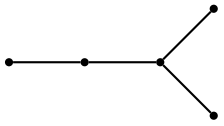
Satz 6.10. *Die Anzahl der Bäume mit n Ecken, von denen k Blätter sind, ist* $\left\{ {n-2 \atop n-k} \right\} \frac{n!}{k!}$.

Beweis. Für die Wahl der Blätter $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \{1, \ldots, n\}$ von Ω gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten. Seien $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$ die verbleibenden Ecken. Der Prüfer-Code von Ω entspricht dann einer surjektiven Abbildung $\{1, \ldots, n-2\} \to \{\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n\}$. Die gesuchte Anzahl von Bäumen ist daher

$$\binom{n}{k}\left\{ {n-2 \atop n-k} \right\}(n-k)! = \left\{ {n-2 \atop n-k} \right\}\frac{n!}{k!}$$

nach Satz 2.35. □

Beispiel 6.11. Nach Satz 6.6 gibt es $5^3 = 125$ Bäume mit Eckenmenge $\{1, \ldots, 5\}$. Wir bestimmen die Isomorphieklassen, indem wir die Partitionen von 3 durchgehen:

- Die Partition (1^3) liefert die $\binom{5}{2,3} = 10$ möglichen Gradfolgen $(1, 1, 2, 2, 2), \ldots, (2, 2, 2, 1, 1)$. Es gibt daher
$$10\binom{3}{1,1,1} = 60$$
solche Bäume, die alle zur Gerade $\mathcal{G}_5$ isomorph sind (das sind die Bäume mit genau zwei Blättern).
- Die Partition $(2, 1)$ liefert $\binom{5}{1,1,3} = 20$ mögliche Gradfolgen $(1, 1, 1, 2, 3), \ldots, (3, 2, 1, 1, 1)$. Dies ergibt
$$20\binom{3}{1,2} = 60$$
Bäume, die alle zu

isomorph sind (das sind die Bäume mit genau drei Blättern).
- Die Partition (3) liefert $\binom{5}{4,1} = 5$ Gradfolgen $(1, 1, 1, 1, 4), \ldots, (4, 1, 1, 1, 1)$ und 5 Bäume, die alle zu $\mathcal{S}_5$ isomorph sind (das sind die Bäume mit genau vier Blättern).

Es gibt daher nur drei Bäume mit fünf Ecken bis auf Isomorphie (vgl. `https://oeis.org/A000055`).

Bemerkung 6.12. Im Unterschied zu Satz 3.10 haben Erdős und Rényi auch bewiesen, dass fast alle Bäume symmetrisch sind. Dafür zeigten sie, dass die meisten Bäume *Kirschen* besitzen. Dies sind zwei Blätter mit gemeinsamen Nachbarn. Vertauschung dieser Blätter liefert einen nicht-trivialen Automorphismus.

Beispiel 6.13. In einem neu angelegten Wohngebiet sollen Straßenlaternen mit Strom versorgt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Laternen mit möglichst wenigen Stromkabeln zu verbinden?

Definition 6.14. Sei Ω ein Multigraph mit Adjazenzmatrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ und Eckengraden $d_1, \dots, d_n$.

- Die Matrix
$$L(\Omega) := (\delta_{ij} d_i - a_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} d_1 & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ -a_{n,1} & \cdots & -a_{n,n-1} & d_n \end{pmatrix}$$
heißt *Laplace-Matrix* von Ω.
- Ein (einfacher) Teilgraph Δ von Ω heißt *Spannbaum* von Ω, falls Δ ein Baum ist und $\Omega_E = \Delta_E$.

Beispiel 6.15. Offenbar können nur zusammenhängende Multigraphen Spannbäume besitzen. Durch Entfernen geeigneter Kanten (wie im Beweis von Satz 6.4) sieht man, dass jeder zusammenhängende Multigraph Ω einen Spannbaum besitzt. Die Anzahl der Spannbäume ist höchstens $\binom{|\Omega_K|}{|\Omega_E|-1}$ nach Satz 6.4. Insbesondere ist jeder Baum sein eigener Spannbaum. Die Spannbäume des vollständigen Graphen $\mathcal{V}_n$ sind genau die n^{n-2} Bäume mit n Ecken.

Satz 6.16 (Kirchhoffs Matrix-Baum-Satz)**.** *Sei Ω ein Multigraph mit Laplace-Matrix L. Sei L' die Matrix, die durch Streichen der letzten Zeile und letzten Spalte aus L entsteht. Dann ist* $\det(L')$ *die Anzahl der Spannbäume in Ω.*

Beweis. Induktion nach $|\Omega_K|$: Im Fall $\Omega = \mathcal{T}_n$ sind L und L' Nullmatrizen und es gibt nur einen Spannbaum, falls $n = 1$. Wir interpretieren dann die Determinante der 0×0-Matrix L' als 1. Sei also $\Omega_K \neq \varnothing$. Wir nummerieren die Ecken von Ω so, dass die letzten beiden Ecken mit einer Kante a verbunden sind. Die Spannbäume von Ω, die a nicht enthalten, sind genau die Spannbäume von $\Omega' := \Omega \setminus \{a\}$. Deren Anzahl ist $\det(L(\Omega')')$ nach Induktion. Sei Δ der Graph, der aus Ω entsteht, indem man a entfernt und die letzten beiden Ecken zusammenführt[11] (dadurch können Mehrfachkanten entstehen). Jeder Spannbaum von Ω, der a enthält, lässt sich nun eindeutig als Spannbaum von Δ interpretieren. Nach Induktion besitzt Ω also genau $\det(L(\Omega')') + \det(L(\Delta)')$ Spannbäume.

Sei $L = (x_{ij}) \in \mathbb{Q}^{n\times n}$. Da die Determinante in der letzten Spalte linear ist, gilt

$$\begin{aligned} \det L' &= \det \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1,1} & \cdots & x_{n-1,n-1} - 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n-2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-2,1} & \cdots & x_{n-2,n-2} & 0 \\ x_{n-1,1} & \cdots & x_{n-1,n-2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det(L(\Omega')') + \det \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n-2} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n-2,1} & \cdots & x_{n-2,n-2} \end{pmatrix} \\ &= \det(L(\Omega')') + \det(L(\Delta)') \end{aligned}$$

mit dem Entwicklungssatz von Laplace. □

Bemerkung 6.17.

(i) Offenbar kann man im Matrix-Baum-Satz anstelle der letzten Zeile und Spalte genauso gut die i-te Zeile und Spalte von L streichen.

[11] man spricht von *Kantenkontraktion*

(ii) Da $L = L(\Omega)$ reell und symmetrisch ist, sind alle Eigenwerte reell. Nach Konstruktion ist jede Zeilensumme (und Spaltensumme) von L gleich 0. Daher ist $(1, \dots, 1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 0.

Satz 6.18. *Sei Ω ein Multigraph und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von $L(\Omega)$ (mit Vielfachheiten), sodass $\lambda_n = 0$. Dann besitzt Ω genau $\frac{1}{n}\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}$ Spannbäume.*

Beweis. Das charakteristische Polynom von $L = L(\Omega)$ hat die Form

$$\chi := \det(X1_n - L) = X(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_{n-1}) = (-1)^{n-1}\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}X + \dots .$$

Wir addieren die Zeilen $1, \dots, n-1$ von $X1_n - L$ auf die n-te Zeile. Dadurch verändert sich die Determinante nicht. Da die Spaltensummen von L verschwinden, hat die letzte Zeile der neuen Matrix die Form $(X, \dots, X)$. Wir extrahieren nun den Faktor X aus der letzten Zeile und erhalten eine Matrix $M(X)$, deren letzte Zeile $(1, \dots, 1)$ ist (die anderen Zeilen stimmen mit $X1_n - L$ überein). Es gilt nun $\chi = X \det(M(X))$. Den konstanten Term von $\det(M(X))$ erhält man, indem man $X = 0$ setzt. Der Koeffizient $(-1)^{n-1}\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}$ von X in χ ist daher $\det(M(0))$. Wir addieren nun die Spalten $1, \dots, n-1$ von $M(0)$ zur letzten Spalte von $M(0)$. Dadurch ändert sich $\det(M(0))$ nicht und die letzte Spalte hat die Form $(0, \dots, 0, n)^{\mathrm{t}}$. Der Entwicklungssatz von Laplace zeigt

$$(-1)^{n-1}\lambda_1 \dots \lambda_{n-1} = \det(M(0)) = n \det(-L') = n(-1)^{n-1} \det(L').$$

Die Behauptung folgt aus dem Matrix-Baum-Satz. □

Beispiel 6.19.

(i) Ist Ω nicht zusammenhängend, so hat die Laplace-Matrix bei geeigneter Nummerierung der Ecken Blockdiagonalgestalt $L = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$. Nun sind $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ und $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ zwei linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert 0. Die algebraische Vielfachheit von 0 ist daher mindestens 2. Nach Satz 6.18 besitzt Ω keine Spannbäume in Übereinstimmung mit Beispiel 6.15.

(ii) Für $\Omega = \mathcal{V}_n$ ist $L = L(\Omega) = n1_n - J$, wobei wie üblich $J = (1)_{i,j}$. Die Eigenwerte von L sind 0 mit Vielfachheit 1 und n mit Vielfachheit $n-1$ (siehe Beweis von Satz 2.2). Aus Satz 6.18 folgt also die Cayley-Formel.

(iii) Wir wollen nun die Straßenlaternen aus Beispiel 6.13 so verbinden, dass die Gesamtlänge der benötigten Kabel möglichst klein ist.

Definition 6.20. Sei Ω ein (einfacher) Graph. Eine Funktion $w\colon \Omega_K \to \mathbb{R}$ mit $w(a) \geq 0$ für alle $a \in \Omega_K$ nennen wir *Gewichtsfunktion* auf Ω. Die Zahl $w(\Omega) := \sum_{a \in \Omega_K} w(a)$ sei das *Gesamtgewicht* von Ω.

Satz 6.21 (KRUSKAL-Algorithmus)**.** *Sei Ω ein zusammenhängender Graph mit n Ecken und Gewichtsfunktion w. Der folgende (greedy[12]) Algorithmus konstruiert einen Spannbaum Δ von Ω mit minimalem Gesamtgewicht $w(\Delta)$:*

(1) Setze $\Delta_K := \varnothing$.

(2) Für $i = 1, \dots, n-1$ tue:

- *Bestimme $A := \{a \in \Omega_K \setminus \Delta_K : (\Omega_E, \Delta_K \cup \{a\})$ besitzt keinen Kreis$\}$.*
- *Wähle $a_i \in A$ mit $w(a_i) = \min\{w(a) : a \in A\}$.*

[12] deutsch: gierig

- *Setze* $\Delta_K := \Delta_K \cup \{a_i\}$.

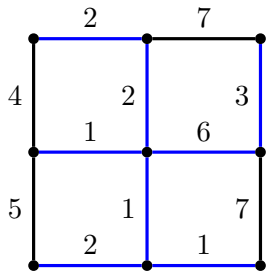
Beweis. Angenommen im i-ten Schleifendurchlauf gilt $A = \varnothing$. Dann muss Δ bereits zusammenhängend sein, denn anderenfalls könnte man mit einer neuen Kante zwei Komponenten verbinden, ohne dass ein Kreis entsteht. Satz 6.4 liefert den Widerspruch $i - 1 = |\Delta_K| \geq n - 1$. Also ist stets $A \neq \varnothing$ und a_i kann geeignet gewählt werden. Am Ende des Algorithmus ist $|\Delta_K| = n - 1$. Jede Komponente Γ von Δ hat höchstens $|\Gamma_E| - 1$ Kanten, da sonst ein Kreis vorhanden wäre. Da n die Summe über $|\Gamma_E|$ ist, kann es nur eine Komponente geben, d. h. Δ ist tatsächlich ein Spannbaum.

Es bleibt zu zeigen, dass $w(\Delta)$ minimal ist. Unter allen Spannbäumen mit minimalem Gesamtgewicht wählen wir Δ', sodass $|\Delta_K \cap \Delta'_K|$ möglichst groß ist. Nehmen wir $\Delta \neq \Delta'$ an. Sei i minimal mit $a_i \notin \Delta'_K$. Nun muss $\Gamma := (\Omega_E, \Delta'_K \cup \{a_i\})$ einen Kreis besitzen. Eine Kante dieses Kreises, nennen wir sie b_i, gehört nicht zu Δ_K. Durch Entfernen von b_i erhält man den Spannbaum $\Gamma' := \Gamma \setminus \{b_i\}$ mit

$$w(\Delta') \leq w(\Gamma') = w(\Delta') + w(a_i) - w(b_i).$$

Dies zeigt $w(b_i) \leq w(a_i)$. Da $a_1, \ldots, a_{i-1}, b_i$ Kanten des Spannbaums Δ' sind, können sie keinen Kreis enthalten. Da der Algorithmus a_i anstelle von b_i im i-ten Schleifendurchlauf gewählt hat, gilt $w(b_i) \geq w(a_i)$. Insgesamt ist also $w(b_i) = w(a_i)$. Somit ist auch Γ' ein Spannbaum mit minimalem Gesamtgewicht $w(\Gamma') = w(\Delta')$. Andererseits gilt $|\Delta_K \cap \Gamma'_K| = |\Delta_K \cap \Delta'_K| + 1$ im Widerspruch zur Wahl von Δ'. □

Beispiel 6.22. Der folgende (blau gekennzeichnete) Spannbaum hat Gesamtgewicht 18:



Aufgaben

Die folgenden Aufgaben stimmen nicht zwangsläufig mit den Hausübungen überein.

Aufgabe 1. (Präsenzaufgabe) Sei $n \in \mathbb{N}$. Finden Sie „kombinatorische“ Beweise (d. h. möglichst ohne Induktion) für die folgenden Identitäten:

(a) $1 + 2 + \ldots + n - 1 = \binom{n}{2}$.

(b) $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$.

(c) $1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{1}{4}\binom{2n}{3}$.
Hinweis: Bestimmen Sie die Mächtigkeit von $\{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : a, b < c \leq n\}$ auf zwei Weisen.

(d) $1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$.

(e) $2^0\binom{n}{0} + 2^1\binom{n}{1} + \ldots + 2^n\binom{n}{n} = 3^n$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Zeigen Sie

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \binom{n}{\lceil n/2 \rceil + 1} > \ldots > \binom{n}{n}$$

für $n \in \mathbb{N}$, wobei $\lfloor n/2 \rfloor$ abrunden und $\lceil n/2 \rceil$ aufrunden bezeichnet.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Sei M eine nichtleere endliche Menge. Zeigen Sie, dass M genauso viele Teilmengen mit gerader wie mit ungerader Mächtigkeit besitzt. Bestimmen Sie die Anzahl dieser Teilmengen.

Aufgabe 4 ($3 + 3$ Punkte)**.** Seien $a_1, \ldots, a_5 \in \mathbb{Z}^2$ verschiedene Punkte in der euklidischen Ebene mit ganzzahligen Koordinaten. Zeigen Sie, dass $i \neq j$ existieren, sodass der Mittelpunkt zwischen a_i und a_j auch ganzzahlige Koordinaten hat. Wie viele Punkte bräuchte man für die analoge Aussage im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$?
Hinweis: Schubfachprinzip.

Aufgabe 5 ($3 + 3 + 3 + 3$ Punkte)**.** Beim Jonglieren werden Bälle abwechselnd mit der linken und rechten Hand geworfen und gefangen. Der zum Zeitpunkt $k \in \mathbb{N}$ geworfene Ball soll als Nächstes zum Zeitpunkt $k + a_k$ geworfen werden. Die Zahl a_k ist somit ein Maß für die Wurfhöhe. Ist a_k ungerade, so wird der Ball von der linken in die rechte Hand geworfen oder umgekehrt. Der Spezialfall $a_k = 0$ bedeutet, dass zum Zeitpunkt k kein Ball geworfen wird. Die Kunst des Jonglierens besteht darin, es zu vermeiden, dass zwei Bälle zur gleichen Zeit (mit der gleichen Hand) gefangen werden müssen. Wir nennen die Folge $a = (a_1, a_2, \ldots) \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$ daher ein *Jongliermuster*, falls

$$k + a_k \neq l + a_l$$

für alle $k \neq l$ gilt. Die *Höhe* von a sei $h(a) := \max\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ (realistischerweise ist die Wurfhöhe beschränkt). Des Weiteren heißt a *periodisch*, falls ein $p \in \mathbb{N}$ mit $a_k = a_{k+p}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert. Ggf. schreibt man $a = (a_1, \ldots, a_p)$ und nennt das kleinste solche p die *Periode* von a. Das klassische 3-Ball-Jongliermuster („Kaskade“) ist (3). Eine beliebte Variante ist $(4, 4, 1)$. Etwas schwieriger zu jonglieren ist $(5, 1)$ („Shower“).

Zeigen Sie:

(a) Genau dann ist $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{N}_0^p$ ein periodisches Jongliermuster, wenn $1 + a_1, \ldots, p + a_p$ ein Repräsentantensystem für $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist. Insbesondere sind dann auch die *Shifts*

$$(a_2, \ldots, a_p, a_1), \ldots, (a_p, a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})$$

Jongliermuster mit der gleichen Periode.

(b) Die Anzahl der benötigten Bälle eines Jongliermusters $(a_1, \ldots, a_p)$ ist $\frac{1}{p}(a_1 + \ldots + a_p)$. Insbesondere ist dies eine ganze Zahl.

(c) Bestimmen Sie alle periodischen 3-Ball-Jongliermuster mit Periode 3 und Höhe ≤ 5 bis auf Shifts.

(LA) Beweisen Sie mit einem Video, dass Sie das Muster $(5, 0, 1)$ für mindestens 30 Sekunden jonglieren können.

Bemerkung: Ron Graham (1935–2020) war einer der bekanntesten diskreten Mathematiker und gleichzeitig 6-Ball-Jongleur.

Aufgabe 6 (Präsenzaufgabe)**.** Beweisen Sie ohne Induktion den Multinomialsatz

$$(a_1 + \ldots + a_n)^k = \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{N}_0^n \\ k_1 + \ldots + k_n = k}} \binom{k}{k_1, \ldots, k_n} a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n}$$

für $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 7 $(2 + 3 + 3$ Punkte$)$**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen mit Begründung:

(a) Wie viele Teilmengen von $\{1, \ldots, 12\}$ enthalten mindestens eine gerade Zahl?

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Buchstaben von POSSESSES anzuordnen, sodass die fünf S nicht alle nebeneinander stehen?

(c) Auf wie viele Arten kann man einen Blumenstrauß mit 12 Blumen zusammenstellen, wenn Rosen, Tulpen und Dahlien in beliebiger Anzahl zur Verfügung stehen?

Aufgabe 8 $(3 + 3$ Punkte$)$**.** Zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{m} \left(\binom{n}{k} \right) = \left(\binom{n+1}{m} \right),$$
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\binom{k}{m-k} \right) = \left(\binom{n}{m} \right)$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Zählen Sie Multimengen (man braucht keine Rechnung anzustellen).

Aufgabe 9 (4 Punkte)**.** Wie viele natürliche Zahlen $\leq 10^5$ sind weder Quadratzahlen noch Kubikzahlen noch durch 5 teilbar?
Hinweis: Inklusions-Exklusions-Prinzip.

Aufgabe 10 (LA, $1+2+2$ Punkte)**.**

(a) Berechnen Sie $\varphi(750)$.

(b) Bestimmen Sie das Urbild $\varphi^{-1}(14)$.
Bemerkung: Eine offene Vermutung von CARMICHAEL besagt $|\varphi^{-1}(n)| \neq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von 626.257.
Hinweis: $\varphi(626.257) = 624.640$.

Aufgabe 11 (Präsenzaufgabe)**.** Sei $A_n = \{\sigma \in S_n : \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\}$ die alternierende Gruppe vom Grad $n \geq 2$. Wie in Satz 2.10 sei $z_k(\sigma)$ die Anzahl der k-Zyklen von $\sigma \in S_n$.

(a) Berechnen Sie $\sum_{\sigma \in A_n} z_k(\sigma)$ für $1 \leq k \leq n$.
Hinweis: Berücksichtigen Sie die Spezialfälle $k \in \{n-1, n\}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\sigma \in A_n$ im Durchschnitt $H_n + \frac{(-1)^n}{(n-1)n}$ Zyklen besitzt.

Aufgabe 12 (2+4+3 Punkte)**.** Eine *Komposition* von $n \in \mathbb{N}$ mit t Teilen ist ein Tupel $(a_1, \ldots, a_t) \in \mathbb{N}^t$ mit $a_1 + \ldots + a_t = n$. Im Gegensatz zu Partitionen soll dabei die Reihenfolge der a_i berücksichtigt werden. Sei $k_t(n)$ die Anzahl der Kompositionen von n mit t Teilen.

(a) Bestimmen Sie alle Kompositionen von 7 mit drei Teilen.

(b) Zeigen Sie $k_t(n) = \binom{n-1}{t-1}$ für alle $1 \leq t \leq n$.
Hinweis: 1 2 | 3 4 5 | 6 | 7 8 9 oder $(a_1, \ldots, a_t) \mapsto \{a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + \ldots + a_{t-1}\}$.

(c) Berechnen Sie die Anzahl $k(n)$ aller Kompositionen von n mit beliebig vielen Teilen. (Das ist überraschenderweise viel einfacher als $p(n)$ zu berechnen.)

Aufgabe 13 ($4+4+2$ Punkte)**.** Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie:

(a) Für natürliche Zahlen $0 \leq k < n$ gilt

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{0 < a_1 < \ldots < a_{n-k} < n} a_1 \ldots a_{n-k}.$$

Hinweis: Satz 2.17.

(b) In $\mathbb{F}_p[X]$ gilt $X^p - X = X(X+1)\ldots(X+p-1)$.
Hinweis: Polynom-Methode.

(c) Für $1 < k < p$ ist $\begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix}$ durch p teilbar.

Aufgabe 14 (LA, $2+2+2$ Punkte)**.**

(a) Schreiben Sie $(1,2,3,4)(7,6,5,4,3)$ als Produkt von disjunkten Zyklen und als Produkt von Transpositionen.

(b) Berechnen Sie $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(c) Bestimmen Sie alle Partitionen von 7.

Aufgabe 15 (Präsenzaufgabe)**.** Gegeben seien $a, b, c_0, c_1 \in \mathbb{C}$ und gesucht ist eine Zahlenfolge $x = (x_0, x_1, \ldots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$, die die folgende *Rekursionsgleichung zweiter Ordnung* erfüllt:

$$x_0 = c_0, \qquad x_1 = c_1, \qquad x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2} \qquad (n \geq 2).$$

Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von $X^2 - aX - b$. Zeigen Sie:

(a) Im Fall $\lambda = \mu$ ist $x_n = c_0(1-n)\lambda^n + c_1 n\lambda^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Im Fall $\lambda \neq \mu$ ist $x_n = \frac{c_1 - \mu c_0}{\lambda - \mu}\lambda^n + \frac{\lambda c_0 - c_1}{\lambda - \mu}\mu^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 16 ($4 + 4 + 4 + 4$ Punkte)**.**

(a) Berechnen Sie $\left\{ {7 \atop 4} \right\}$ und $b(6)$.

(b) Zeigen Sie

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = n! H_n$$

für $n \in \mathbb{N}$, wobei H_n die n-te harmonische Zahl ist.

(c) Zeigen Sie

$$\begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} = 2\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$$

für alle $n \geq 2$.
Hinweis: Satz 2.25.

(d) Finden und beweisen Sie eine analoge Formel für $\left\{ {n \atop n-2} \right\}$.

Aufgabe 17 (4 Punkte)**.** Ein Corona-Modell: Jede neu-infizierte Person steckt in der ersten Woche ca. 0,8 Personen an, in der zweiten Woche steckt sie ca. 0,1 Personen an (Quarantäne zeigt Wirkung) und in der dritten Woche ist sie genesen oder tot. Sei c_n die Anzahl aller Corona-Infizierten in Hannover in Woche n. Die Werte von letzter und dieser Woche sind $c_0 = 3372$ und $c_1 = 3316$. Berechnen Sie c_{21} (Zeitraum der Wiederholungsklausur).
Hinweis: Unterteilen Sie c_n in „alt“ und „neu“ Infizierte.

Aufgabe 18 (LA, 4 Punkte)**.** Sei $w(n)$ die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stadt mit n Einwohnern an jedem Tag des Jahres (ohne Schaltjahr) mindestens ein Einwohner Geburtstag hat. Bestimmen Sie das kleinste n mit $w(n) > \frac{1}{2}$.
Hinweis: Sie dürfen WolframAlpha oder ein Computeralgebrasystem benutzen.

Aufgabe 19 (Präsenzaufgabe)**.** Sei K ein Körper. Eine Summe der Form $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n X^n$ mit $a_n \in K$ für $n \in \mathbb{Z}$ heißt (formale) *Laurent-Reihe*, falls $|\{n \leq 0 : a_n \neq 0\}| < \infty$. Zeigen Sie, dass die Menge

$K((X))$ aller Laurentreihen mit den Verknüpfungen

$$\sum a_n X^n + \sum b_n X^n = \sum (a_n + b_n) X^n,$$
$$\sum a_n X^n \cdot \sum b_n X^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k} \Big) X^n$$

zu einem Körper wird.
Hinweis: Vergessen Sie nicht die Wohldefiniertheit der Addition und Multiplikation zu prüfen.

Aufgabe 20 (4 + 4 Punkte)**.** Nach Lemma 4.8 ist $\alpha := 1 - X - X^2 \in \mathbb{C}[[X]]$ invertierbar.

(a) Berechnen Sie die ersten sieben Koeffizienten von $\frac{1}{\alpha}$ (also bis X^6). Erkennen Sie ein Muster?

(b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{\alpha}$ wie in Beispiel 4.10(ii) und entwickeln Sie die auftretenden geometrischen Reihen gemäß 4.10(i).

Aufgabe 21 (4 + 4 Punkte)**.** Die *Bernoulli-Zahlen* $B_n \in \mathbb{Q}$ werden über ihre erzeugende Funktion definiert:

$$\frac{X}{\exp(X) - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} X^n.$$

(a) Bestimmen Sie B_0 und beweisen Sie

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$$

für $n \geq 2$. Vergleichen Sie mit Satz 2.37 (darauf gibt es keine Punkte).

(b) Beweisen Sie $B_{2n+1} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Vergleichen Sie $\alpha := \sum_{k \neq 1} \frac{B_k}{k!} X^k$ mit $\alpha(-X)$.

Aufgabe 22 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass S_{2n} genau $(2n-1)!! := 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$ fixpunktfreie Permutationen der Ordnung 2 besitzt. Wie viele solche Permutationen besitzt S_{2n+1}?

Aufgabe 23 (LA, 2 + 2 + 2 Punkte)**.** Sei

$$\sin(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} X^{2n+1} \in \mathbb{C}[[X]],$$
$$\cos(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} X^{2n} \in \mathbb{C}[[X]].$$

Zeigen Sie:

(a) (EULERsche Formel) $\exp(\mathrm{i}X) = \cos(X) + \mathrm{i}\sin(X)$, wobei $\mathrm{i} = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$.

(b) $\sin(2X) = 2\sin(X)\cos(X)$ und $\cos(2X) = \cos(X)^2 - \sin(X)^2$.

(c) („trigonometrischer Pythagoras“) $\sin(X)^2 + \cos(X)^2 = 1$.

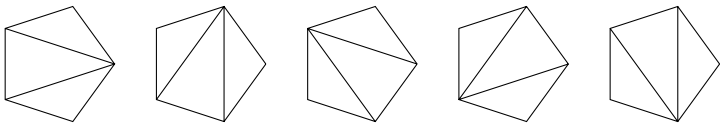
Hinweis: Ihre Lösung sollte unabhängig von Analysis sein.

Aufgabe 24 (Präsenzaufgabe)**.** In Beispiel 4.21(ii) wurden die Catalan-Zahlen durch $C_1 := 1$ und $C_n := \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}$ für $n \geq 2$ definiert. Zeigen Sie für $n \geq 2$:

(a) C_n ist die Anzahl der Möglichkeiten, n Elemente einer Gruppe zu klammern. Zum Beispiel $C_4 = 5$:

$$x_1(x_2(x_3x_4)), \qquad x_1((x_2x_3)x_4), \qquad (x_1x_2)(x_3x_4), \qquad ((x_1x_2)x_3)x_4, \qquad (x_1(x_2x_3))x_4.$$

(b) C_n ist die Anzahl der Möglichkeiten, $n-2$ Diagonalen in ein konvexes $(n+1)$-Eck zu zeichnen, die sich nicht schneiden:



Bemerkung: R. P. Stanleys Buch „Catalan numbers“ enthält 214 Interpretationen von C_n.

Aufgabe 25 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie die ersten zehn Koeffizienten (bis X^9) der Umkehrfunktion von $X - X^3 \in \mathbb{C}[[X]]^\circ$ (viele der Koeffizienten sind 0). Geben Sie die von 0 verschiedenen Koeffizienten bei `https://oeis.org/` ein.
Hinweis: Beispiel 4.21(ii).

Aufgabe 26 (4 + 4 Punkte)**.**

(a) Konstruieren Sie Potenzreihen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}[[X]]$, sodass

$$\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha, \qquad \alpha \circ (\beta + \gamma) \neq \alpha \circ \beta + \alpha \circ \gamma, \qquad \alpha \circ (\beta\gamma) \neq (\alpha \circ \beta)(\alpha \circ \gamma).$$

(b) Wir haben in Satz 4.19 bewiesen, dass jedes Element in $\mathbb{C}[[X]]^\circ$ eine Umkehrfunktion besitzt. Es gibt allerdings noch weitere Potenzreihen mit Umkehrfunktionen. Konstruieren Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[[X]] \setminus \mathbb{C}[[X]]^\circ$ mit $\alpha(\beta) = \beta(\alpha) = X$.

Aufgabe 27 (4 Punkte)**.** Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\binom{X}{k} := \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!} \in \mathbb{Q}[X]$$

(wurde bereits im Beweis der Vandermonde-Identität benutzt). Sei $\alpha \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom mit $\alpha(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass sich α eindeutig in der Form

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \binom{X}{k}$$

mit $a_k \in \mathbb{Z}$ schreiben lässt. Folgern Sie $\alpha \in \mathbb{Q}[X]$.
Hinweis: Polynom-Methode.

Aufgabe 28 (LA, 2 + 2 + 2 Punkte)**.** Als Ergänzung zu Aufgabe 23 sei

$$\tan(X) := \frac{\sin(X)}{\cos(X)},$$
$$\arctan(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} X^{2n+1}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\sin(X)' = \cos(X)$ und $\cos(X)' = -\sin(X)$.

(b) $\arctan \circ \tan = X$.
Hinweis: Prüfen Sie zuerst $\tan \in \mathbb{C}[[X]]^\circ$. Danach ableiten.

(c) $\arctan(X) = \frac{\mathrm{i}}{2} \log\left(\frac{\mathrm{i}+X}{\mathrm{i}-X}\right)$ mit $\mathrm{i} = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$.
Hinweis: Prüfen Sie, dass $\log\left(\frac{\mathrm{i}+X}{\mathrm{i}-X}\right)$ wohldefiniert ist.

Bemerkung: Es gibt unzählige weitere trigonometrische Identitäten, aber nicht alle lassen sich über formale Potenzreihen beweisen. Zum Beispiel besitzt cos keine formale Umkehrfunktion (dennoch kann man die analytische Taylorreihe für arccos angeben).

Aufgabe 29 (Knobelaufgabe für die Exkursionswoche, 4* Punkte)**.** Zeigen Sie, dass zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $a \in \mathbb{N}$ existiert, die durch n teilbar ist und nur aus den Ziffern 0 und 1 besteht.

Aufgabe 30 (Präsenzaufgabe)**.** Beweisen Sie für alle $\alpha \in \mathbb{C}[[X]]$:

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+\alpha X^k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k X^{\binom{k}{2}}}{X^k!}, \qquad \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\alpha X^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k X^k}{X^k!}.$$

Bemerkung: Diese Gleichungen setzen den Gaußschen Binomialsatz fort, so wie der Newtonsche Binomialsatz den gewöhnlichen Binomialsatz fortsetzt.

Aufgabe 31 ($4+4+3$ Punkte)**.**

(a) Schreiben Sie die erzeugende Funktion der Quadratzahlen $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$ als Quotient von Polynomen.
Hinweis: Orientieren Sie sich an Beispiel 5.2.

(b) Sei a_n die Anzahl der Möglichkeiten, n Eurocent durch beliebig viele 1-, 2- und 5-Centmünzen zusammenzustellen. Schreiben Sie die erzeugende Funktion von a_n als Produkt von geometrischen Reihen.

(c) Interpretieren Sie die Koeffizienten der Potenzreihe $\prod_{n=0}^{\infty}(1+X^{2^n})$ kombinatorisch. Lässt sich die Reihe einfacher ausdrücken?

Aufgabe 32 ($3+3+3^*$ Punkte)**.** Seien $n, d \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:

(a) (Glaisher) Die Anzahl der Partitionen von n, deren Teile nicht durch d teilbar sind, ist gleich der Anzahl der Partitionen von n, in denen kein Teil d-mal (oder öfter) auftritt.
Hinweis: Der Fall $d = 2$ entspricht Satz 5.6(i).

(b) (MacMahon) Die Anzahl der Partitionen von n, bei denen jeder Teil mindestens zweimal auftritt, ist gleich der Anzahl der Partitionen von n in Teile, die nicht die Form $\pm 1 + 6k$ haben.

(c) (Subbarao) Die Anzahl der Partitionen von n, bei denen jeder Teil genau zweimal, dreimal oder fünfmal auftritt, ist gleich der Anzahl der Partitionen von n in Teile der Form $\pm 2 + 12k$, $\pm 3 + 12k$ oder $6 + 12k$.

Aufgabe 33 (LA, $4+2$ Punkte)**.**

(a) Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und F_n die n-te Fibonacci-Zahl, wobei $F_0 = 0$. Zeigen Sie $F_{n+k} = F_n F_{k-1} + F_{n+1} F_k$ und leiten Sie daraus die CATALAN-*Identität* $F_n^2 - F_{n+k} F_{n-k} = (-1)^{n+k} F_k^2$ ab.

(b) Bestimmen Sie alle symmetrischen Partitionen von $n = 15$ und zeichnen Sie deren Young-Diagramme.

Aufgabe 34 (Präsenzaufgabe)**.** Beim Doppelkopf werden 48 Spielkarten gleichmäßig auf vier Spieler aufgeteilt. Allerdings ist jede Spielkarte genau zweimal vorhanden (also 24 paarweise verschiedene Karten). Sei A die Anzahl der möglichen Verteilungen, wobei die vier Spieler unterschieden werden. Wir betrachten Polynome in vier Unbekannten X_1, X_2, X_3, X_4. Zeigen Sie:

(a) A ist der Koeffizient von $X_1^{12} X_2^{12} X_3^{12} X_4^{12}$ in

$$\Big(\sum_{1 \le i \le j \le 4} X_i X_j \Big)^{24}.$$

(b)

$$A = \frac{24!}{2^{24}} \sum_{a_1, a_2, a_3, a_4 = 0}^{6} \frac{1}{(24 - a_1 - \ldots - a_4)! a_1! \ldots a_4!} \binom{48 - 2a_1 - \ldots - 2a_4}{12 - 2a_1, \ldots, 12 - 2a_4}.$$

Hinweis: $\sum_{1 \le i \le j \le 4} X_i X_j = \frac{1}{2}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)^2 + \frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2)$

Bemerkung: Mit Computer berechnet man $A = 2.248.575.441.654.260.591.964$.

Aufgabe 35 (4 Punkte)**.** Sei K ein Körper mit $q < \infty$ Elementen und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über K. Sei $\left\langle {n \atop k} \right\rangle_q$ der Wert des Polynoms $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ an der Stelle $X = q$. Zeigen Sie, dass $\left\langle {n \atop k} \right\rangle_q$ die Anzahl der k-dimensionalen Unterräume von V ist.
Hinweis: Wie viele k-Tupel linear unabhängiger Vektoren gibt es und wie viele davon erzeugen denselben Unterraum?

Aufgabe 36 ($2+4$ Punkte)**.** Sei G eine endliche Gruppe, die auf einer Menge $\Omega \neq \varnothing$ operiert. Zeigen Sie:

(a) Durch

$$x \sim y \ :\Longleftrightarrow \ \exists g \in G : \langle gxg^{-1} \rangle = \langle y \rangle \qquad (x, y \in G)$$

wird eine Äquivalenzrelation auf G definiert. Sei $x_1, \ldots, x_k \in G$ ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$. Für $i = 1, \ldots, k$ sei $[x_i]$ die Äquivalenzklasse von x_i.

(b) Für $x \in G$ sei $f(x)$ die Anzahl der Fixpunkte von x auf Ω. Dann ist

$$\frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{k} |[x_i]| f(x_i)$$

die Anzahl der Bahnen von G auf Ω.
Bemerkung: Dies beschleunigt Burnsides Lemma (sofern man G gut genug kennt).

Aufgabe 37 ($3 + 3 + 3^*$ Punkte)**.** Wir möchten ein Tetraeder färben und haben dafür n Farben zur Verfügung. Wie viele Möglichkeiten gibt es

(a) die vier Ecken zu färben?

(b) die sechs Kanten zu färben?

(c) Ecken, Kanten und Seiten gleichzeitig zu färben?

Hinweis: Mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 36 ist $|G| = 12$ und $k = 3$.

Aufgabe 38 (LA, 4 Punkte)**.** Ein *Dreiklang* besteht aus drei verschiedenen Tönen innerhalb einer Oktave $(c, cis, \ldots, b, h)$. Da die meisten von uns kein absolutes Gehör haben, betrachten wir zwei Dreiklänge als identisch, wenn sie sich nur durch Transposition unterscheiden. Demnach gibt es nur einen Dur-Dreiklang ($\{c, e, g\}$) und einen Moll-Dreiklang ($\{a, c, e\}$). Wie viele Dreiklänge gibt es insgesamt?

Aufgabe 39 (Präsenzaufgabe)**.** Man kann Pólyas Satz verallgemeinern, indem man negative Werte zulässt, also Funktionen $w\colon \Delta \to \mathbb{Z}$. Dann wird $W(X)$ zu einem *Laurent-Polynom* (eine endliche Laurent-Reihe, vgl. Aufgabe 19). Der Beweis von Pólyas Satz bleibt weiterhin gültig. Zählen Sie auf diese Weise die Halsketten mit fünf Perlen in den Farben rot, blau, grün, schwarz, bei denen genauso viele rote wie blaue Perlen vorkommen.
Bemerkung: Pólyas Satz lässt sich auch mit Polynomen in mehreren Variablen formulieren.

Aufgabe 40 ($3 + 2$ Punkte)**.** Sei Ω ein einfacher Graph mit $|\Omega_E| > 1$. Zeigen Sie, dass Ω zwei Ecken vom gleichen Grad besitzt. Gilt die Aussage auch für Multigraphen?

Aufgabe 41 ($3+4$ Punkte)**.** Sei Ω ein einfacher Graph. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist Ω zusammenhängend, so ist Ω^C unzusammenhängend.

(b) Ist Ω unzusammenhängend, so ist Ω^C zusammenhängend.

Aufgabe 42 ($2 + 2 + 3$ Punkte)**.** Der n-dimensionale *Würfelgraph* $\mathcal{W}_n$ hat Eckenmenge $\{0, 1\}^n$. Zwei Ecken sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie sich an genau einer Koordinate unterscheiden.

(a) Zeichnen Sie $\mathcal{W}_3$.

(b) Berechnen Sie die Anzahl der Kanten von $\mathcal{W}_n$.

(c) Sei e eine beliebige Ecke von $\mathcal{W}_n$. Prüfen Sie, ob $\mathcal{W}_n \setminus \{e\}$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 43 (LA, $2 + 3$ Punkte)**.** Gegeben sei der triviale Graph $\Omega := \mathcal{T}_n$. Euler und Hamilton spielen folgendes Spiel: Euler verbindet zwei beliebige Ecken von Ω mit einer Kante, wobei auch Schleifen an einer Ecke zugelassen sind. Anschließend zeichnet er eine neue Ecke auf der neuen Kante ein. Nun geht Hamilton genauso vor, dann wieder Euler usw. Die Kanten dürfen sich dabei nicht schneiden und der Grad jeder Ecke soll höchstens 3 betragen. Wer zuerst keine Kante mehr zeichnen kann, hat verloren.

(a) Zeigen Sie, dass das Spiel nach höchstens $3n - 1$ Zügen beendet ist.

(b) Zeigen Sie, dass Hamilton im Fall $n = 2$ den Sieg erzwingen kann.

Aufgabe 44 (Präsenzaufgabe)**.** Sei $G = \langle X \rangle$ eine endliche Gruppe mit Erzeugendensystem X. Die Elemente von G sind die Ecken des *Cayley-Graphen* $\Omega(G, X)$ von G. Zwei Ecken $g, h \in G$ bilden genau dann eine Kante, wenn $gh^{-1} \in X$ oder $hg^{-1} \in X$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass $\Omega(G, X)$ zusammenhängend und regulär ist.

(b) Sei $\sigma \in D_8$ die Drehung um 90° und $\tau \in D_8$ eine Spiegelung. Zeichnen Sie $\Omega(D_8, \{\sigma, \tau\})$.

(c) Beweisen Sie, dass $\Omega(D_{2n}, \{\sigma, \tau\})$ hamiltonsch ist, wobei nun σ eine Drehung um $2\pi/n$ ist.

Bemerkung: Die *Lovász-Vermutung*[1] besagt, dass $\Omega(G, X)$ für $|G| > 2$ stets hamiltonsch ist. Selbst für $G = D_{2n}$ und $|X| = 3$ ist dies noch offen.

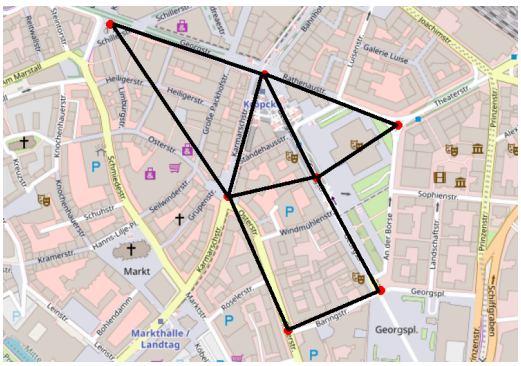
Aufgabe 45 (3 + 3 Punkte)**.**

(a) Hannover ist durch Leine und Ihme ähnlich wie Königsberg unterteilt:



Prüfen Sie, ob es einen geschlossenen Weg gibt, bei dem genau fünf der sechs Brücken je einmal überquert werden (die sechste Brücke soll nicht überquert werden, die anderen Kanten dürfen beliebig oft benutzt werden).

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der hamiltonschen Kreise in folgendem Graph:



[1] Lovász erhielt 2021 den Abel-Preis, eine der höchsten Mathematiker-Auszeichnungen.

Zwei hamiltonsche Kreise sollen als gleich angesehen werden, wenn sie sich nur durch den Startpunkt oder die Laufrichtung unterscheiden.

Aufgabe 46 ($1 + 2 + 3$ Punkte)**.** Sei $\mathcal{W}_n$ der Würfelgraph aus Aufgabe 42.

(a) Untersuchen Sie, wann $\mathcal{W}_n$ eulersch ist.

(b) Geben Sie einen hamiltonschen Kreis in $\mathcal{W}_3$ an.

(c) Beweisen Sie, dass $\mathcal{W}_n$ für alle $n \geq 2$ hamiltonsch ist.
Hinweis: Induktion nach n.

Aufgabe 47 ($2 + 3 + 3^*$ Punkte)**.** Sei $\mathcal{S}_n$ der Sterngraph und $A = A(\mathcal{S}_n)$ seine Adjazenzmatrix.

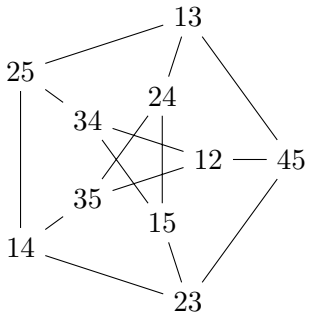
(a) Zeigen Sie, dass A den Eigenwert 0 mit algebraischer Vielfachheit $n - 2$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl aller geschlossenen Wege der Länge l in $\mathcal{S}_n$ für $l \in \mathbb{N}$.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe von (b) die beiden fehlenden Eigenwerte von A.
Hinweis: Sie dürfen die Eigenwerte auch direkt ausrechnen, falls das leichter fällt.

Aufgabe 48 (LA, 3 Punkte)**.** Zum Kindergeburtstag basteln wir Girlanden mit 8 Wimpeln in 4 möglichen Farben. Aus optischen Gründen soll der erste Wimpel rot und der letzte blau sein. Außerdem sollen nie zwei gleichfarbige Wimpel aneinandergrenzen. Wie viele solche Girlanden kann man basteln?
Hinweis: Zählen Sie Wege in einem Graphen.

Aufgabe 49 (Präsenzaufgabe)**.** Wir beschriften die zehn Ecken des Petersen-Graphen Ω mit den 2-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, 5\}$ (zur besseren Übersicht verzichten wir auf Kommas und Mengenklammern):



Zeigen Sie:

(a) Zwei Ecken A und B von Ω bilden genau dann eine Kante, wenn $A \cap B = \varnothing$.

(b) Die natürliche Operation von S_5 auf $\binom{\{1,\ldots,5\}}{2}$ induziert einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\alpha\colon S_5 \to \mathrm{Aut}(\Omega)$.

(c) $\mathrm{Aut}(\Omega) \cong S_5$.
Hinweis: Zeigen Sie $|\mathrm{Aut}(\Omega)| \leq 5!$ mit dem Bahn-Stabilisator-Satz.

Aufgabe 50 $(3 + 3 + 3^*)$**.** Sei $\mathcal{W}_n$ der Würfelgraph und $A := \mathrm{Aut}(\mathcal{W}_n)$. Wir interpretieren die Ecken von $\mathcal{W}_n$ als Vektoren in $\mathbb{F}_2^n$. Zeigen Sie:

(a) Für $\pi \in S_n$ ist $\alpha_\pi \colon \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^n$, $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto (a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)})$ ein Automorphismus von $\mathcal{W}_n$.

(b) Für $x \in \mathbb{F}_2^n$ ist $\beta_x \colon \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^n$, $v \mapsto x + v$ ein Automorphismus von $\mathcal{W}_n$.

(c) Für $\gamma \in A$ existieren eindeutig bestimmte $\pi \in S_n$ und $x \in \mathbb{F}_2^n$ mit $\gamma = \alpha_\pi \circ \beta_x$. Insbesondere ist $|A| = (2n)!! = 2^n n!$.

Bemerkung: Ersetzt man $\mathbb{F}_2^n$ durch $\{1, -1\}^n$, so ist A die Symmetriegruppe des Hyperwürfels im $\mathbb{R}^n$ (*Weylgruppe* vom Typ (B_n)). Für den gewöhnlichen Würfel ($n = 3$) erhält man $A \cong S_4 \times C_2$.

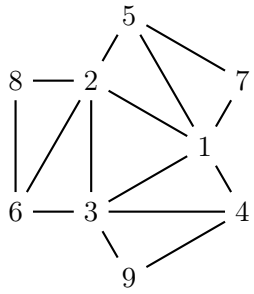
Aufgabe 51 $(3 + 4 + 3^*$ Punkte$)$**.**

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der 3-regulären Graphen mit sechs Ecken bis auf Isomorphie.
Hinweis: Komplement.

(b) Sei $0 \leq k < n$. Beweisen Sie, dass es genau dann einen k-regulären einfachen Graphen mit n Ecken gibt, falls $2 \mid kn$.

(c) Sei $f_k(n)$ die Anzahl der zusammenhängenden k-regulären Graphen mit n Ecken bis auf Isomorphie. Einige Werte stehen auf Wikipedia. Auffallend dabei ist $f_7(16) + 1 = f_8(16)$. Beweisen Sie diese Gleichung (ohne $f_7(16)$ zu berechnen).

Aufgabe 52 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Automorphismengruppe des Graphen:



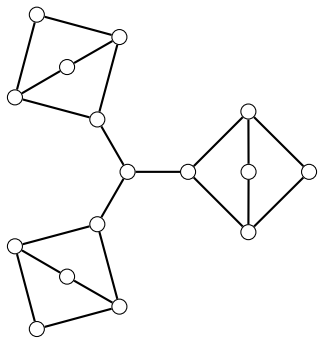
Aufgabe 53 (LA, $2 + 2$ Punkte)**.** Zeichnen Sie alle Graphen mit genau fünf Ecken und fünf Kanten bis auf Isomorphie. Geben Sie für jeden dieser Graphen einen nicht-trivialen Automorphismus an.

Aufgabe 54 (Präsenzaufgabe)**.** Sei $1 \leq k \leq n$ und $N := \{1, \ldots, n\}$. Eine Matrix $A \in N^{n \times k}$ heißt *lateinisches Rechteck*, falls in jeder Zeile und in jeder Spalte von A keine Zahl mehrfach auftritt. Im Fall $n = k$ nennt man A ein *lateinisches Quadrat*. Zeigen Sie, dass man jedes lateinische Rechteck zu einem lateinischen Quadrat ergänzen kann, indem man $n - k$ Spalten hinzufügt.
Hinweis: Betrachten Sie den bipartiten Graphen Ω mit $\Omega_E = \{0, 1\} \times N$ und

$$\{(0, i), (1, j)\} \in \Omega_K \iff i \text{ kommt in der } j\text{-ten Zeile von } A \textit{ nicht} \text{ vor.}$$

Zeigen Sie, dass Ω $(n - k)$-regulär ist und wenden Sie den Heiratssatz an.

Aufgabe 55 $(2+2$ Punkte$)$**.** Untersuchen Sie, ob der folgende Graph bipartit ist und ob eine perfekte Paarung existiert:



Aufgabe 56 $(2+2+3+3^*$ Punkte$)$**.**

(a) Zeigen Sie, dass der Würfelgraph $\mathcal{W}_n$ bipartit ist.

Nehmen wir nun an, dass $\mathcal{W}_n$ planar ist.

(b) Berechnen Sie die Anzahl der Flächen einer planaren Einbettung von $\mathcal{W}_n$.

(c) Durch wie viele Kanten wird eine solche Fläche begrenzt?

(d) Zeigen Sie $n \leq 3$.

Aufgabe 57 $(2+3$ Punkte$)$**.** Seien $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 0$ ganze Zahlen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Es existiert ein Multigraph Ω mit $\Omega_E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ und $\deg(e_i) = d_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

(b) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ ist gerade und $d_1 \leq \sum_{i=2}^{n} d_i$.

Hinweis: Für (b)⇒(a) kann man mit Induktion argumentieren.

Aufgabe 58 (LA, 4 Punkte)**.** Die konvexe Hülle P von endlich vielen Punkten im $\mathbb{R}^3$, die nicht in einer Ebene liegen, nennt man einen (konvexen) *Polyeder* (zum Beispiel Quader, Pyramide, Prisma etc.). Geometrisch wird P durch Ecken, Kanten und Seiten begrenzt. Man nennt P *regulär*, wenn alle Seiten kongruente regelmäßige Vielecke sind und jede Ecke gleich viele Seiten begrenzt. Wie in der Vorlesung gezeigt, bilden die Ecken jedes Polyeders einen planaren Graphen, indem man eine Seite „aufbricht“. Zeigen Sie mit Eulers Polyederformel, dass es genau fünf reguläre Polyeder gibt (bis auf Drehung, Verschiebung und Skalierung).
Bemerkung: Abschwächungen der Regularitätsbedingung führen zu weniger bekannten, aber genauso faszinierenden Objekten wie den Catalanischen Körpern.

Die folgenden Aufgaben wurden nicht im Rahmen der Vorlesung gestellt.

Aufgabe 59 (Diskreter Zwischenwertsatz)**.** Sei $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ und $a < b$ mit $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Für $a < k \leq b$ sei $f(k) - f(k-1) \leq 1$. Dann existiert ein c mit $a \leq c \leq b$ und $f(c) = 0$.

Aufgabe 60. Sei A eine Teilmenge von $\{1, \ldots, 140\}$ mit 71 Elementen. Gibt es stets $a, b \in A$ mit $|a - b| = 10$? Wie ist die Antwort im Fall $|A| = 70$?
Hinweis: Schubfachprinzip mit 10 Schubfächern.

Aufgabe 61. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \subseteq \{1, \ldots, 2n\}$ mit $|A| = n + 1$. Zeigen Sie:

(a) A enthält zwei teilerfremde Zahlen.

(b) Es existieren $a, b \in A$ mit $a \neq b$ und $a \mid b$.

Aufgabe 62. Zehn Kinder stehen beim Sportunterricht in einer Reihe. Zeigen Sie, dass es drei Jungen oder drei Mädchen gibt, die in gleichen Abständen voneinander stehen (z. B. an Position $3, 5, 7$ oder $1, 5, 9$). Geht das auch noch, wenn einer fehlt?
Bemerkung: Der Satz von VAN DER WAERDEN besagt allgemeiner: Werden die natürlichen Zahlen in zwei Klassen eingeteilt, so existieren für jedes k Zahlen a, d, sodass $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + kd$ in einer Klasse liegen.[2]

Aufgabe 63. Beim *Fischer-Schach* werden Figuren zufällig nach folgenden Regeln aufgestellt:

- Die acht weißen Bauern belegen wie gewohnt die zweite Reihe.
- Die verbleibenden acht weißen Figuren (2 Türme, 2 Springer, 2 Läufer, Dame und König) belegen die erste Reihe.
- Die beiden weißen Läufer müssen ein schwarzes und ein weißes Feld belegen.
- Zwischen den weißen Türmen muss der weiße König stehen.
- Die schwarzen Figuren in den Reihen 7 und 8 stehen spiegelsymmetrisch (an der Horizontalen) zu den entsprechenden weißen Figuren.

Wie viele mögliche Ausgangsstellungen gibt es?

Aufgabe 64. Seien $0 < k \leq l < n$ natürliche Zahlen. Zeigen Sie, dass $\binom{n}{k}$ und $\binom{n}{l}$ einen gemeinsamen Teiler > 1 besitzen.
Hinweis: $\binom{n}{l}\binom{l}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k}$.

Aufgabe 65. Jede Permutation $\sigma \in S_n$ lässt sich eindeutig als Produkt von disjunkten Zyklen

$$\sigma = (a_1, \ldots, a_k)(b_1, \ldots, b_l) \ldots$$

schreiben, wenn man $a_1 = \max\{a_1, \ldots, a_k\} < b_1 = \max\{b_1, \ldots, b_l\} < \ldots$ fordert (vgl. Bemerkung 2.8). Dabei zählen wir auch die 1-Zyklen mit. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi \colon S_n &\to S_n, \\ \sigma &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & k+2 & \cdots & k+l & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k & b_1 & b_2 & \cdots & b_l & \cdots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bijektiv ist. Man nennt Ψ FOATA-*Transformation*.

[2] Siehe Zahlentheorie-Skript

Aufgabe 66 (Münzproblem)**.** Angenommen Sie besitzen beliebig viele Münzen im Wert von a und b Euro, wobei $a, b \in \mathbb{N}$ teilerfremd seien. Zeigen Sie:

(a) Sie können den Betrag $ab - a - b$ Euro nicht exakt (ohne Wechselgeld) bezahlen.

(b) Sie können jeden ganzen Eurobetrag größer als $ab - a - b$ bezahlen.

Aufgabe 67. Untersuchen Sie, welche der Catalan-Zahlen C_n ungerade sind.
Hinweis: Betrachten Sie $\alpha^2 - \alpha = X$ modulo 2.

Aufgabe 68. Sei $\Delta := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x|, |y|, |z| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ der Einheitswürfel und

$$G := \left\{ f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3) : f(\Delta) = \Delta \right\} \leq \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$$

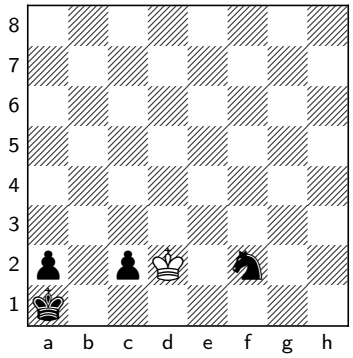
die Symmetriegruppe von Δ.

(a) Zeigen Sie, dass G transitiv auf der Menge der sechs Seiten von Δ operiert.

(b) Berechnen Sie $|G|$ durch iterierte Anwendung des Bahn-Stabilisator-Satzes.

Aufgabe 69. Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei gleichfarbige 4×2-Legosteine zusammenzustecken, wobei der entstehende Winkel durch 90° teilbar ist?

Aufgabe 70 (Elkies)**.** In der folgenden Schachpartie ist Weiß am Zug:



Zeigen Sie:

(a) Schlägt der weiße König den Bauern auf c2, so kann Schwarz den Sieg erzwingen.
Hinweis: Schwarz gewinnt, sobald der Bauer auf a2 in eine Dame umgewandelt wird.

(b) Weiß kann ein Unentschieden erzwingen.
Hinweis: Solange sich der weiße König auf den Feldern c1 und c2 aufhält, kann Schwarz nur den Springer bewegen. Man untersuche den Graphen des Springerproblems (Beispiel 1.12).

Aufgabe 71. Bestimmen Sie alle Bäume mit genau zwei oder drei Blättern bis auf Isomorphie.

Aufgabe 72. Zeichnen Sie alle nicht-isomorphen Bäume mit 10 Ecken, von denen keine Grad 2 hat.
Bemerkung: Diese Aufgabe wird im Oscar-prämierten Spielfilm „Good will hunting“ unvollständig gelöst. Siehe Youtube.

Aufgabe 73. Sei $\Omega = (\Omega_E, \Omega_K)$ ein einfacher Graph. Wir definieren eine Relation $\leq$ auf $M := \Omega_E \cup \Omega_K$ durch:

$$x < y \ :\Longleftrightarrow \ x \in \Omega_E, y \in \Omega_K, x \in y.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(M, \leq)$ eine geordnete Menge ist.

(b) Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(M)$ besteht aus allen Permutationen $\gamma \in \mathrm{Sym}(M)$ mit $\gamma(x) \leq \gamma(y) \iff x \leq y$ für alle $x, y \in M$. Zeigen Sie $\mathrm{Aut}(M) \cong \mathrm{Aut}(\Omega)$.

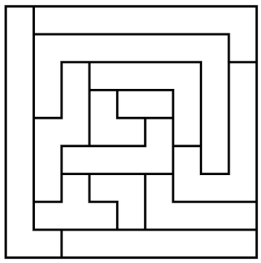
Aufgabe 74. Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge. Eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt *offen*, falls für alle $u \in U$ und $v \in M$ gilt: $v \leq u \Longrightarrow v \in U$.

(a) Zeigen Sie, dass die offenen Mengen eine Topologie T auf M bilden. Man nennt T die *Alexandroff-Topologie*.

(b) Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(T)$ besteht aus allen Permutationen $\gamma \in \mathrm{Sym}(M)$, sodass $U \subseteq M$ genau dann offen ist, wenn $\gamma(U)$ offen ist.[3] Zeigen Sie $\mathrm{Aut}(T) \cong \mathrm{Aut}(M)$.

Bemerkung: Nach Frucht und Aufgabe 73 existiert für jede endliche Gruppe G ein Graph, eine geordnete Menge und ein topologischer Raum mit Automorphismengruppe G.

Aufgabe 75. Färben Sie folgende Flächen mit höchstens vier verschiedenen Farben, sodass benachbarte Flächen verschieden gefärbt sind.



Aufgabe 76. Sei Ω ein Graph mit mindestens einer Kante. Der *Kantengraph* $\widehat{\Omega}$ von Ω ist definiert durch $\widehat{\Omega} := (\Omega_K, \Delta)$, wobei $\{x, y\} \in \Delta :\Leftrightarrow x \cap y \neq \varnothing$ für verschiedene $x, y \in \Omega_K$.

(a) Bestimmen Sie die Kantengraphen $\widehat{\mathcal{G}_n}$, $\widehat{\mathcal{K}_n}$ und $\widehat{\mathcal{S}_n}$ bis auf Isomorphie.

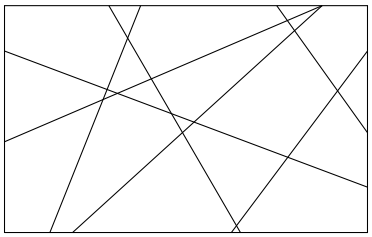
(b) Zeigen Sie, dass der Graph  *kein* Kantengraph ist.

(c) Sei Ω ein Graph mit $\widehat{\Omega} \cong \Omega$. Zeigen Sie, dass jede Zusammenhangskomponente von Ω ein Kreis ist.
Hinweis: Untersuchen Sie die Grade der Ecken.

[3] Dies sind die Homöomorphismen aus der Analysis.

Aufgabe 77. Zeigen Sie $\chi(\Omega)\chi(\Omega^C) \geq n$ für jeden Graphen Ω mit n Ecken.
Hinweis: $\chi(\Omega)\chi(\Omega^C)$ ist die Mächtigkeit einer naheliegenden Menge...

Aufgabe 78. Eine rechteckige Fläche sei durch gerade Linien in kleinere Flächen unterteilt. Wie viele Farben benötigt man, um jede der kleinen Flächen so zu färben, dass benachbarte Flächen unterschiedlich gefärbt sind?



Hinweis: Satz 4.5.

Aufgabe 79. Angenommen der Vierfarbensatz ist falsch. Dann gibt es ein Gegenbeispiel Ω, sodass $|\Omega_E| + |\Omega_K|$ minimal ist unter allen Gegenbeispielen. Zeigen Sie:

(a) Ω ist einfach und zusammenhängend.

(b) Jede Ecke von Ω hat Grad ≥ 4.

(c) Ω besitzt keine *Brücken*. Eine Brücke ist eine Kante $k \in \Omega_K$, sodass $\Omega \setminus \{k\}$ unzusammenhängend ist.

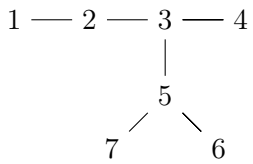
(d) Für $a, b, c \in \Omega_K$ ist $\Omega \setminus \{a, b, c\}$ stets zusammenhängend.

Aufgabe 80. Begründen Sie, warum der Stammbaum aller in den letzten 1000 Jahren geborenen Menschen *kein* Baum sein kann.

Aufgabe 81. Zeigen Sie, dass jeder Baum eine Ecke oder Kante besitzt, die von allen Automorphismen festgehalten wird.
Hinweis: Induktion nach der Anzahl der Ecken.

Aufgabe 82.

(a) Bestimmen Sie den Prüfercode des Baums

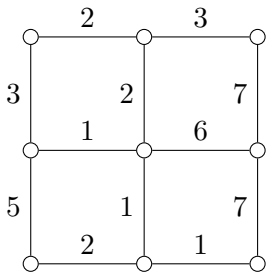


(b) Beschreiben Sie die Bäume mit Prüfercode $(1, 2, \ldots, n-2)$ und $(1, \ldots, 1)$.

Aufgabe 83. Die Atomstruktur von *Alkanen* lässt sich durch Bäume realisieren, deren Blätter Wasserstoffatome (H) sind und alle anderen Ecken Grad 4 haben und Kohlenstoffatome (C) sind. Sei a_n die Anzahl dieser Verbindungen mit n C-Atomen bis auf Isomorphie von Graphen. Es gilt $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ (Methan, Ethan, Propan). Für $n \geq 4$ ist $a_n > 1$ (dieses Phänomen heißt *Isomerie*). Berechnen Sie a_6 und zeichnen Sie die entsprechenden Verbindungen.
Bemerkung: Die meisten der theoretisch möglichen Alkane sind nicht existenzfähig.

Aufgabe 84. Wir entfernen aus dem vollständigen Graphen $\mathcal{V}_n$ eine beliebige Kante und erhalten den neuen Graphen Ω. Bestimmen Sie die Anzahl der Spannbäume von Ω.

Aufgabe 85. Bestimmen Sie einen Spannbaum mit minimalem Gewicht in dem folgenden Graphen:



Wie groß ist das Gesamtgewicht?

Aufgabe 86. Sei G ein zusammenhängender, gewichteter Graph mit paarweise verschiedenen Gewichten. Zeigen Sie, dass G genau einen Spannbaum mit minimalem Gewicht besitzt.

Anhang

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42
$b(n)$	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975
$g(n)$	1	1	2	4	11	34	156	1044	12346	274668	12005168
$\varphi(n)$	0	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4
$[n!/e]$	0	0	1	2	9	44	265	1854	14833	133496	1334961
B_n	1	$-1/2$	$1/6$	0	$-1/30$	0	$1/42$	0	$-1/30$	0	$5/66$
C_n	0	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

$\binom{n}{k}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

$\left(\binom{n}{k}\right)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
4	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
5	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
6	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
7	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
8	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448
9	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758
10	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	2	3	1							
4	0	6	11	6	1						
5	0	24	50	35	10	1					
6	0	120	274	225	85	15	1				
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1			
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1		
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1	
10	0	362880	1026576	1172700	723680	269325	63273	9450	870	45	1

$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	3	1							
4	0	1	7	6	1						
5	0	1	15	25	10	1					
6	0	1	31	90	65	15	1				
7	0	1	63	301	350	140	21	1			
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

$\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	$X+1$	1			
3	1	X^2+X+1	X^2+X+1	1		
4	1	X^3+X^2+X+1	$X^4+X^3+2X^2+X+1$	X^3+X^2+X+1	1	
5	1	$X^4+X^3+X^2+X+1$	$X^6+X^5+2X^4+2X^3+2X^2+X+1$	$X^6+X^5+2X^4+2X^3+2X^2+X+1$	$X^4+X^3+X^2+X+1$	1

Stichwortverzeichnis

Symbole

$\varnothing$, 4
2^A, 5
$\left\langle {n \atop k} \right\rangle$, 37
$|A|$, 4
A^I, 4
$\binom{A}{k}$, 5
$\binom{a}{k}$, 5
α^{-1}, 31
α', 35
$\alpha(\beta)$, 33
$\alpha \circ \beta$, 33
$\alpha^{(k)}$, 35
A^n, 4
$\arctan(x)$, 91
B_n, 29, 90
$b(n)$, 17
$\mathbb{C}$, 4
$\mathbb{C}[[X]]$, 30
$\mathbb{C}[[X]]^\times$, 32
$\mathbb{C}[[X]]^\circ$, 34
$\chi(\Omega)$, 75
$\chi'(\Omega)$, 77
C_n, 39, 91
$\cos(x)$, 90
$\deg(\alpha)$, 52
$\Delta(f)$, 26
$\mathrm{E}(f)$, 27
$\exp(X)$, 31
F_n, 22, 93
$\mathcal{G}_n$, 52
$g(n)$, 61
H_n, 14
$k(\Omega)$, 59
$K((X))$, 90
$\mathcal{K}_n$, 52
$k(n)$, 88
$k_t(n)$, 88
λ', 41
$\log(1+X)$, 36
$n!$, 5
$\mathbb{N}$, 4
$\mathbb{N}_0$, 4
$\binom{n}{k_1,\ldots,k_s}$, 5
$\Omega \sqcup \Delta$, 52
Ω^C, 52
$\Omega \setminus \Delta$, 52
$\widehat{\Omega}$, 78
$\Omega \setminus \Delta$, 52
$P(A)$, 17
$\varphi(n)$, 11
$p_{k,l}(n)$, 42
$p_k(n)$, 42
$p(n)$, *17*, 21, 44
$\mathbb{Q}$, 4
$\mathbb{R}$, 4
$R(k,l)$, 72
$\sin(x)$, 90
S_n, 7
$\mathcal{S}_n$, 52
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, 15
$\left\{ {n \atop k} \right\}$, 18
$\mathrm{Sym}(A)$, 7
$\tan(x)$, 91
$\mathcal{T}_n$, 51
$\mathcal{V}_n$, 51
$\bigtimes_{i \in I} A_i$, 4
$\binom{X}{k}$, 91
$\mathbb{Z}$, 4
$\deg(\Omega)$, 75
$\int f$, 26

A

abelsche Summation, 28
Ableitung, 35
  k-te, 35
  diskrete, 26
Absolutglied, 30
Adjazenzmatrix, 56
Alexandroff-Topologie, 101
Alkan, 103
Alpöge, 29
Anagramm, 9
Anzahl
  k-Zyklen, 14
  Partitionen, 17
  Partitionen in ungleiche Teile, 41
  Partitionen mit festem Typ, 17
  Partitionen mit größtem Teil k, 41
  Permutationen mit Zyklentyp, 18
  symmetrischer Partitionen, 41
Apéry-Konstante, 29
Appel-Haken, 77
asymmetrisch, 63

Automorphismengruppe, 63

B
Babai, 66
Bahn, 45
Bahn-Stabilisator-Satz, 46
Bahnengleichung, 47
Baum, 79
Bellzahl, 17
Bernoulli-Zahl, 29, 90
Binet-Formel, 24
Binomialkoeffizient, 5
Binomialsatz, 7
Blatt, 79
Brooks, 75
Brücke, 102
Burnsides Lemma, 47

C
Carmichael, 88
Catalan, 40
Catalan-Identität, 93
Catalan-Zahl, 35, 91
Cayley-Formel, 80
Cayley-Graph, 95
chromatischer Index, 77
Corona, 89

D
Diedergruppe, 46
disjunkte Vereinigung, 4
Diskreter Zwischenwertsatz, 98
Dobiński-Formel, 21
Dreiklang, 94

E
Ecke, 51
    benachbart, 51
    verbunden, 51
Einheitengruppe, 32
Elkies, 100
Enigma, 12
Erdős, 73
Erdős-Gallai, 58
Erdős-Rényi, 64
Erdős-Turán, 43
erzeugende Funktion, 39
    für $b(n)$, 40
    für $p(n)$, 40
euklidischer Algorithmus, 22
Euler, 40
Euler-Charakteristik, 68
Euler-Hierholzer, 53
Euler-Mascheroni-Konstante, 15
Eulers Pentagonalzahlensatz, 43
eulersche φ-Funktion, 11
Eulersche Formel, 90
Eulersche Polyederformel, 68
eulersche Tour, 53
Exponentialfunktion, 31

F
Faktorregel, 36
Fakultät, 5
Faulhabersche Formel, 28
Fibonacci-Zahl, 22, 93
Fischer-Schach, 99
Fixpunkt, 11
fixpunktfrei, 11
Foata-Transformation, 99
Franklin, 44
Freundschaft-Theorem, 57
Frucht, 65
Funktionalgleichung
    für $\exp(X)$, 33
    für $\log(1+X)$, 36
Färbung, 75

G
Gaußscher Binomialkoeffizient, 37
Gaußscher Binomialsatz, 38
Geburtstagsparadoxon, 6
geometrische Reihe, 32
Gerade, 52
Gesamtgewicht, 84
Gewichtsfunktion, 84
Glaisher, 92
Good will hunting, 101
Grad
    einer Ecke, 52
Graph, 51
    asymmetrischer, 63
    bipartiter, 67
    chromatische Zahl, 75
    chromatischer Index, 77
    hamiltonscher, 54
    komplementärer, 52
    k-regulär, 52
    planarer, 67
    symmetrischer, 63
    trivialer, 51
    Vereinigung, 52
    vollständig bipartit, 67
    vollständiger, 51
    zusammenhängend, 51
Gruppe
    symmetrische, 7

H
Halls Heiratssatz, 70
Halskette, 47, 50
Handschlaglemma, 53
Harborth, 67
Hardy-Ramanujan, 21

Haus vom Nikolaus, 53
Heawood, 76

I
Inklusions-Exklusions-Prinzip, 10
Isomerie, 103
Isomorphie
    von Graphen, 61

J
Jongliermuster, 86
    Höhe, 87
    Periode, 87
Jordanscher Kurvensatz, 68

K
Kante, 51
Kantenfärbung, 77
Kantengraph, 78, 101
Kantenkontraktion, 83
kartesisches Produkt, 4
Kettenregel, 35
Kirchhoffs Matrix-Baum-Satz, 83
Kombination
    mit Wiederholung, 9
    ohne Wiederholung, 7
Komponente, 51
Komposition, 33, 88
Kreis, 52, 54
    hamiltonscher, 54
Kruskal-Algorithmus, 84
Kuratowski, 69
König, 70, 78
Königsberger Brückenproblem, 52

L
Lagarias-Kriterium, 29
Lagrange, 46
Lamé, 22
Laplace-Matrix, 83
lateinisches Quadrat, 97
Laurent-Reihe, 31, 89
Lego, 100
Linksnebenklassen, 46
Logarithmus, 36
Lotto, 7
Lovász-Vermutung, 95
Länge
    einer Bahn, 45
    eines Wegs, 51
    eines Zyklus, 13

M
MacMahon, 92
MacMahon-Würfel, 48
Maximalgrad, 75
Menge
    endlich/unendlich, 4
    gleichmächtig, 4
Menger, 60
Mercator-Reihe, 36
Millenniumsproblem, 55
Montmort, 11
Multigraph, 51
Multimenge, 9
Multinomialkoeffizient, 5
Multinomialsatz, *9*, 87
Münzproblem, 100

N
Newtonscher Binomialsatz, 37
Nicomachus-Identität, 28

O
Operation, 45
    transitive, 45
Ore, 55

P
Paarung, 70
    perfekte, 70
Partialbruchzerlegung, 32
partielle Integration, 28
Partition
    einer Menge, 17
    einer Zahl, 17
    konjugierte, 41
    symmetrisch, 41
    Teile, 17
Pascalsches Dreieck, 6
Permutation, 7
    fixpunktfrei, 11
Petersen-Graph, 54
Pólya, 49
Polynom-Methode, 8
Potenzmenge, 5
Potenzreihe, 30
    Inverse, 31
    invertierbar, 31
    Umkehrfunktion, 34
    Wurzel, 37
Problem der 100 Gefangenen, 15
Problem des Handelsreisenden, 55
Produktregel, 35
Prüfer-Code, 81
Prüfer, 80

Q
Quotientenregel, 35

R
Ramanujan, 45
Ramsey, 72, 73
Ramsey-Zahl, 72

Rekursionsgleichung, 22
(in)homogene, 22
Riemannsche ζ-Funktion, 29

S
Sammelbilderproblem, 20
Schach, 100
Schleife, 51
Schubfachprinzip, 7
Sekretärinnenproblem, 12
Separator, 60
Skatkarten, 9, 71
Spannbaum, 83
Springerproblem, 54
Stabilisator, 45
Stammfunktion
diskrete, 26
Stern, 52
Stirling-Formel, 21
Stirling-Zahl
erster Art, 15
zweiter Art, 18
Subbarao, 92
Sudoku, 49
Summenregel, 35
Superposition, 23

T
Taylorreihe, 35
teilerfremd, 11
Teilgraph, 69
induzierter, 72
Transposition, 13
trigonometrischer Pythagoras, 90
Tripathi-Venugopalan-West, 58
Turán, 73
Turán-Graph, 74

U
Überdeckung, 70
Umkehrfunktion, 34
Unbekannte, 30
Unterteilung, 69

V
van der Waerden, 99
Vandermonde-Identität, 8
Variation
mit Wiederholung, 6, 8
ohne Wiederholung, 6
Vierfarbensatz, 77
Vizing, 78

W
Wagner-Fáry, 67
Weg, 51
geschlossener, 53
kreuzungsfrei, 59
Weylgruppe, 97
Würfel, 10, 48
Würfelgraph, 94

Y
Young-Diagramm, 41

Z
Zahl
ganze, 4
harmonische, 14
komplexe, 4
natürliche, 4
rationale, 4
reelle, 4
Zahlenschloss, 6
Zając, 76
Zauberwürfel, 49
Zusammenhang, 59
Zusammenhangskomponente, 51
zusammenhängend, 51
Zyklentyp, 18
Zyklus, 13
disjunkt, 13
Zählmaß, 26